

hudoaba.peter@inf.elte.hu

reguláris kifejezés

$aaa b \dots b$	$abc abc abc$
$\downarrow$	
rt. $aaab^*$	$(abc)^*$

$$\Sigma = \{0, 1\}$$

a, $\{s \mid s \text{ 1-gyel kezdődik és } 00\text{-ra végződik}\}$

$$1(100)^*00$$

b, legalább egy 1-et tartalmaz

$$(100)^*1(100)^* = \Sigma^*1\Sigma^*$$

c, részeszöveget tartalmazza: 0011

$$(100)^*0011(100)^*$$

d, legalább 4 hosszú

$$(001)(001)(001)(001)(001)^*$$

e, nem tartalmazza a 00 részeszt

$$(0101)^*(00\Sigma)$$

f, legfeljebb 4 hosszú

$$(0010\Sigma)(0010\Sigma)(0010\Sigma)(0010\Sigma)$$

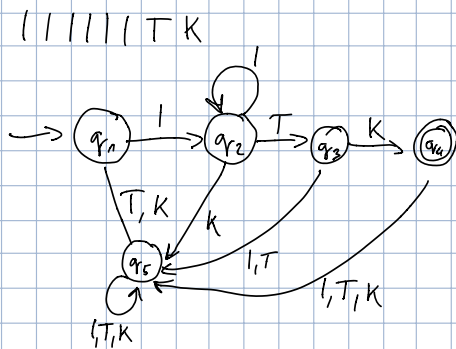
g, bármilyen, kivéve 11 vagy 111

$$(\Sigma^*001)00$$

Automaták

VDA véges determinisztikus automata

$$\Sigma = \{I, T, K\}$$



$$(Q, \Sigma, \delta, q_1, F)$$

$$F = \{q_4\}$$

$$Q = \{q_1, \dots, q_5\}$$

$$\delta: Q \times \Sigma \rightarrow Q$$

$$\delta(q_1, I) = q_2$$

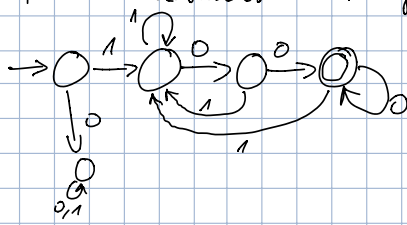
$$\delta(q_1, T) = q_5$$

$\vdots$

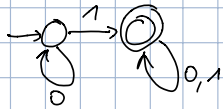
$$\delta(q_2, K) = q_5$$

$\vdots$

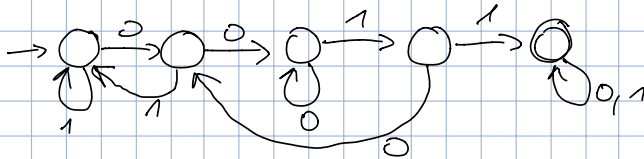
a, $\{s \mid s \text{ 1-el kezdődik és 00-ra végződik}\}$



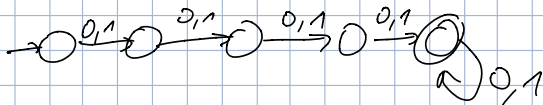
b, legalább egy 1-et tartalmaz



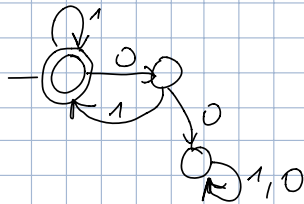
c, részszóként tartalmazza: 0011



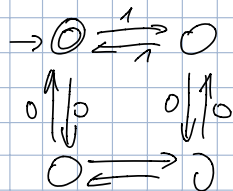
d, legalább 4 hosszú



e, nem tartalmazza a 00 részt

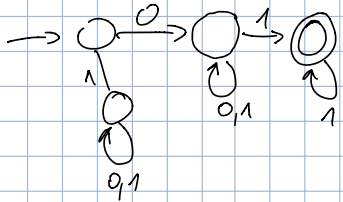


f, páros sok 1-et és páros sok 0-t tartalmaz



2/a₁

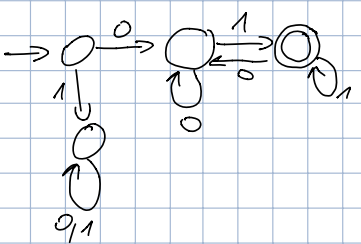
nem determinisztikus



$$0(0 \cup 1)^*(1 \cup 11)$$

2017.02.21.

determinisztikus

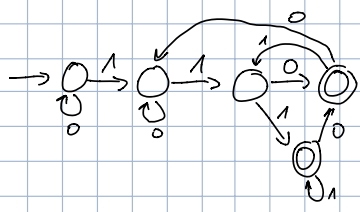


$$b, 0(0 \cup 1)^*1$$

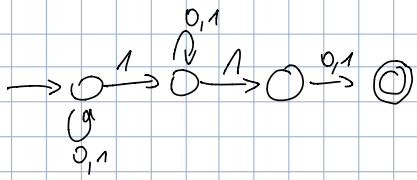
a-val ekvivalens

$$c, (0 \cup 1)^*1(0 \cup 1)^*1(0 \cup 1)$$

determinisztikus

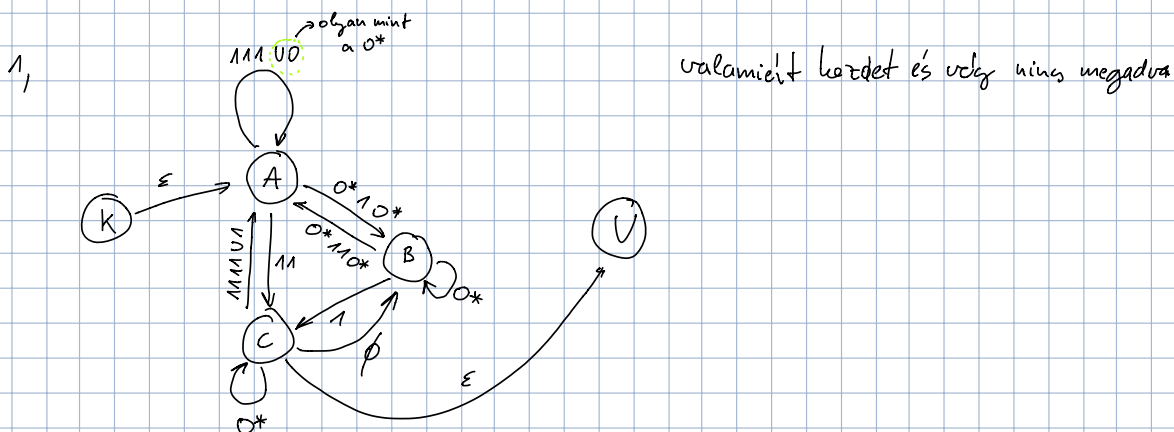


nem determinisztikus



ANVA általános nemdeterminisztikus véges automata

- éleken lehet regex
- van egy kezdés és egy végállapot
- közzététel mindenből mindenhol megy el (legfeljebb üres halmaz)



$$B: 10^*$$

$$C: 0^*10^*10^*$$

$$A: 0^*10^*10^*10^*$$

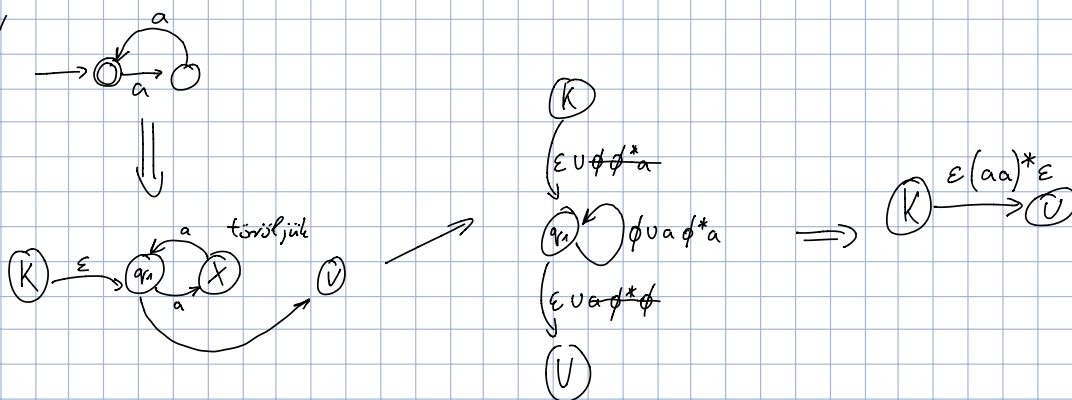
$$A: 3k$$

$$B: 3k+1$$

$$C: 3k+2$$

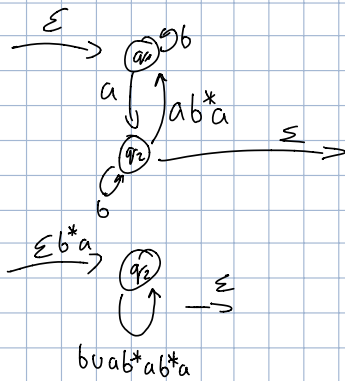
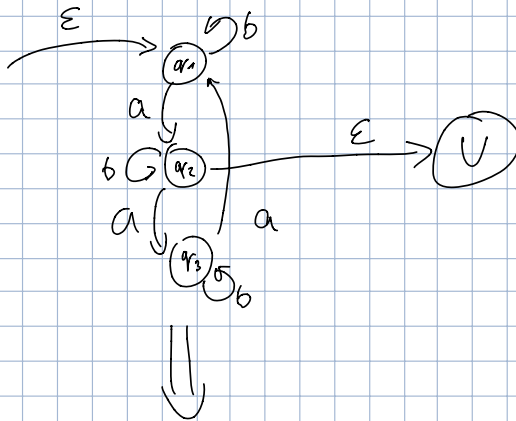
k : egész szám

2,



2/a

$\{s \in \{a,b\}^* \mid s\text{-ben az } a\text{-t szédve } 3k+1 \text{ alkal}\}$



$$\begin{aligned} &\xrightarrow{\hspace{1cm}} \\ &\varepsilon b^* a \cup b^* \cup a b^* a b^* a \\ &b^* a (b^* a b^* a b^*)^* \end{aligned}$$

ekvivalencia osztályok

pl: $(aa)^*$ nyelv

ekvivalens - e

$a \stackrel{?}{\sim} \varepsilon$

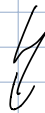
$x \approx_L y$ ha

$\forall z \in \Sigma^* \quad xz \in L \Leftrightarrow yz \in L$

$z = \varepsilon$

$\Downarrow$
 $a \notin L$

$\Downarrow$
 $\varepsilon \in L$



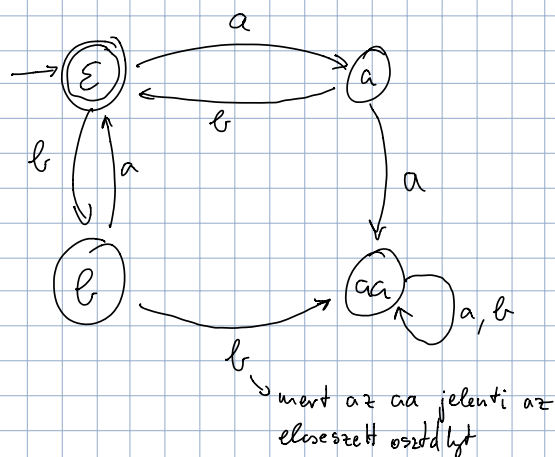
Pl.: $L = (ab \cup ba)^*$ esetén a $\Sigma^* \approx_L$ szerinti ekvivalencia osztályai

1, $[\varepsilon] = L$

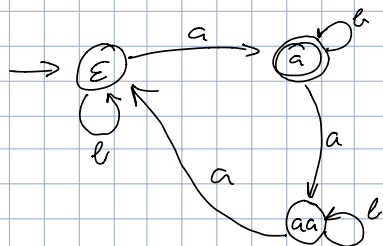
2, $[a] = La$

3, $[b] = Lb$

4, $[aa] = L(aa \cup bb)\Sigma^*$



3, $a, \{s \in \{a, b\}^* \mid s\text{-ben az } a\text{-t száma } 3k+1\text{-alaki}\}$



$$[\epsilon] = (b^* a b^* a b^* a b^*)^*$$

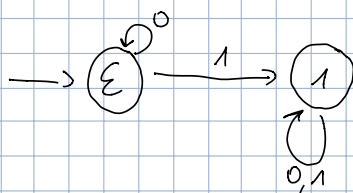
$$[a] = L$$

$$[aa] = L a b^*$$

4, $\{s \in \{0,1\}^* \mid s \text{ legalább egy } 1\text{-est tartalmaz}\}$

$$[\epsilon] = 0^*$$

$$[1] = L$$



L reguláris ha leírható véges automattal

L reg

$$\Leftrightarrow \exists p \in \mathbb{N} \quad \forall s \in L \quad |s| \geq p$$

$$\Rightarrow s = xyz$$

$$1, xy^n z \in L \quad \forall n \geq 0$$

$$2, |y| > 0$$

$$3, |xy| \leq p$$

4/a

$$0^n 1^n \quad n \geq 0$$

TFH. L vegy

$$S := \underbrace{0^p}_{xy} 1^p$$

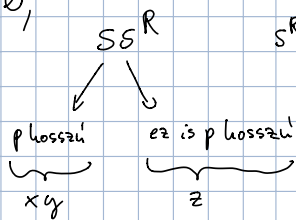
$$xy = 0^p$$

$$y = 0 \quad x = 0^{p-1}$$

$$0^{p-1} 0^p 1^p \in L$$

↑
ezt pumpalom ⚡

ℓ_1



S^R a szó megfordítottja

$$S_2 :=$$

4. gyz

1. Határozzuk meg az alábbi nyelvtanok által generált nyelvet (csak a szabályokat írjuk fel, a szokásos konvenciókkal: S a mondat szimbólum, nagybetű nemterminálist, kisbetű terminálist jelöl).

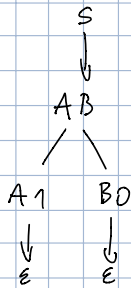
- $S \rightarrow AB, A \rightarrow A1 \mid \varepsilon, B \rightarrow B0 \mid \varepsilon,$
- $S \rightarrow 0S11 \mid 0S111 \mid \varepsilon,$
- $S \rightarrow ASA \mid 0B, A \rightarrow B \mid S, B \rightarrow 1 \mid \varepsilon.$

2. Adjunk meg nyelvtant az alábbi nyelvekhez.

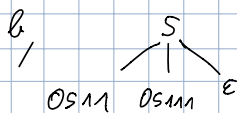
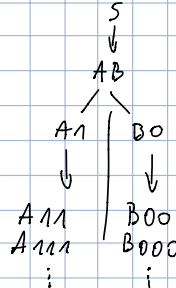
- $\{s \in \{a, b\}^* \mid s\text{-ben az } a\text{-k száma } 3k + 1 \text{ alakú}\}$
- $\{s \in \{0, 1\}^* \mid s \text{ legalább egy } 1\text{-est tartalmaz}\}$
- $\{s \in \{0, 1\}^* \mid s \text{ minden páratlanadik betűje } 1\}$
- $\{s \in \{0, 1\}^* \mid s\text{-ben 1-gyel több } 0 \text{ van, mint } 1\text{-es}\}$
- $\{s \in \{0, 1\}^* \mid s\text{-ben 2-szer annyi } 0 \text{ van, mint } 1\text{-es}\}$
- $\{s \in \{a, b\}^* \mid s \text{ hossza 2-szer akkora, mint ahány „a” betű szerepel az első „b”-ig}\}$

3. Hozzuk Chomsky-féle normálalakra az alábbi szabályokat.

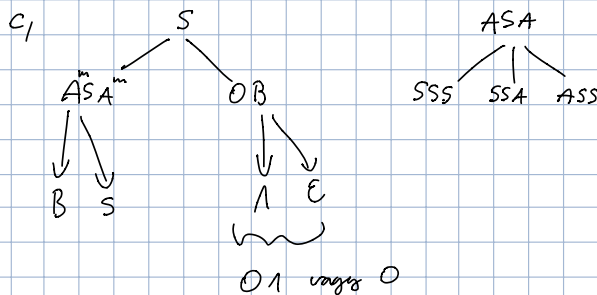
$$S \rightarrow ASA \mid 0B, A \rightarrow B \mid S, B \rightarrow 1 \mid \varepsilon$$



a / $1^n 0^m$



$$0^n 1^m \quad 2n \leq m \leq 3n$$



2, $a, \{s \in \{a, b\}^* \mid s\text{-ben } a\text{-t száma } 3k+1 \text{ alakú}\}$

$$b^* a (b^* a b^* a b^* a b^*)^*$$

$$S \rightarrow S_1 S_2$$

$$S_1 \rightarrow B a$$

$$B \rightarrow B b \mid \varepsilon$$

$$S_2 \rightarrow S_1 S_1 S_1 B \mid S_2 S_2$$

$$S \rightarrow A B$$

$$A \rightarrow A A A A \mid a$$

$$B \rightarrow B B \mid b \mid \varepsilon$$

$$A B \rightarrow B A$$

6, $\{s \in \{0, 1\}^* \mid s \text{ legalább } 1 \text{ egyest tartalmaz}\}$

$$S \rightarrow S_1 1 S_1$$

$$S_1 \rightarrow S_1 S_1 \mid 0 \mid 1 \mid \varepsilon$$

környezetfüggetlen nyelvtan (CF)

→ ha a baloldalon csak 1 db nem terminális van

$$\text{pl } AB \rightarrow BA \quad \nabla$$

C, $\{s \in \{0, 1\}^* \mid s \text{ minden páratlanadik betije } 1\}$

$$S \rightarrow 1 A \mid \varepsilon$$

$$A \rightarrow 1 \mid 0 \mid 1 1 A \mid 0 1 A \mid \varepsilon$$

regexből

$$(1 (1 U 0))^* (1 U \varepsilon)$$

$$S \rightarrow A B$$

$$B \rightarrow 1 \mid \varepsilon$$

$$A \rightarrow A A \mid 1 0 \mid 1 1 \mid \varepsilon$$

$$d, \{s \in (0,1)^* \mid s\text{-ben } 1\text{-gyel több } 0 \text{ van mint } 1\text{-es}\}$$

$$S \rightarrow A0A$$

$$A \rightarrow A10 \mid A01 \mid \varepsilon \mid 1A0 \mid 0A1$$

Chomsky fele normalalak (CNF)

Def: A $G = (V, \Sigma, R, S)$ CF grammatika Chomsky-fele

normalalakban adott, ha a szabályok az alábbiakéak:

$$A \rightarrow BC$$

$$A \rightarrow a$$

$S \rightarrow \varepsilon$, de ekkor S nem szerepel szabály jobb oldalán

$A, B, C \in V$ $a \in \Sigma$, B és C nem kezdőszimbólum

Tétel

Tetszőleges CF nyelvhez megadható öt generáló grammatika CNF alakban

$$S \rightarrow A0A$$

$$A \rightarrow A1A0A \mid A0A1A \mid \varepsilon$$

$\Downarrow$

$$S \rightarrow A0A \mid 0 \mid A0 \mid 0A$$

$$A \rightarrow A1A0 \mid 1A0A \mid A10A \mid A1A0 \mid 10A \mid 1A0 \mid$$

$$A10 \mid 10 \mid A0A1A \mid 0A1A \mid A01A \mid A0A1 \mid$$

$$01A \mid 0A1 \mid A01 \mid 01$$

$$3, \quad S \rightarrow ASA \mid OB$$

$$A \rightarrow B \mid S$$

$$B \rightarrow 1 \mid \epsilon$$

$$S \rightarrow ASA \mid OB$$

$$A \rightarrow B \mid S \mid \epsilon$$

$$B \rightarrow 1$$



$$S \rightarrow ASA \mid 01 \mid 0$$

$$A \rightarrow 1 \mid S \mid \epsilon$$



$$S \rightarrow ASA \mid SA \mid AS \mid S \mid 01 \mid 0$$

$$A \rightarrow 1 \mid S$$



$$S \rightarrow SA \mid AS \mid 01 \mid 0$$

$$A \rightarrow 1 \mid S$$



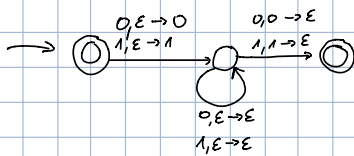
$$S \rightarrow SS \mid S1 \mid 1S \mid 01 \mid 0$$



$$S \rightarrow SS \mid S1 \mid 1S \mid 0$$

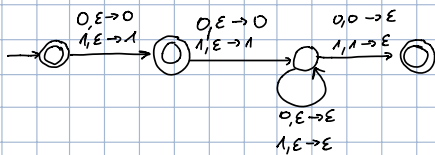
2017.03.28.

1/a

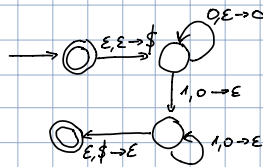
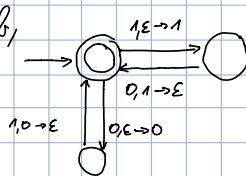


$a, \epsilon \rightarrow a$ ← mit richtigem Label
 ↑
 benannt vererbt

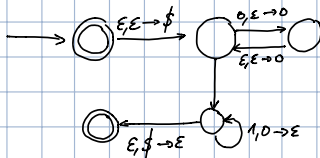
Egy hosszút is elfogad:



b,

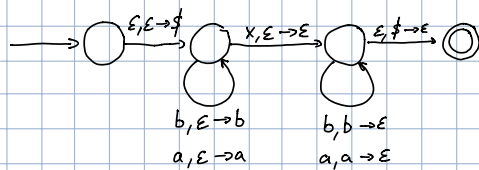


c,

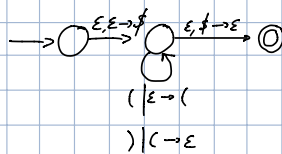


2,

$a, S \rightarrow aSa \mid bSb \mid x$



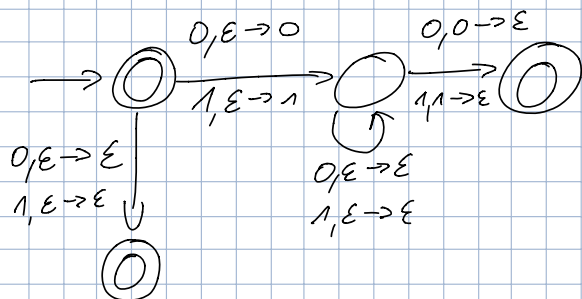
b,



3, nem determinisztikus, ezért szar lesz

Mark változat

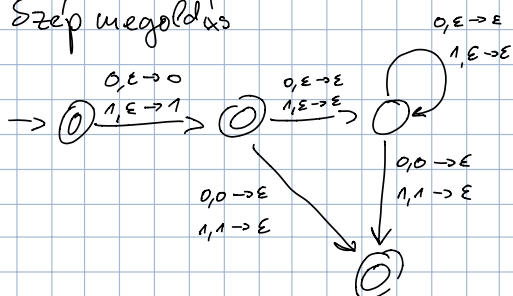
1/a s ua.-zal a betűvel kezd mint végződik (Nemdet. verzió)



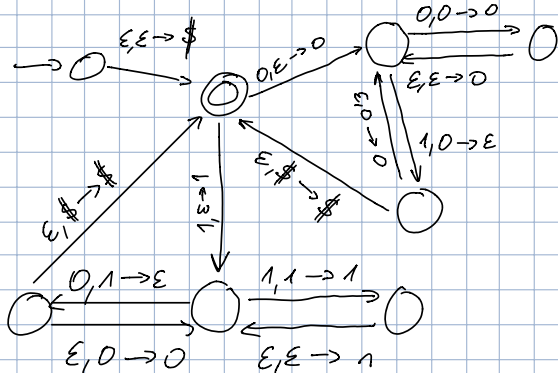
$a, E \rightarrow a$ ← mit rakok bele
↑
bemenet véreimből

Ez a csúnya megoldás, a "szal" 1-es és "szal" 0-s is elfogadható legyen

Szép megoldás



6, s ua. 0-t tartalmaz mint 1-et

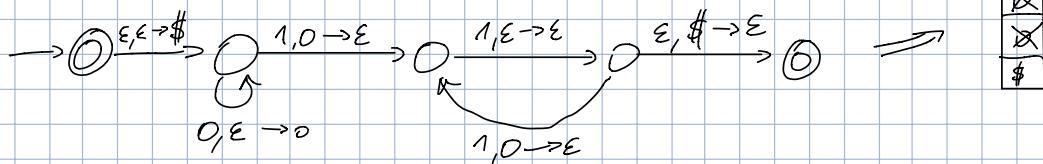


Sz0: 0011

0101

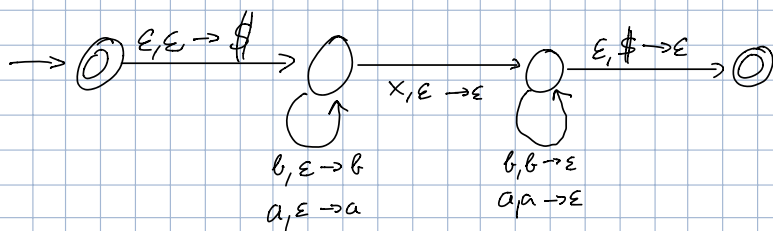


$$9 \quad S = 0^n 1^{2n}$$

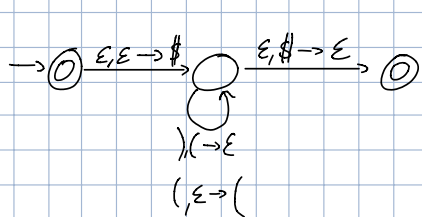


2, Veremautomata készítése a következőkre

$$a, S \rightarrow aSa \mid bSb \mid x \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{pl: } ab \times ba \\ \quad \quad \quad a \times a \end{array} \quad abba \times abba \right]$$



$$b, S \rightarrow (S) \mid SS \mid \epsilon$$



$$S = () \Rightarrow \begin{array}{|c|} \hline * \\ \hline \$ \\ \hline \end{array} \checkmark$$

$\Rightarrow$ iff a zárójel $\Rightarrow$

$$\begin{array}{c} S \\ \downarrow \\ SS \\ \downarrow \\ SSS \\ \downarrow \\ (S)(S)(S) \\ \downarrow \\ (SS) \end{array}$$

$$\rightarrow ((())())()$$

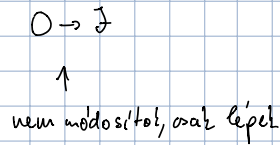
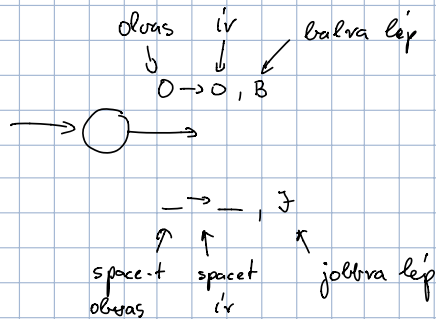
ellenpélda:

$$() \Rightarrow \begin{array}{|c|} \hline * \\ \hline \$ \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{nem} \\ \text{fogadjon} \\ \text{el} \end{array}$$

nem determinisztikus: Létezik olyan bejárás módja, amivel végállapotba jutunk

3, azért nem igaz, mert nemdet. az egész

Turing gép
- szalag



két szalagos

$(0,0) \rightarrow (0,1), (B,B)$

minden ami n szalagon megvalósítható, az 1 szalagon is

+ módosítás

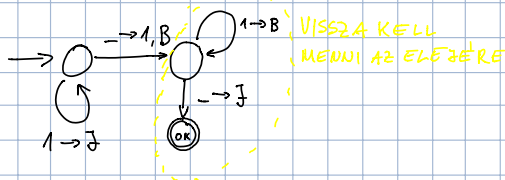
fej helyben maradhat

B, B, H

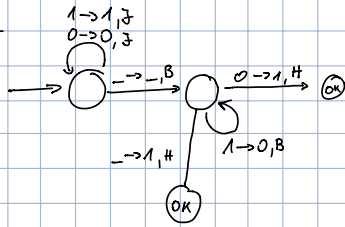
1,

a, egyes számrendszerben felírt számot megnövel egyjellel

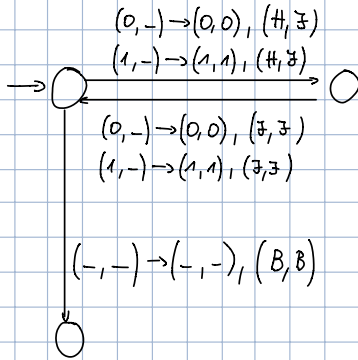
↳ ahány egyes, annyira szám pl $3 = 111$



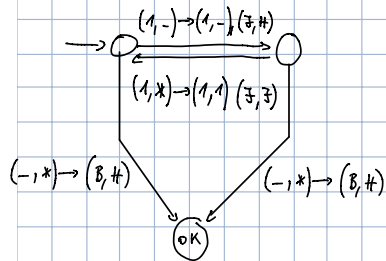
a/2



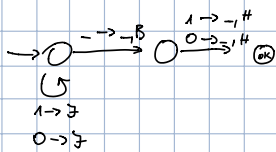
b, egy stringet átalakít úgy, hogy minden karaktert megkelelőz (két szalag, egy input egy output)



c, egyes számrendszerbeli számot elfelez lefelé leírva



d, kettes számrendszerbeli elemet elfelez lefelé leírva (1 szalag)



e, stringről eldönti hogy palindrom-e (két szalag)

Aszimptotikus komplexitás

- algoritmusok futási ideje közül a legrosszabbul
↳ műveletek száma

1,	$O(n)$		$f(n) = O(n^3)$
	$O(n \log n)$		$\exists n_0, \forall n > n_0$
	$O(n^3)$		$f(n) \leq c \cdot n^3$
	$O(2^n)$		
	$O(n^4)$		

2, a, $5n^7 \leq O(n^7)$
 $c=6$ igaz

b, $1 \leq 100$
igaz

c, $1 = O(n)$
 $1 \leq c \cdot n$
 $c = \text{bármilyen}$

d, $n^3 + 2000n + 12410 = \Theta(n^3)$
 $\leq \underbrace{14411}_c n^3$

$n^3 + 2000n + 12410 \geq n^3$
 $c=1$

e, $4^n = O(2^n)$
 $4^n = 2^{2n} \geq 2^n$ hamis

$$f, 4^n = \Omega(2^n)$$

igaz

$$g, 4^n = 2^{\Theta(n)}$$

igaz

3, adjunkt polinom algoritmus

a, bináris számok összeadása

b, bináris számok

:

c, művelet szám:

$$1 \times 1 - \text{es } T(1)$$

$$2 \times 2 - \text{es } \Rightarrow 2 \text{ szorzás (összeadás/kiadás elhanyagolható)}$$

$$\hookrightarrow T(2)$$

$$3 \times 3 - \text{as } 3 \cdot (T(2) + 1)$$

$$n \times n - \text{es } n \cdot (T(n-1) + 1) = n T(n-1) + n = n((n-1)T(n-2) + 1) + n = O(n(n-1)T(n-2)) =$$

$$= T(n) = n!$$

$$f, O(n^2)$$

redukció

P: polinomialis

NP: nemdeterminisztikus turinggéppel polinom időben megoldható

NP teljes: NP beli és az összes NP beli visszavezethető rá