Váraljai Péter

Digszám
19. 02. 12.
(1)

Dr. Ruszinkó Miklós
RUSZINKO.MIKLOS@RENYI.MTA.HU BAL.ITK.PPKE.HU

Követelmény:
- Max 2 hiányzás
- 1 Nagy ZH (~ ápr 9)
- $\emptyset$ pót ZH
- Vizsga – írásbeli és szóbeli

Bonyolultság

- Halmazok

$A \cup B = \{x : x \in A \text{ vagy } x \in B\}$

$A \cap B = \{x : x \in A \text{ és } x \in B\}$

$A / B = \{x : x \in A \text{ és } x \notin B\}$

$\overline{A} = \{x : x \notin A \text{ és } x \in U\}$

$|A| = k$

$P(A) = 2^k$

$A \times B = \{(a;b) : a \in A; b \in B\}$

$R \in A \times A$
↳ reláció

- Kvantorok

$\exists$ létezik $\forall$ minden / bármely / tetszőleges

R e ekvivalencia ha
- reflexív $(a;a)$
- szimmetrikus $(a;b) \to (b;a)$
- tranzitív $(a;b)$ és $(b;c) \to (a;c)$

$\{3;6;9;10;13\}$

$x = y$ ha (mod 3)

$R = \{(3;3);(6;6);\dots(3;6);(6;9)\dots(10;13)\}$

ekvivalencia $\Leftrightarrow$ partíció az alaphalmazon

(3 6 9) (10;13)

- Függvény

olyan részhalmaza $A \times B$-nek hogy $\forall a \in A$ ≤ 1 b tartozik

Injektív ha $\forall a_1\, a_2 \in A$ $f(a_1) \neq f(a_2)$ ha $a_1 \neq a_2$

Szürjektív ha $\forall b \in B$ $\exists a \in A$ $f(a) = b$

Bijektív: In és Szür

Váradljai Péter

DiszMat
19.02.12
2

- De Morgan

$$\overline{A\cap B} = \bar{A}\cup\bar{B}$$
$$\overline{A\cup B} = \bar{A}\cap\bar{B}$$

- Indirekt bizonyítás

$\sqrt{2} = \frac{a}{b} \iff 2b^2 = a^2$ (páros, páratlan)

- Skatulya elv ...

$N = \{0; 1; 2; \dots\}$ természetes

- Halmaz számosság

$|A| = k$ $\exists$ bijektív leképezés $[1 \dots k]$ halmazban

Ha $|A| = \infty$ és

Ha $|A| \leq |B|$ akkor ha $\exists$ $A \to B$ injektív leképezés

Ha $|A| = |B|$ akkor ha $|A| \leq |B|$ és $|B| \leq |A|$

Ha $|A| < |B|$ akkor ha $\exists f$ injektív $A \to B$ és $\nexists g$ $B \to A$

Cantor $|A| \leq |P(A)|$
$|A| < |P(A)|$ Cantor féle diagonalizációval bizonyította

|egészek| = |racionális| ?
: ① |egész| ≤ |racionális|
$f(x) = x$
② |racionális| ≤ |egész|
$f\left(\frac{a}{b}\right) = 2^a \cdot 3^b$

D
Egy A halmaz megszámolhatóan végtelen ha $|A| = |N|$

Áll
$|N| < |P(N)|$ ezért $P(N)$ nem megszámlálhatóan végtelen

B A_0 A_1 A_2 ... A_j ...
0
1
2
⋮
i
⋮

$a_{ij} = 0$ ha $i \in A_j$
$a_{ij} = 1$ ha $i \notin A_j$
$A^* = \{i : a_{ii} = 1\}$
TFH $A^* = A_j$ $\exists j$
vagy vagy
lesz egy elem

$\forall j$-re:
$a_{jj} = 1 \iff j \notin A_j$
$\Updownarrow$
$j \in A^*$

$a_{jj} = 0 \iff j \in A_j$
$\Updownarrow$
$j \notin A^*$

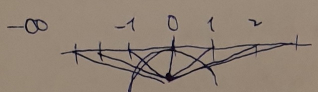
Várvalgyai Péter

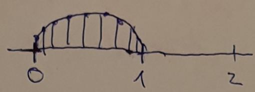
Big Gráf

19.02.12.

(3)

$|\mathbb{R}|$ nem megszámlálhatóan végtelen





S_x: $\boxed{0}$100100010000 ...

S_1 S_2 S_3 ... S_i ...

1 bit
2 bit
⋮
j bit
⋮

$a_{ij}=0 \iff S_i$ j. bitje $=1$

$a_{ij}=1 \iff S_i$ j. bitje $=0$

$S^* = \{a_{i,j}\}_{i=j}$

$S^* \neq S_j$ $\forall j$-re $\Leftarrow$

$a_{jj}=0 \iff S_{jj}=1$

$\Updownarrow$

$S^*_j=0$ ↯

$a_{jj}=1 \iff S_{jj}=0$

$\Updownarrow$

$S^*_j=1$ ↯

$a_n = o(b_n)$ ha $\frac{a_n}{b_n} \to 0$ ha $n\to\infty$

$a_n = O(b_n)$ ha $a_n \le C\, b_n$ $\forall n$-re

$a_n = \Theta(b_n) \iff a_n = O(b_n)$ és $a_n = \Omega(b_n)$

$a_n = \sqrt{n}$ $\quad \sqrt{n} = o(n)$

$a_n = n^2$ $\quad n^2 = O(n)$

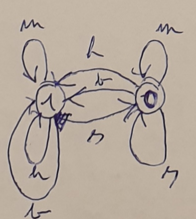
$a_n \sim b_n \iff \frac{a_n}{b_n} = 1$ $n\to\infty$

$a_n = \Omega(b_n) \iff b_n = O(b_n)$

$a_n = n^2$ $\quad b_n = 100n^2 \Rightarrow a_n = \Theta(b_n)$

Véges automaták (determinisztikus)

Fotocellás ajtó: nyitva 1 csukva 0 | h - hint, m - mindkét, b - bent, r - renki



$M(Q; \Sigma; d; q_0; F) \to$ automata

Q állapotok halmaza (véges)

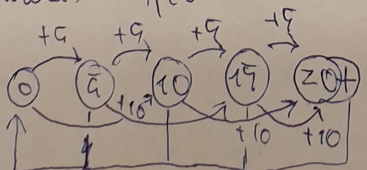
Σ véges halmaz (betűket) (abc)

d állapot váltó fv

q_0 kezdeti állapot

F elfogadó állapot

Pénzautomata: 5; 10



Várvaljai Péter

Dig szám

19.02.12.

(1)

(4)

véges

összes véges sorozat (megszám ∞)

L egy formális nyelv Σ felett ha $L \subseteq \Sigma^*$

összes véges sorozat bármely részhalmaza (0 megszám ∞)

$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ vagy } x \in B\}$

sorozat $A \circ B = \{XY \mid X \in A ; Y \in B\}$

Iterálás $A^* = \{w_1 w_2 \dots w_k \mid w_i \in A \mid i = 1, \dots k \geq 0\}$

Metszet : $A \cap B$

Tükörkép : A^R

Különbség: $A - B$

$(\{0\}\circ\{1\}^*\{0\}) \cap (\{0\}\circ\{1\}\{0\})$

- Reguláris kifejezés

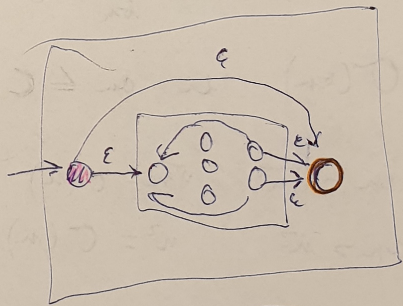
maradék a diában ...

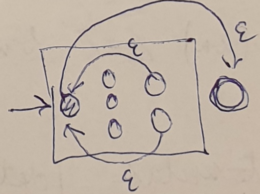
1, Σ minden eleme

2, ε

3, ∅

4, ha A, B reg ...





Váraljai Péter

DigSzám
19.02.19.
①

DVA

$M = (Q\ ;\ \Sigma\ ;\ d\ ;\ q\ ;\ F)$

Q — állapot; Σ — betűk; d — állapot átmenet fv; q, F — $\in Q$ kezdő és elfogadó állapot

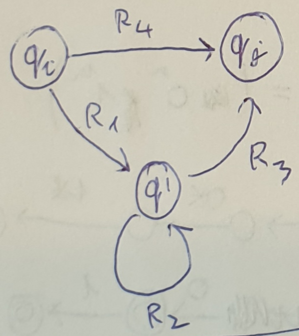
(D) 2 automata ekvivalens ha ugyanazokat a nyelveket fogadják el. $L(M_1) = L(M_2)$

(T) $\forall$ ~~...~~ NDVA-hoz $\exists$ DVA ami vele ekvivalens.

Általánosított NDVA

$N = (Q\ ;\ \Sigma\ ;\ d\ ;\ q_k\ ;\ q_v)$

Q — állapot; Σ — abc; d — állapot átmenet fv; q_k, q_v — $\in Q$ kezdeti vég állapot



$d'(q_1\ ;q_2) = ((R_1)(R_2{*})(R_3)) \cup (R_4)$

Pumpálási lemma

Minimális DVA

(D) $L \subseteq \Sigma^*$ egy nyelv $X\ Y \in \Sigma^*$ L-re nézve ekvivalensek ha

$\forall z \in \Sigma^*$ ~~erre~~ igaz hogy:

$xz \in L$ akkor és csak akkor ha $yz \in L$

jelölés: $X \simeq_{L(M)} Y$

Váraljai Péter

Digszám

19.02.19

②

(D) Két string ekvivalens egy automatára nézve ha ugyan abban az állapotba jutnak. (mindegy h elfogadó, vagy nem)

M DVA $X;Y \in \Sigma^*$ M-re nézve ekvivalensek ha

$\exists q \in Q$ hogy ~~(...)~~ ~~(...)~~ $M(X)_{állapot} = M(Y)_{állapot}$

jelölés $X \sim_M Y$

(T) M DVA $\forall X;Y \in \Sigma^*$ esetén

$$X \sim_M Y \Rightarrow X \approx_{L(M)} Y$$

(nyelv szerint ekvivalens)

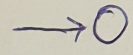
00101

101~~00~~

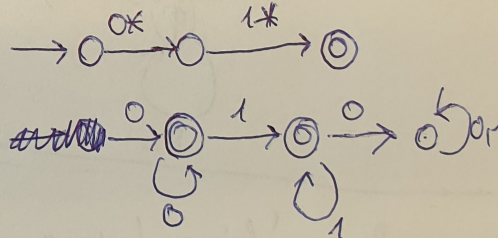
$K_1 \subseteq L_1 \quad K_2 \subseteq L_2 \mid K_1 K_2 \subseteq L_1 L_2$ ✓

$K_1 \subseteq K_2 \mid K_1^* \subseteq K_2^*$ ✓

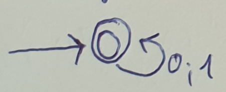
1, üres nyelv; $\Sigma = \{0;1\}$; DVA



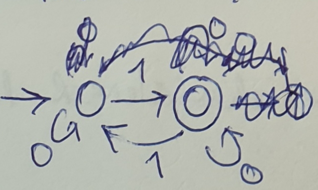
3, $L = (0^n 1^m)$ $n;m \geq 0$



2, $\forall$ string



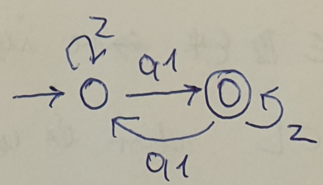
4, Páratlan sok 1-es van benne.



5, $\Sigma = \{0;1;2\}$;

$L = \{w = \{0;1;2\} \mid |w|_0 + |w|_1 = 2k+1\}$

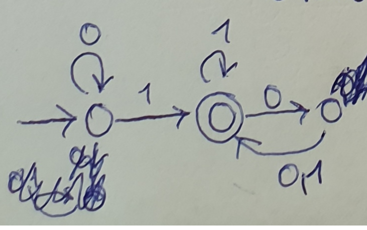
páratlan



6, $\Sigma = \{0;1\}$; $|w|_1 \geq 1$

és az utolsó 1 után

páros $|w|_0 = 2k$



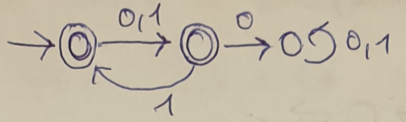
Váraljai Péter

Dig Szám

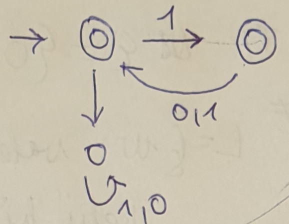
19.02.19

(3)

6, $\Sigma = \{1, 0\}$ Minden páratlanodik bit 1-es.



(0-ától számozva)



(1-től számozva)

$(0 \cup 1)^* 01$ – 01-re végződő szavak

$1^* 0 1^*$

$(11)^*$ – páros 1-es

Reguláris kifejezéssel adjuk meg

1, $L = \{ w \mid w\ \exists \geq 1$ db 1-es$\}$

$0^* 1 (0 \cup 1)^*$

2, w páros hosszú

$((0 \cup 1)(0 \cup 1))^*$

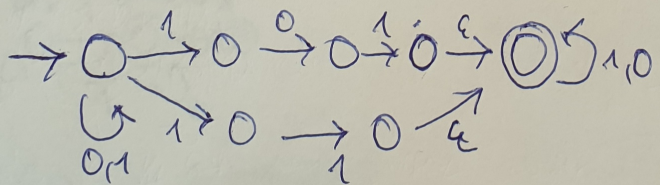
3, $L = \{ w :$ ugyanazzal kezdődik mint végződik$\}$

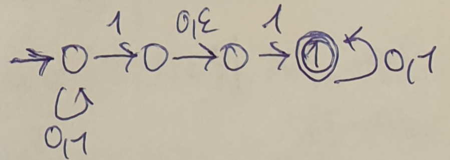
$\cancel{(1^* (1 \cup 0) 1^*) \cup (0^*}$

$(1 (1 \cup 0)^* 1) \cup (0 (1 \cup 0)^* 0) \cup 0 \cup 1$

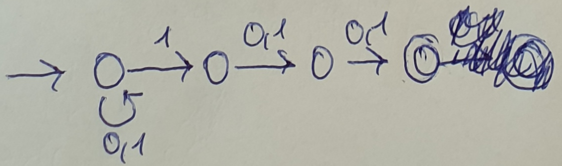
4, $L = \{ w :$ tartalmazza 101-et vagy 11-et$\}$

$(1 \cup 0)^* ((101) \cup (11)) (1 \cup 0)^*$





5, Hátulról a 3. 1-es

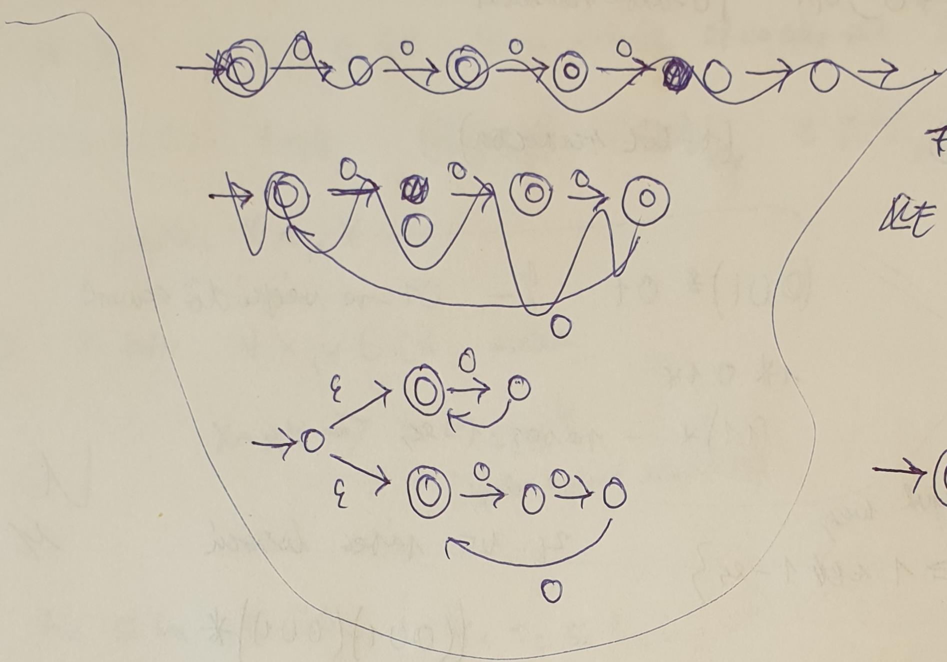


Váraljai Péter Dig Szám

19.02.19

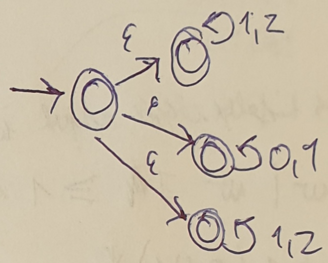
④

1 6) $\Sigma = \{0\}$ $L = \{w = 0^k : 2|k \text{ vagy } 3|k\}$



7) $\Sigma = \{0,1,2\}$

$L = \{w:$ valamelyik betű hiányzik$\}$



Várallyai Péter

Dig Szám

19.02.26.

①

(D) $L \subseteq \Sigma^*$ $x; y \in \Sigma^*$ L-re nézve ekvivalens ha

$\exists z$ ~~…~~ Σ^* amire igaz hogy

xz és yz is része a nyelvnek. $x \simeq_L y$

(D)

M DVA $x; y \in \Sigma^*$ M-re nézve ekvivalens ha

$\exists q \in Q$ hogy $M_q(x) = M_q(y)$ $x \sim_M y$

ugyanabba az állapotba viszi
/mind1 hogy elfogadó-e/

Reguláris-e?

$A = \{1^n \mid n \geq 0\}$ reguláris

$B = \{1^n \mid n \text{ prím}\}$ nem reguláris

$C = \{w \mid$ azonos számú 0 és 1 w-ben$\}$ nem reguláris

$D = \{w \mid$ azonos számú 01 és 10 w-ben$\}$ reguláris

(T) Pumpáló lemma

$L \subseteq \Sigma^*$ akkor $\exists p \in \mathbb{N}$ szám hogy $\forall s \in L$ esetén ha $|s| \geq p$

s hossza legalább p akkor s felbontható $s = xyz$ alakba

ahol:

1, $xy^n z \in L$ minden $n \geq 0$.

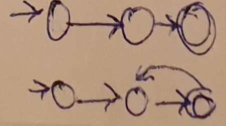
2, $|y| > 0$

3, $|xy| \leq p$

$\overbrace{\underbrace{x \mid y}_{\leq p} \mid z}^{\geq p}$

lehet pumpálni

N csúcs N-1 él



N csúcs $\geq$N-1 él: kör

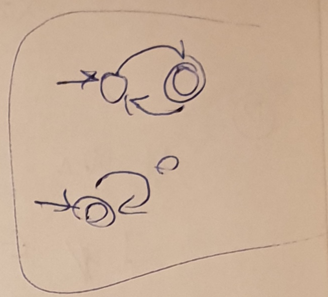
Ha reg $\Rightarrow$ pumpálható $\forall s \in \Sigma^*$

Váraljai Péter

Ha $\exists s \in \Sigma^*$ ami nem pumpálható akkor az L nyelv nem reguláris.

$C = \{ w \mid$ azonos számú 0 és 1-es a w-ben $\}$

TFH C reguláris; p pumpálási konstans



$|0^p 1^p| = 2p$

$\overbrace{00\ldots0}^{p}\overbrace{11\ldots1}^{p}$

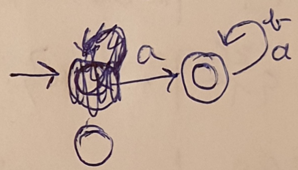
$|XY|$ valahol ide esik

1, $xy^n z \in L$

2, $|y| \geq 0$

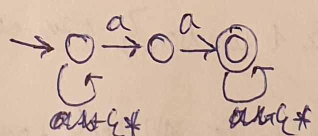
3, $|xy| \leq p$

$L = \{ w \in \{a; b\}^* : w$ a-val kezdődik $\}$: $a(a \cup b)^*$



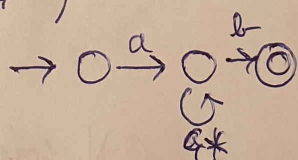
$L = \{ w \mid w$-ben $\exists\, aa \}$

$\Sigma^* aa \Sigma^*$



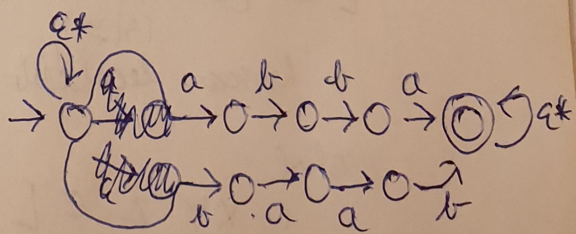
$L = \{ w \mid$ a-val kezd; b-vel végez $\}$

$a \Sigma^* b$



$L = \{ w \mid$ abba-t vagy baab-t $\}$

$\Sigma^* ((abba) \cup (baab)) \Sigma^*$



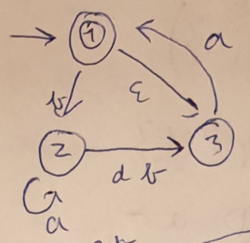
Váraljai Péter

Dig Szám

19.02.26.

3

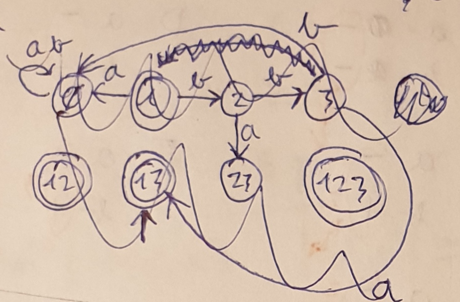
NVA → DVA

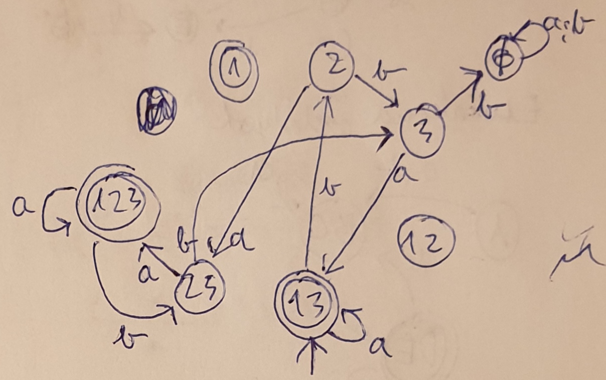


állapotok: {∅; {1}; {2}; {3}; {1;2}; {1;3}; {2;3}; {1;2;3}}

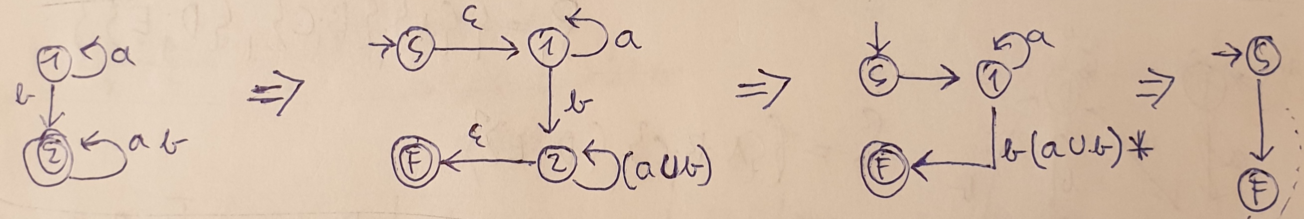
elfogadó állapot: {{1}; {1;2}; {1;3}; {1;2;3}}

kezdő: {{1;3}}

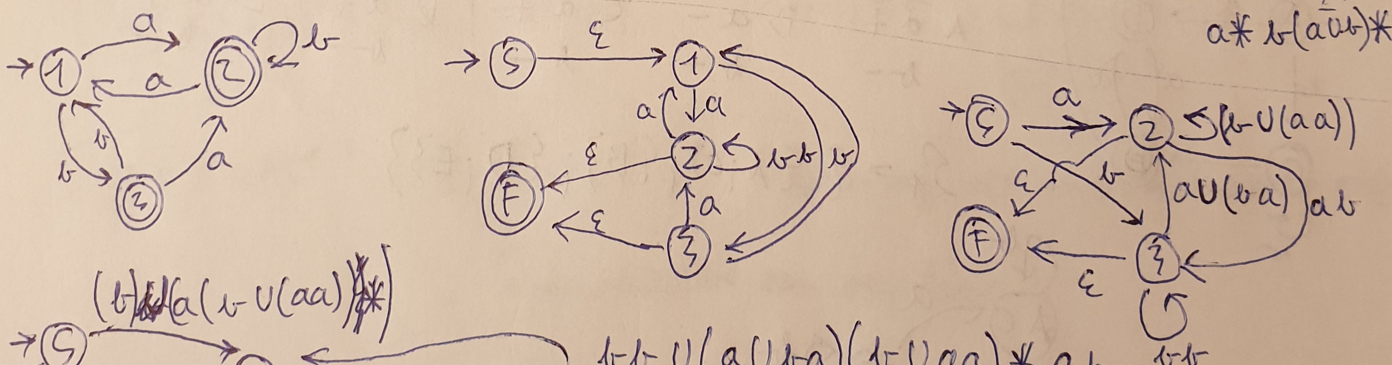


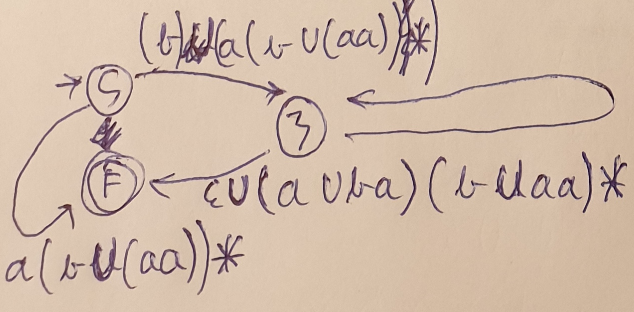


Reg kif ⇄ NVA

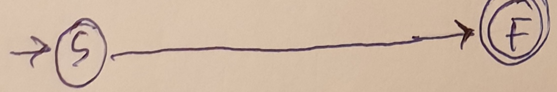


$a^* b(a \cup b)^*$





$bb \cup (a \cup ba)(b \cup aa)^* ab$



...

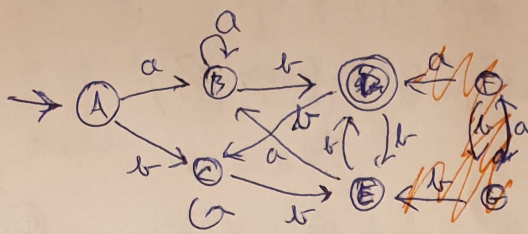
Váraljai Péter Digy Szám

19.02.26.

(4)

DVA

Töröljük a kezdő állapotból nem elérhető állapotokat



$\rho_0 = (\{A;B;C\}\{D;E\})$

$\{A;B;C\}$ $\{D;E\}$

A a − b − 1

B a − b + 2

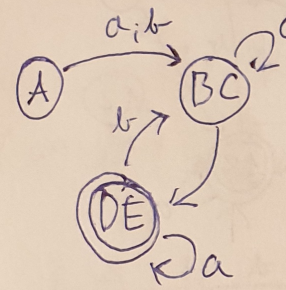
C a − b + 2

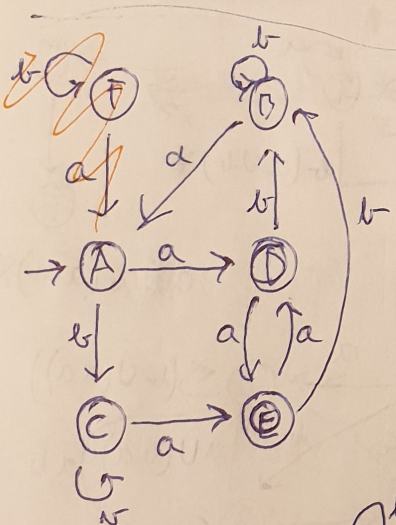
D a − b + 3

E a − b + 3

$\rho_1 = \{\{A\};\{B;C\};\{D;E\}\}$

Ekvivalencia osztályok

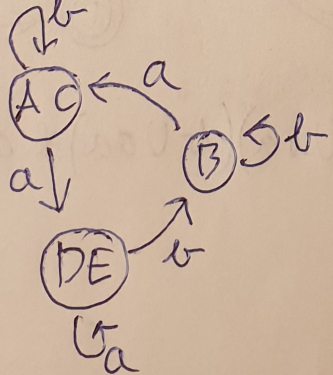




$\rho_0 = \{\{A;B;C\};\{D;E\}\}$

A a + b − B a − b − C a + b − | D a + b − E a + b −

$\rho_1 = \{\{A;C\};\{B\};\{D;E\}\}$



Váraljai Péter

Digszám

19.02.26

Pumpálás

L reg $\Rightarrow \exists\, p(L)$ hogy

$\forall\, w \in L$ amelyre igaz hogy $|w| \geq p$ pumpálható

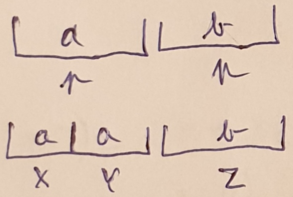
akkor $w = xyz$

1) $xy^n z \in L \quad \forall n \geq 0$

2) $|y| \geq 0$

3) $|xy| \leq p$

$\{a^n b^m \mid n \leq m\}$ $\quad |a^p b^p| \geq p$



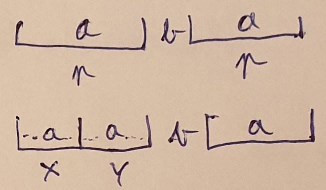
$y \rightarrow$ pumpálás

$\rightarrow$ több a mint b

$\rightarrow \notin$ nyelv

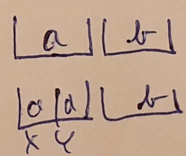
$\{a^n b a^n\}$?

$|a^p b a^p| = 2p+1 \geq p$



$y \rightarrow$ pumpálása $\rightarrow$ nem nyelvbeli szó

$\{w \in \{a;b\}^* \mid |w|_a = |w|_b\}$ $\quad |a^p b^p| \geq p$



$\{w \in \{a;b\}^* \mid |w|_a \neq |w|_b\}$ $\quad$ nyelv reg $\Rightarrow$ komplementer nyelv reg

$\downarrow$

a komplementere nem reguláris

Váraljai Péter

DigSzám
19.03.05
①

Mondat nyelvtan

$\{0^i 1^i \mid i>0\}$ – nem reguláris de leírható így:

Generatív grammatika

$S \to 0S1$ (D) $G=(V; \Sigma; R; S)$

$S \to 01$

nem terminálisok, terminálisok

$L(G) \to$ a G által generált nyelv

Rekurzív grammatika ⇏ Nem rekurzív grammatika
↳ véges nyelv

Contex Free grammatikák

$S \to SS \to aSbS \to aSbaSb$

1, $G(\{S\}; \{a;b\}; R; S)$

$R = \{S \to aSb \mid SS \mid \varepsilon\}$

baba ✗ bab ✗ abab ✓
aba ✗ abba ✗ aaabbb ✓
aababb ✓ ← aababb ✓

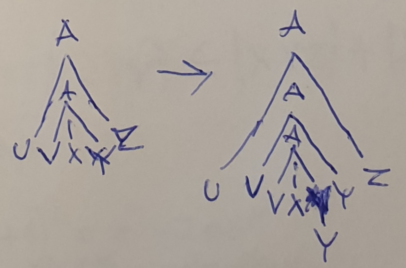
$S \to aSb \to aSSb \to aaSbaSbb$

/helyes zárójelezés nyelve/

(T)
∀ reguláris nyelv
környezet független

Levezetési fa. (D) Egyértelmű CF: ∀ szóhoz ∃! levezetési fa létezik

CNF – Chomsky-féle Normál Forma
↓
pumpáló lemma



1, $uv^n x y^n z \in L \quad \forall n \ge 0$

2, $|vy| > 0$

3, $|u\cancel{w}y| \le p$

~~(|UXY| volt a dián?)~~

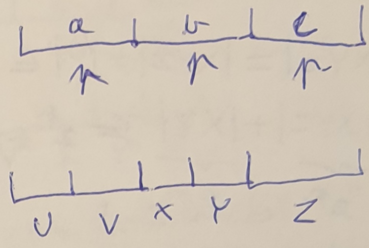
Váraljai Péter

Digitális
11.03.09.
2

Nem CF

$L = \{ a^n b^n c^n \mid 0 \le n \}$

TFH L-hez a pumpáló konstans p



felbomlik az egyoldalúság

1, ha V "a" és "b" is tartalmaz megszerzésödne "abab"

2, ha Y "b" és "c" is tartalmaz megszerzésödne

L reg $\Rightarrow \exists p = p(L)$

hogy $\forall w \in L$ amelyre igaz hogy

$|w| \ge p$ $\quad w = XY^nZ$ pumpálható

1, $XY^nZ \in L \quad \forall n \ge 0$

2, $|Y| \ge 1 > 0$

3, $|XY| \le p$

L CNF $\Rightarrow \exists p = p(L)$ hogy

$\forall w \in L$ amelyre igaz hogy

$|w| \ge p$ $\quad w = \cancel{XY} \, UV^nXY^nZ$ ~~~~ pumpálható

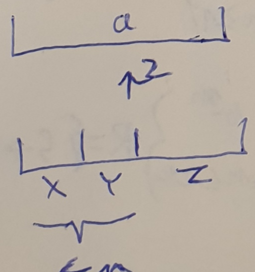
1, $UV^nXY^nZ \in L \quad \forall n \ge 0$

2, $|VY| > 0 \ge 1$

3, ~~$|XY| \le p$~~
$|VXY| \le p$

$L = \{ w : \cancel{aa} \, a^{n^2} \}$ REG? CNF?

p pumpáló konstans



$XY^2Z = |\underbrace{XYZ}_{p^2}| + |Y| \le |XYZ| + |XY| \le p^2 + p$

$p^2 + p < (p+1)^2 = p^2 + 2p + 1$
$\Rightarrow$ kövi négyzetszám
$\Downarrow$
nem négyzetszám $\rightarrow$ két négyzetszám közé

esik $\Rightarrow \emptyset$ benne a nyelvben

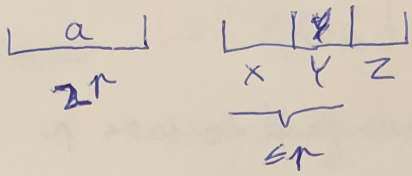
Váraljai Réka   Diósi Ádám

19.03.06.

3

$L = \{ w = a^{2^n} \}$ reg?

↑ pump bizonyítás

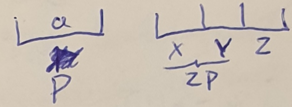


$|xy^2z| = |xyz| + |y| \le$

$\le \underbrace{|xyz|}_{2^n} + \underbrace{|xy|}_{\le n} \le 2^n + n < 2^{n+1}$

$L = \{ w = a^n \mid n \text{ prím} \}$

$p \ge n$



$|xy^{p+1}z| = |xyz| + p|y| = (|y|+1)p$

$G_1 = (\{S\}; \{a; b\}; \{S \to aSa \mid bSb \mid \varepsilon\}; S)$

$\Rightarrow w = w^T$ $|w|$ páros

$G_2 = (\{S\}; \{a; b\}; \{S \to aSa \mid bSb \mid a \mid b\}; S)$

$\Rightarrow w = w^T$ $|w|$ páratlan

$G_3 = (\{S\}; \{a; b\}; \{S \to aS \mid Sb \mid a\}; S)$

$a^n b^m$ $n \ge 1$ $m \ge 0$

$G_4 = (\{S\}; \{a; b\}; \{S \to aSa \mid bb \mid \varepsilon\}; S)$

$a^n (bb)^m a^n$ $n \ge 0$ $bb = \{0; 1\}$

$\{a^n bb a^n\}$ vagy $\{a^{2n}\}$

$G_5 = (\dots \{S \to aS \mid Sb \mid a \mid SS\}; S)$

összes a-val kezdődő szó

$a(a \cup b)^*$

$\{a^n b^n \mid n \ge 1\}$ $R = \{S \to aSb \mid ab\}$

$\{a^n b^n \mid n \ge 0\}$ $R = \{S \to aSb \mid \varepsilon\}$

$\{a^n b^m \mid n \le m \le 2n\}$ $R = \{S \to aSb \mid \varepsilon \mid aaSb\}$

$\{a^n b^m \mid n \le m\}$ $R = \{S \to aSb \mid Sb \mid \varepsilon\}$

Váraljai Péter

Dúl Ádám
19.02.08.
4

$w = UV^nXY^nZ$

1, $UV^nXY^nZ \in L \quad \forall n \geq 0$

2, $|VY| \geq 1$

3, $|UY| \leq P$

$L = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$

| a | b | c |
n n n

| | | | | |
U V^n X Y^n Z

mivel csak 1 karaktert tartalmaznak ezért az "a" "b" "c" aránya felborulna pumpálásban ⇒ kiléptünk a nyelvből

1, V - nem tartalmazhat "a" és "b" és "c" karaktert is mert felcserélődne "b" és "a" és "c"

2, Y -"- -"-

$L = \{a^n b^m a^n\} \; n \geq m\}$

| a | b | a |
n n n

- ha "a" - végre esik a pumpálás kiesik mert nem egyező a két "a" oldal
- ha "b" - végre esik a pumpálás több "b" lesz ⇒ kiesik
- ha "ab" pumpál akkor felcserélődik ⇒ kiesik

Váralljai Péter

Dig Szám
19.03.12
(1)

context free | környezet független

Pumpálás CF: $\exists P$ hogy $\forall w \in L$ pumpálható ha $|w| > p$

1, $uv^n x y^n z \in L \quad \forall n \geq 0$

2, $|vy| \geq 1$

3, $|vxy| \leq p$

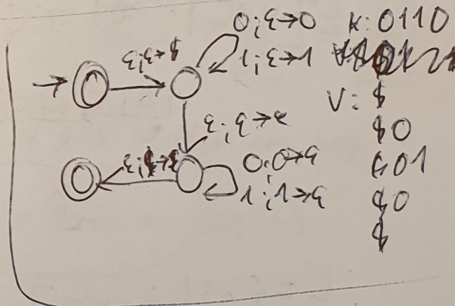
Chomsky-féle nyelvosztályok:

	nyelv	szabályok	felismerő autó
3,	reguláris	$A \to a \quad A \to aB$	DVA; NVA
2,	CF	$A \to \alpha$	Verem automaták
1,		$\beta A \gamma \to \beta \alpha \gamma$	
0,		tetszőleges alakú szabályok	

Verem automaták

$M = (Q; \Sigma; T; \delta; q_0; F)$

véges állapot[] ; véges ABC ; verem véges ABC ; átmeneti fv ; kezdő ; vég állapot



(T) $\forall$ L CF nyelvhez $\exists$ őt felismerő Verem automata.

(T) $\forall$ Verem automatához $\exists$ olyan CF grammatika amely vele ekvivalens.

zárt: reguláris operátorokra

Műveletek CF nyelven: ~~...~~

L nem zárt: metszetre; komplementerre → de morgan

$A_1 = \{a^n b^n c^m \mid n,m \geq 0\} \quad A_1 \cap B_1 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$ X

$A_2 = \{a^m b^n c^n \mid n,m \geq 0\}$

$\Downarrow$ $A_1 \cap A_2$

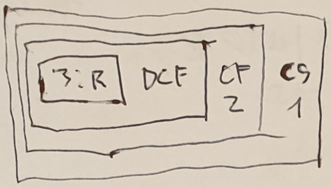
(T) B_1 CF és B_2 reg

$\Rightarrow B_1 \cap B_2$ CF

(T) Determinisztikus CF (DCF)

szűkebb mint a CF nyelv osztálya

Váralljai Réka



Diszkrét matek

19.09.12. 2

Turing gép

- idealizált számítógép
- ∀ algoritmikusan megoldható feladatot megold
- Nem tud mindent megoldani

$L = \{a^i b^i c^j \mid j \geq i\}$ $\notin CF$

$|a|b|c|$ n n n

$u\ v\ x\ y\ z$

$\Rightarrow$ lepumpálják $j < i$

$L = \{a^{i^2} \mid i \geq 0\}$ $\overset{?}{\in} CF$

$|a|a|a|a|a|$ $u\ v\ x\ y\ z$, n^2

$$|uv^2xy^2z| = |uvxyz| + |vy| \leq n^2 + n < (n+1)^2$$

$|uvxyz| = n^2$, $|vy| \leq |vxy| \leq n$, $(n+1)^2 = n^2+2n+1$

$L = \{a^{2^i} \mid i \geq 0\}$ $\overset{?}{\in} CF$

$|a|a|a|a|a|a|$ $u\ v\ x\ y\ z$, 2^n

$$|uv^2xy^2z| = |uvxyz| + |vy| \leq 2^n + n < 2^{(n+1)}$$

$|uvxyz| = 2^n$, $|vy| \leq |vxy| \leq n$, $2^{(n+1)} = 2 \cdot 2^n$

$L = \{a^i \mid i \text{ prím}\}$

$|a|$ n'

$n' > n$, n' prím

$|a|a|a|a|a|$ $u\ v\ x\ y\ z$

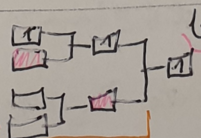
$$|uv^{n'+1}xy^{n'+1}z| = |uvxyz| + |vy| \cdot n' = (1+|vy|) \cdot n'$$

$|vy| \leq |vxy| \leq n$ — nem prím

Olimpia n-db résztvevő
nivás: n-1 meccs kell hogy kiválasszuk
a bajnokot: mert n csúcsú gráfban n-1 él kell
hogy összefüggő legyen.

Olimpia 1. 2. helyezett: 2n-3 összesen?

jobb:



Csak azokat kell megvárni
akikkel az 1. helyezett játszott

Váraljai Péter

Digráfm

19.09.12.

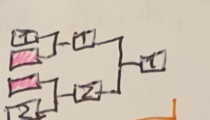
(3)

Olimpia n játékos

min és max?

2n-3 lépésből eredményből vesztes

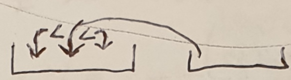
jobb: párba állítás



az elsőnek vesztes

mindenkit elsőnek esik ki: $\log_2(n)+n$

Olimpia sorba rendezés:



k n-k

$\log_2(n)$

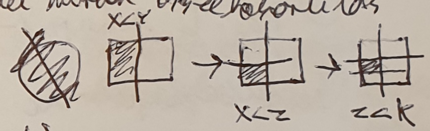
$\forall$ elemet $< \log_2(n)$ lépésben be tudjuk szúrni

$\log_2(n)\cdot n$

sorrendek száma: $n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{2\pi n}$

$\approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \approx \frac{2^{n\log(n)}}{e} \approx 2^{n\log(n)}$

sorrendet minden összehasonlítás felezi



$\frac{2^{n\log(n)}}{k} \le 1$ - akkor van meg

$\Rightarrow k \ge n\cdot\log(n)$

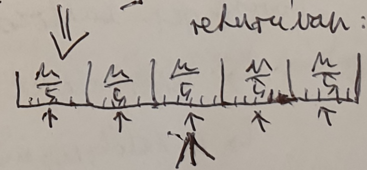
Olimpia középső? (medián)

$n\cdot\log_2(n) \rightarrow$ sorba majd középső

jobb: $\underbrace{T(n)}_{\text{feladat lépés száma}} = \underbrace{aT\left(\frac{n}{c}\right)}_{\text{a darabolt feladat}} + \underbrace{bn}_{\text{munka (tördelés)}}$

- ha $a<c$ akkor $T(n)=O(n)$
- ha $a=c$ akkor $T(n)=O(n\cdot\log(n))$
- ha $a>c$ akkor $T(n)=\Theta(n^{\log_c(a)})$

[lineáris] rekurzívan:



Váraljai Péter

Digráin
19.03.19.
1

Turing gép

$M = (Q; \Sigma; \Gamma; d; q_0; q_{...})$ – megáll – elfogadó
– ∉ elfogadó
– nem áll meg

D Def
Egy L nyelv turing felismerhető ha ∃ M turing gép hogy $L(M) = L$
(megáll és elfogadja) (elfogadó)

D Egy L nyelv |Turing eldönthető| ha ∃ M turing gép amely
rekurzív
$\forall s \in \Sigma^*$ szóra megáll, és $L(M) = L$
(elfogadó)

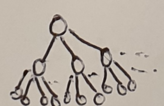
T Ha L rekurzív $\overline{L}$ is az.
B felcseréljük az efogadó és elutasító állapotokat

$P \overset{?}{=} NP$ probléma : H (determinisztikus Turing gép) $\overset{?}{=} H$ (nem det Turing gép)

$H() =$ hatékonyság

Turing gép változatok
↳ ugyan annyit tudnak
↳ a hatékonyság más

helyben maradó fej $\overrightarrow{JB}$
nem determinisztikus
több szalag : [sz1] # [sz2] # [sz3]
2D szalag
több fej
RAM

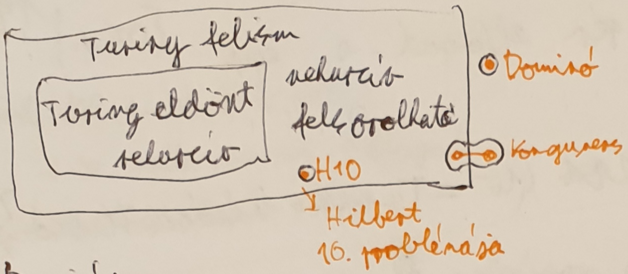
– Nem det leírható fával: 
– Szélténen szimulálva determinisztikus turing gépet kapunk

T Ami algoritmikusan kiszámítható / eldönthető azt turing géppel is. ⟺ rekurzív

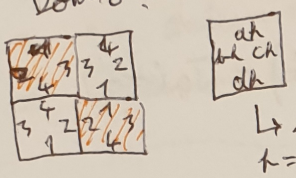
T Egy $A: \Sigma^* \to \Sigma^*$ fv algoritmikusan kiszámítható

Váraljai Péter

DigSzám
19.03.19.
2



Dominó:



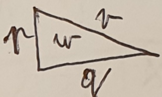
L_t val kirakható-e a sík?
t = konstans

Nyelv: azon szavak ahol t = konstanssal kirakható-e a sík
Bizonyítottan nem T felism.

~~Kong~~ Nyelv: $\{ w \mid w \text{ kongruens szám} \}$

$5: \frac{3}{2}, \frac{20}{3}, \frac{41}{6}$

$p^2 + q^2 = r^2 \qquad pq = 2w$



$6: 3, 4, 5$

Nem tudják (jelenleg) hogy ~~...~~ rek felsor / ~~...~~ eldöntse.

Univerzális Turing gép

Bekap egy Turing gépet és megállapítja hogy meg tudja oldani ~~...~~ és elfogadja / elutasítja / végtelen ciklus.

A diagonális nyelv: T gép ~~kódját~~ ami elutasítja a saját kódját

$$L_d = \{ w \mid \text{és } w \neq L_{M_w} \mid M_w \text{ létezik} \}$$

(T) L_d nem felsorolható nyelv.

(B) TFH L_d felsor az az NTG mely L_d szavait ism fel $L_d = L_N$
Azaz N felismeri w-t ha w egy olyan M_w TG-t kódol amely nem fogadja el a saját kódját.

N felismeri-e a saját kódját? N kódja: s

Igen? $s \notin L_d$, ↯
Nem? $s \in L_d$ ↯

Várvalgyai Péter

Beégetés(?)
19. 03. 19.
3

K Eldönthető-e hogy egy gép elfogad-e egy adott szót?

D Univerzális nyelv: ~~[illegible]~~ {w = Tg ~~[illegible]~~ leírása # szó}

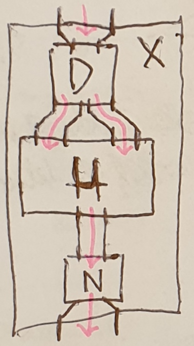
Eldönthető-e hogy az univerzális nyelv egy szava eldönthető-e?

$T_{G_U}(T_G ; szó) = T_G(szó)$

T Nem rekurzív: 3 1, $T_{GU}(\cancel{T_G}\ Negál(T_G) ; szó) = Negál(T_G(szó))$

2, $T_{GU}(Negál(T_G) ; Negál(T_G)) =$ ↯

(Negálási problémával



X: A fentebbi gép

ha X-nek a saját kódját adjuk be; végtelen ciklusba kerül vagy IGAZ-lesz?

D: duplikátor; kap egy szót és megduplázza kiadja 2 outputján

H: ~~[illegible]~~ Halting ~~Univerzális~~ az első inputján kapott TG-ről megállapítja hogy a második inputján kapott ~~[illegible]~~ ~~ad~~ szóra áll-e választ (IGAZ) vagy végtelen ciklusba kerül. (HAMIS)

N: Ha ~~[illegible]~~ IGAZ a kimenet akkor végtelen ciklusba kerül; ha hamis akkor kiírja hogy IGAZ

- $\boxed{\text{IGAZ}}$ ~~[illegible]~~ → akkor a H ~~[illegible]~~ IGAZ-at ír → N végtelen ciklus → X $\boxed{\text{végtelen c.}}$ ↯
- $\boxed{\text{Végtelen c.}}$ → akkor H ~~hamis~~ HAMIS-t ír → N IGAZ → X $\boxed{\text{IGAZ}}$ ↯

$L_D \notin RE$ $\quad L_U \notin R$, $\in RE$ $\quad L_H \notin R$, $\in RE$

Váraljai Péter ~ ~ Dig Szám

19.03.26.

1

$L = \{ 0^{2^n} \mid n \geq 0 \}$

1, írjuk fel 1-el ∀ 2. nullát.

2, Ha 1 db nulla marad Elfogad

3, egyébként elutasít.

NP = nem determinisztikus polinom időben megoldható problémák

P = determinisztikus polinom időben megoldható problémák

Algoritmus: véges sok lépéssel kiszámít egy fv-t.

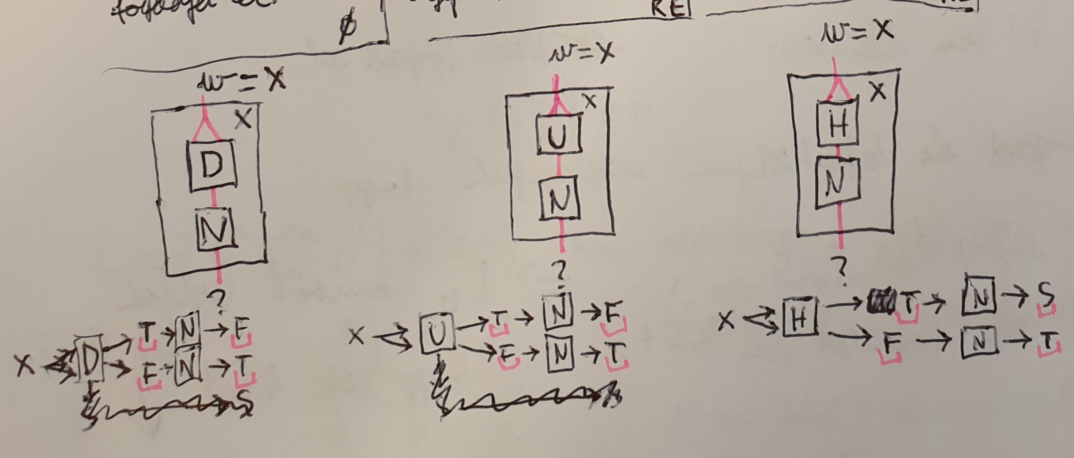
∀ algoritmussal megoldható probléma megoldható turing géppel.

Univerzális Turing gép: programozható turing gép.

Bemenet: U(turing gép) + bemenet)

Kimenet: U(...) = turing gép(bemenet)

Diagonális nyelv L_D	Univerzális nyelv L_U	Halting probléma L_H
Saját kódját nem fogadja el. ∅	M gép elfogad-e egy s stringet? RE	M gép megáll-e egy s stringre? RE



TRUE

FALSE

STUCK

Váraljai Péter

DigSzám

19.05.26.

2

szimmetrikus metszet

$L(A) = L(B) \iff L(A) \Delta L(B) = (L(A) \setminus L(B)) \cup (L(B) \setminus L(A))$

Egyszer eldönthető-e hogy két automata ugyan azt a nyelvet fogadja-e el?

Igen: vesszük A és B automata minimál ~~gráf~~ gráfját; ha azonos U.A.

CFG generál-e egy s stringet?

Igen: Verem automatát szimuláljuk és szélteben kereséssel megnézzük h elfogadja-e?

Igen: |s| hosszú szavakat legeneráljuk; ha köztük van s igen.
(véges sok)

$L_U < L_H$ TFH $\exists$ H ~~olyan~~ turing gép amely eldönti L_H-t.

Bemenet: M' Tg s string

Kérdés: ~~[illegible]~~ Megáll-e M' s stringre?

↳ ~~[illegible]~~ M' megáll → Elfogad *

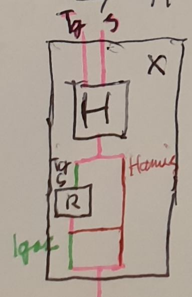
↳ M' nem áll meg → Nem fogad el

* Ha elfogad és lefuttatjuk megkapjuk hogy

↳ M' elfogadja s-t

↳ M' nem fogadja el s-t.

$\Rightarrow L_U$ amiről tudjuk hogy nem lehet ↯



X ~~[illegible]~~ $\leftrightarrow$ L_U ~~[illegible]~~

Váraljai Péter

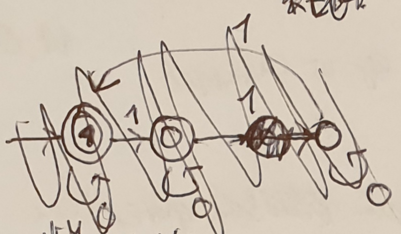
Dig Szám

19.04.02.

1

1,

~~REG~~

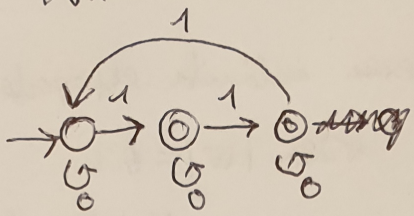


DVA:

1-esek NEM oszthatók 3-al.

REG:

DVA:



REG:

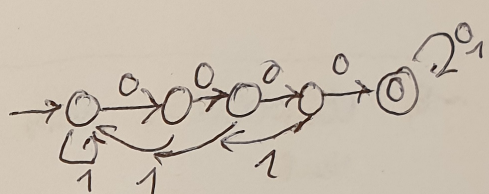
~~(0*10*)1(0*)~~ $0^*(10^*10^*10^*)^*(10^* \cup 10^*10^*)$

2, GG: $\{w \in \{0;1\}^* \mid$ w páratlan hosszú$\}$

$S \to 1$

$S \to 0$

$S \to SSS$



3, w-ben van "0000":

REG: $(0 \cup 1)^* 0000 (0 \cup 1)^*$

4, Pumpálási lemma:

$L \subseteq \Sigma^*$ $\exists p \in N$ hogy $\forall s \in L$ esetén ha

$|s| \geq p$ akkor pumpálható azaz s felírható $s = XYZ$ alakba

ahol: 1, $XY^nZ \in L$ $\forall n \geq 0$

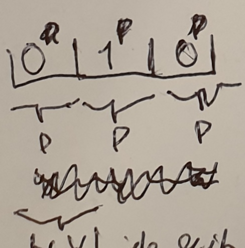
2, $|Y| > 0$

3, $|XY| \leq p$

$L = \{0^n 1^n 0^n \mid n \geq 0\}$ nem reguláris:

~~(nem tartalmaz 01-et mert ... 0101)~~

TFH $\exists p$



Y nem lehet 1-es mert $|XY| \leq 1$

ha pumpáljuk kiesik a nyelvből mert több 0-lesz előtte

Vdovaljai Péter

DigSzám

19.04.02

(2)

T, ~~...~~ ~~...~~ P veremautomata elfogadja-e egy w stringet

$A \to BC$

$A \to a$

$S \to \varepsilon$

~~...~~ $|w| = n$

2n lépésben le tudjuk ~~...~~ generálni

=> összes nem terminális ~~...~~ (n lépés)

(n lépés)

=> összes terminális

=> Ha között van w $\xrightarrow{I}$ elfogad

$\xrightarrow{H}$ nem fogad el

~T, Eldönthető-e hogy két TG U.A. fogadja-e el?

Nem.

- Csinálok 1 turing gépet ami az üres nyelvet fogadja el. [T1]
- Beadok egy Turing gépet (T3) ~~...~~ ~~...~~ ~~...~~ a T_2-nek.
- Ha T_2 el tudja dönteni hogy $T_1 == T_3$-al akkor T_2 el tudja dönteni az üres nyelvet is! ↯

L üres

Várdaljai Péter

Dig Szám

19.04.30.

1

$2n \stackrel{?}{=} O(n)$: $\boxed{\text{I}}$gaz

$n^2 \stackrel{?}{=} O(n)$: $\boxed{\text{H}}$amis

$n^2 \stackrel{?}{=} O(\log^2(n)\cdot n)$: H

$n\log(n) \stackrel{?}{=} O(n^2)$: I

$3^n \stackrel{?}{=} 2^{O(n)}$: I

$n \stackrel{?}{=} o(2n)$: H

$2n \stackrel{?}{=} o(n^2)$: I

$2^n \stackrel{?}{=} o(3^n)$: I $\quad \frac{2^n}{3^n} \to 0$

$1 \stackrel{?}{=} o(n)$: I

$n \stackrel{?}{=} o(\log(n))$: H

$1 \stackrel{?}{=} o(\frac{1}{n})$: H

$a_n = O(b_n)$ ha

$\exists c\ \forall n \geq n_0\ a_n \leq b_n \cdot c$

$a_n = o(b_n)$ ha

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \to 0$.

$\varphi_0 = (x \vee y) \wedge (x \vee \bar{y}) \wedge (\bar{x} \vee y) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y})$?

KONTRADIKCIÓ

- Van-e háromszög egy gráfban?
  Igen: kiválasztunk ∀3 pontot és megvizsgáljuk.
- Összefüggő-e egy gráf?
  ∀x pontra megvizsgáljuk hogy ∀ ponttal össze van-e kötve.
- Izomorf-e két gráf?
  NP tanú: $V \to V'$ képző izomorfizmus

DUBLESAT = {φ | φ-nek legalább 2 kielégítése van}

NP teljes

1, NP-ben van: tanú: behelyettesítés

2, NP teljes $\quad SAT \leq_p DUBLESAT$

$\varphi' = \varphi \wedge (x \vee \bar{x})$ (x nincs benne φ-ben)

φ-nek pont akkor van megoldása ha φ'-nek van legalább 2 megoldása

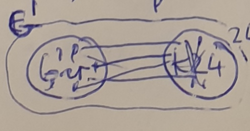
$(a \wedge (b \vee \bar{b})) =$

1	0	=1
1	1	=1

27-szín

1, NP-ben van: tanú: kiszínezett gráf ellenőrzése

2, NP teljes: $3SZÍN \leq_p 27SZÍN$



Ha G' kiszínezhető 27-színnel akkor G kiszínezhető 3 színnel.

Hamilton út NP-teljes

Váraljai Péter

DigGráf

19.09.07.

1

1/ G-ben ∃? $\leq k$ hosszú út "a"-ból "b"-be

P-beli: $A_0 \exists () ()()$ $A_1\ A_2\ A_k$ /szélességi keresés/

2/ G-ben ∃? $\geq k$ hosszú út "a"-ból "b"-be GE_K_PATH$_{st}$

NP: megmutatjuk az utat.

P: -

NP-teljes: $HPATH_{st} <_p GEKPATH_{st}$

$k = n-1$

leghosszabb = Hamilton út

3 EKPATH

k hosszú út van-e G-ben?

NP: megmutatjuk az utat

P: -

NP-teljes: $HPATH <_p EKPATH$

$k = n-1 \Rightarrow$ |van / nincs| hamilton út

4/ △ a gráfban

NP: megmutatjuk a háromszöget

P: kiszedjük az összes 3 pontos részgráfot $\binom{n}{3} \leq (n^3)$ megnézzük h △-e

5/ ∃? G-ben $K_{n/2}$ ~~HALFCLIQUE~~ (K_3: △ K_4: ⊠)

NP: megmutatja ~~a~~ $K_{n/2}$ részgráfot

P: -

NP-teljes: (HALFCLIQUE)

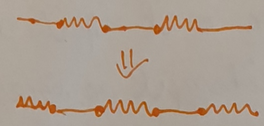
6/ $G(A;B;E)$ ∃? k élű párosítás

NP-beli: ~~van~~ megmutatja a párosítást

P: Magyar módszer

Magyar módszer:

Javító út:



+1 pár

Polinom idejű

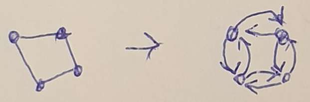
Váraljai Péter

DigSzám
19.05.07.
②

7, G gráf 3 összefüggő-e?
(kivesszük bármely 2 pontot és összefüggő marad)
NP: ~~[illegible]~~ összes gráfot amelyből kivettünk 2 pontot
P: ✓

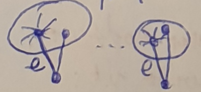
8, G gráf 3 él összefüggő-e?
(kivesszük ∀ 2 élt és összefüggő marad)
NP: összes gráft amelyből kivettünk 2 élt
P: ✓

9, $\vec{G}$ ∃? $\overrightarrow{HPATH}$
NP: megmutatjuk az utat
NP-teljes: $HPATH <_p \overrightarrow{HPATH}$



10, $HCYCLE_e$: G ∃? H kör amely tartalmazza az "e" élt?
NP: megmutatjuk
NP-teljes: $HCYCLE <_p HCYCLE_e$
lefuttatom az össze élre (n-1). (polinom idő)

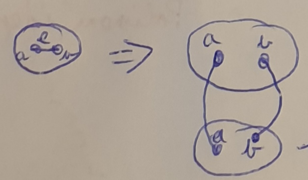
11, $HCYCLE_e <_p HCYCLE$
a, összes részgráf:



→ Van-e HCYCLE ⇒ ha van átvegyük-e-n.
ha nincs egyik se nincs

az e él egyik csúcsának elhagyjuk az összes-1 csúcsát

b,



⇒ akkor van $HCYCLE_e$ ha
itt van HCYCLE