

A digitális számítás elmélete

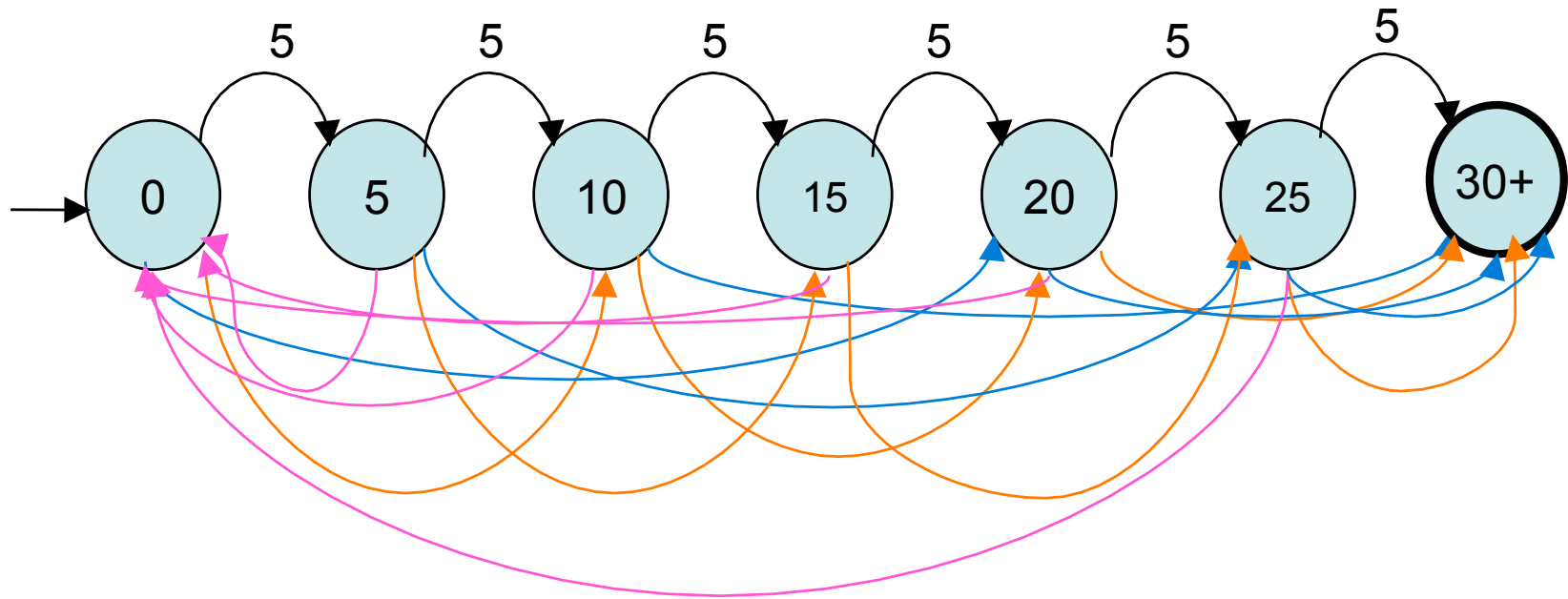
1. előadás 2017. febr. 14.

Determinisztikus véges automaták

Példa: Pénzautomata

be: 5, 10, 20 Ft, VISSZA

válasz: csoki ha legalább 30 Ft-ot bedobtunk, különben VISSZA esetén pénz vissza

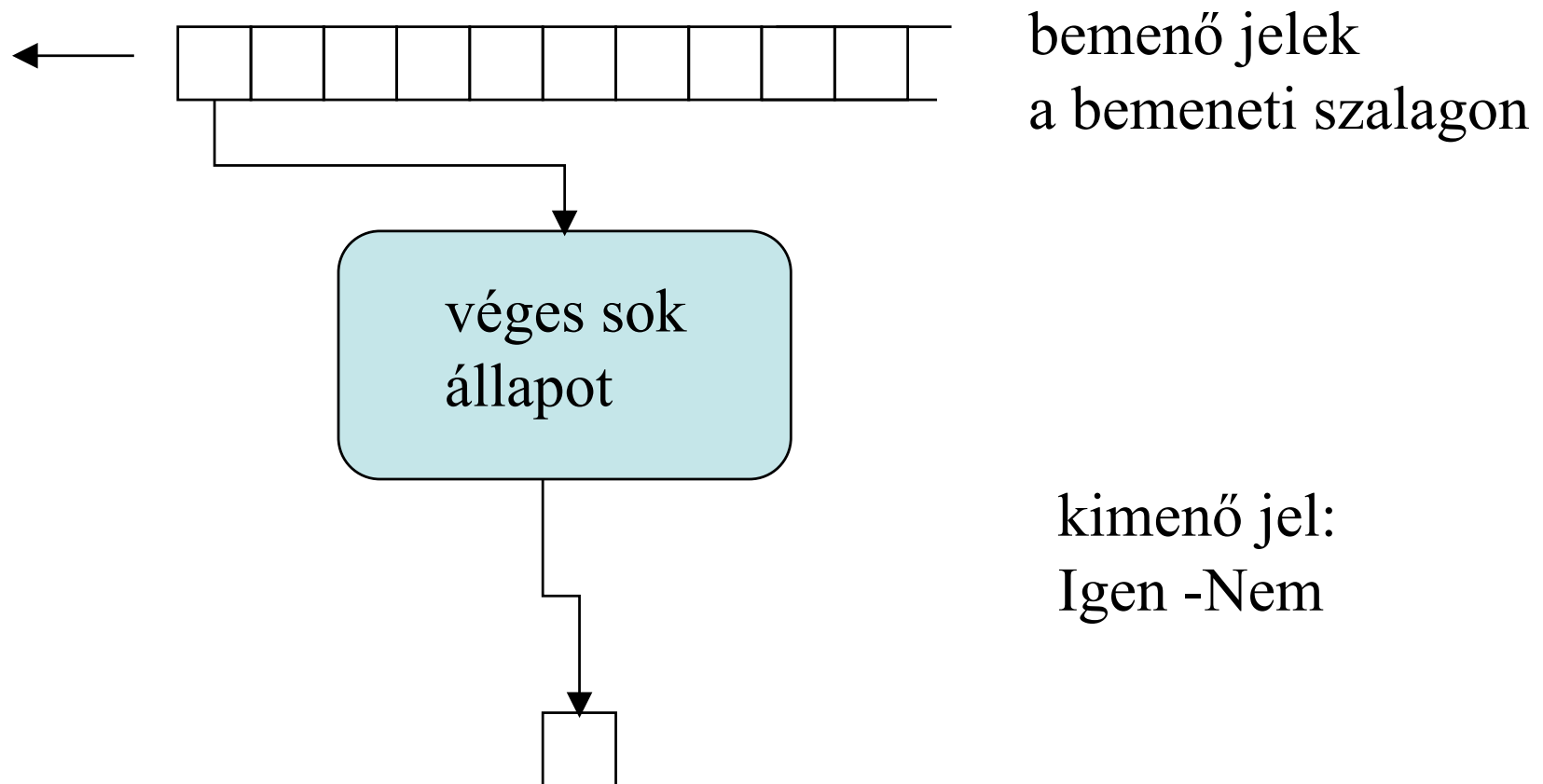


állapot, kezdő és végállapot

állapot átmenet

bemenő jelek

Determinisztikus véges automaták



Determinisztikus véges automaták

Definíció: **Determinisztikus véges automata (dva vagy va)**

$M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ahol:

1. Q , egy véges halmaz az **állapotok** halmaza
2. Σ , egy véges halmaz az **abc**
3. $\delta: Q \times \Sigma \rightarrow Q$ az **állapotátmenet függvény**
4. $q_0 \in Q$ a **kezdeti állapot**
5. $F \subseteq Q$ a **végállapotok halmaza**

Determinisztikus véges automáták

Definíció: **Felismert (elfogadott) jelsorozat**

$M=(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ egy dfa, $w = x_1 x_2 \dots x_n$ Σ -beli jelek sorozata.

M felismeri w -t, ha $\exists r_0 r_1 \dots r_n$ Q -beli állapotok sorozata, hogy:

1. $r_0 = q_0$
2. $\delta(r_i, x_{i+1}) = r_{i+1} \quad i = 1, \dots, n-1$
3. $r_n \in F$

Definíció: az M dfa **felismeri az L nyelvet**, ha

$$L = \{w \mid M \text{ felismeri } w\text{-t}\}.$$

Jelölés: Az M által felismert nyelv: $L(M)$

Nyelvek reprezentációja

Definíciók: Σ tetszőleges jelek egy nemüres, véges halmaza, az **abc.** Σ^* jelöli az összes, Σ -beli jelekből álló véges **sorozatok (szavak)** halmazát.

$$\Sigma^* = \{w = a_1 \dots a_n \mid a_i \in \Sigma, i = 1, \dots, n, n \geq 0\}$$

$w = a_1 \dots a_n$ szó **hossza** n .

Speciálisan, ε jelöli a 0 hosszú sorozatot, az **üres szót**.

A bináris abc, I a 0 és 1 jeleket tartalmazza.

Példa: $\Sigma = \{\text{if, then, else, for, do, a, b, c} \}$

if a then b else c, do a, do do, aabba

Nyelvek reprezentációja

Definíció: L egy **formális nyelv** Σ felett, ha $L \subseteq \Sigma^*$.

Egy nyelv véges módon megadható:

- a) Elemeit felsorolva – ha azok száma véges.
- b) $L = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ P tulajdonságú}\}$
- c) $L = L(M)$ ahol M egy automata, pl. dva.
- d) Operátorokkal
- e) Generáló nyelvtannal

Megj: Nem lehet az összes Σ feletti nyelvet végesen reprezentálni!

Reguláris operátorok

Definíció: Reguláris operátorok egy Σ abc feletti nyelveken

- **Egyesítés (unió):** $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ vagy } x \in B\}$
- **Szorzat (illesztés, konkatenáció):** $A \circ B = \{xy \mid x \in A, y \in B\}$,

ahol

$x = x_1x_2\dots x_n$, $y = y_1y_2\dots y_m$ esetén $xy = x_1x_2\dots x_ny_1y_2\dots y_m$

- **Iterálás (Kleene csillag):** $A^* = \{w_1w_2\dots w_k \mid w_i \in A \text{ } i = 1, \dots, k, k \geq 0\}$
 1. megj. $\varepsilon \in A^*$,
 2. megj. $L = \Sigma$ esetén $L^* = \Sigma^*$

Operátorok nyelveken

Definíció: További operátorok egy Σ abc feletti nyelveken

- **Metszet:** $A \cap B = \{w \mid w \in A \text{ és } w \in B\}$
- **Különbség:** $A - B = \{w \mid w \in A \text{ és } w \notin B\}$, $A^C = \Sigma^* - A$
- **Tükörkép:** $A^R = \{x^R \mid x \in A\}$ ahol $x = x_1x_2\dots x_n$ esetén $x^R = x_nx_{n-1}\dots x_1$

P1: $L = \{w \in \{0,1\}^* \mid w\text{-ben 2 vagy 3 db 1-es szerepel úgy, hogy az első és a második nem szomszédosak}\}$

$$\{0\}^* \circ \{1\} \circ \{0\} \circ \{0\}^* \circ \{1\} \circ \{0\}^* \circ (\{1\} \circ \{0\}^*) \cup \{e\}$$

Reguláris kifejezések

Definíció: Egy Σ abc feletti reguláris kifejezések:

1. Σ minden eleme.
2. ε
3. $\emptyset$
4. Ha α és β reguláris kifejezések, akkor $(\alpha\beta)$ is az.
5. Ha α és β reguláris kifejezések, akkor $(\alpha\cup\beta)$ is az.
6. Ha α reguláris kifejezés, akkor α^* is az.

Minden reguláris kifejezés reprezentál egy nyelvet. Pl:

reg. kif.

nyelv

$(a^*bc)^*ab$

$(\{a\}^*\circ\{b\}\circ\{c\})^*\circ\{a\}\circ\{b\}$

Reguláris kifejezések

Tétel: Legyen $\mathcal{L}$ azon nyelvek halmaza, melyek felismerhetők determinisztikus véges automatával.

$\mathcal{L}$ zárt a reguláris operátorokra nézve.

Azaz ha $A_1 \in \mathcal{L}$ és $A_2 \in \mathcal{L}$, akkor:

1. $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{L}$.
2. $A_1 \circ A_2 \in \mathcal{L}$.
3. $A_1^* \in \mathcal{L}$.

Reguláris kifejezések

Bizonyítás, az 1. állításé:

Legyen $A_1 = L(M_1)$, $A_2 = L(M_2)$,

$$M_1 = (Q_1, \Sigma_1, \delta_1, q_1, F) \quad M_2 = (Q_2, \Sigma_2, \delta_2, q_2, F_2)$$

Megkonstruáljuk $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ -t, hogy $L(M) = A_1 \cup A_2$

1. $\Sigma = \Sigma_1 = \Sigma_2$ (különben $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$)
2. $Q = Q_1 \times Q_2 = \{ (r_1, r_2) \mid r_1 \in Q_1 \text{ és } r_2 \in Q_2 \}$.
3. $\delta((r_1, r_2), a) = (\delta_1(r_1, a), \delta_2(r_2, a))$.
4. $q_0 = (q_1, q_2)$
5. $F = \{ (r_1, r_2) \mid r_1 \in F_1 \text{ vagy } r_2 \in F_2 \} = (F_1 \times Q_2) \cup (Q_1 \times F_2)$.

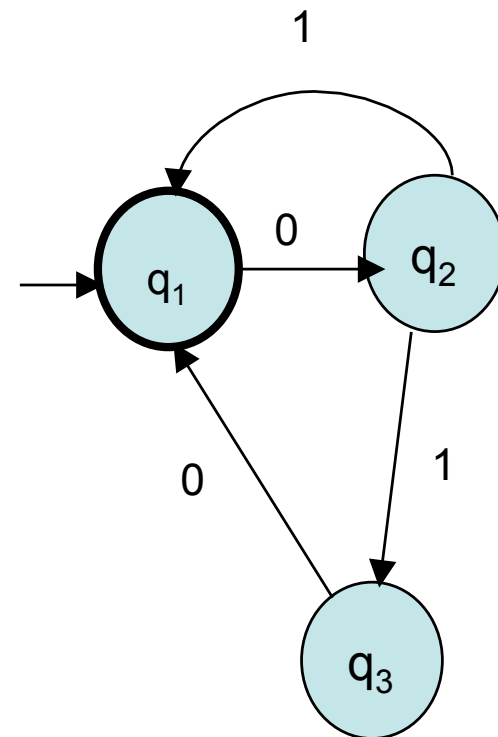
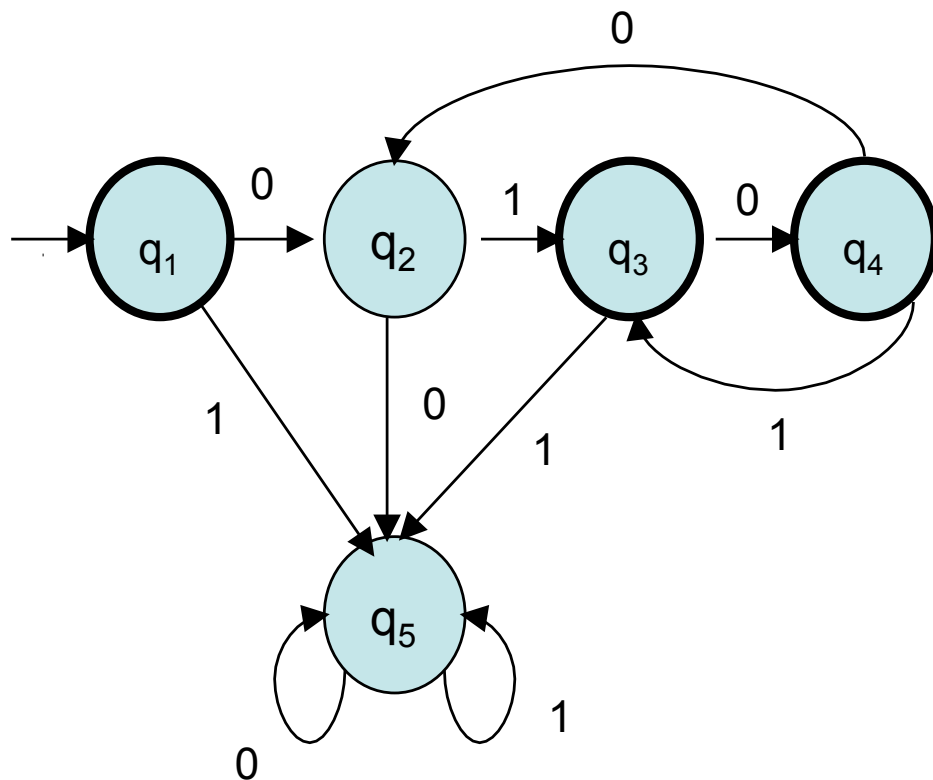
Reguláris kifejezések

Bizonyítás, az 2. és 3. állításé:

Kerülővel, nemdeterminisztikus véges automatákkal.

Nemdeterminisztikus véges automaták

$$L = (01 \cup 010)^*$$



Nemdeterminisztikus véges automaták

Definíció: **Nemdeterminisztikus véges automata (nva)**

$N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ahol:

1. Q , egy véges halmaz az **állapotok** halmaza
2. Σ , egy véges halmaz az **abc**
3. $\delta: Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \rightarrow \mathcal{P}(Q)$ az **állapotátmenet fv**
4. $q_0 \in Q$ a **kezdeti állapot**
5. $F \subseteq Q$ a **végállapotok halmaza**

Jelölés: $\Sigma_\varepsilon = \Sigma \cup \{\varepsilon\}$

Nemdeterminisztikus véges automaták

Definíció: Felismert (elfogadott) jelsorozat

$N=(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ egy nva, $w = w_1 w_2 \dots w_n \Sigma_\epsilon$ -beli jelek sorozata.

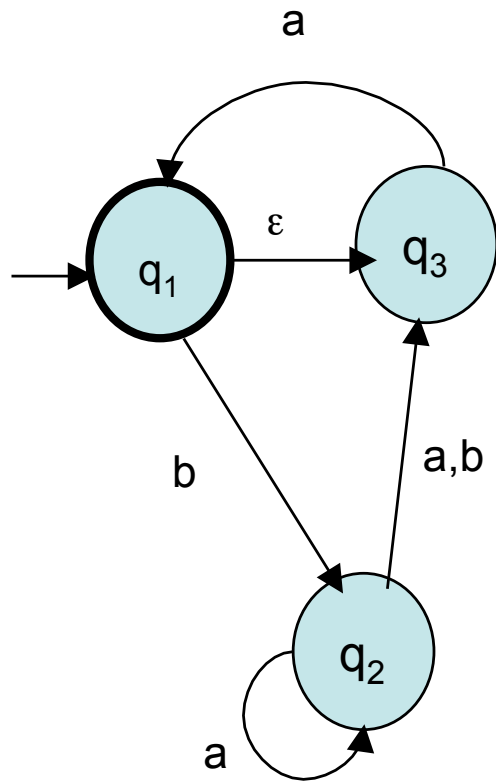
N felismeri w -t, ha $\exists r_0 r_1 \dots r_n$ Q -beli állapotok sorozata, hogy:

1. $r_0 = q_0$
2. $r_{i+1} \in \delta(r_i, w_{i+1}) \quad i = 0, \dots, n-1$
3. $r_n \in F$

Definíció: Az N nva **felismeri az L nyelvet**, ha

$$L = \{w \mid N \text{ felismeri } w\text{-t}\}.$$

Nemdeterminisztikus véges automaták



	a	b	ϵ
q_1	$\emptyset$	$\{q_2\}$	$\{q_3\}$
q_2	$\{q_2, q_3\}$	$\{q_3\}$	$\emptyset$
q_3	$\{q_1\}$	$\emptyset$	$\emptyset$

baba

~~aba~~

~~bab~~

abba

Nemdeterminisztikus véges automaták

Definíció: M_1 és M_2 **ekvivalensek**, ha

$$L(M_1) = L(M_2).$$

Tétel: Minden $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ nva-hoz létezik vele ekvivalens M dva.

Biz: _Megkonstruáljuk az $M=(Q', \Sigma, \delta', q_0', F')$ va-t.

a) Ha N gráfja nem tartalmaz ε címkét.

1. $Q' = \mathcal{P}(Q)$

2. $\delta'(R, a) = \{ q \in Q \mid \exists r \in R, \text{ hogy } q \in \delta(r, a) \} = \bigcup_{r \in R} \delta(r, a)$

3. $q_0' = \{q_0\}$

4. $F' = \{ R \in Q' \mid \exists r \in R, \text{ hogy } r \in F \}$

Nemdeterminisztikus véges automaták

b) Ha N gráfja tartalmaz ε címkét.

Jelölés: Ha $R \subseteq Q$, $E(R) = \{ q \in Q \mid q \text{ elérhető } R\text{-ből } 0 \text{ vagy több } \varepsilon \text{ él mentén haladva} \}$

1. Ld. a)

2. $\delta'(R, a) = \{ q \in Q \mid \exists r \in R, \text{ hogy}$

$$q \in E(\delta(r, a)) \} = \bigcup_{r \in R} E(\delta(r, a))$$

3. $q_0' = E(\{q_0\})$

4. Ld. a)

M valóban ekvivalens N -nel.

Nemdeterminisztikus véges automaták

Tétel: Legyen $\mathcal{L}$ azon nyelvek halmaza, melyek felismerhetők determinisztikus véges automatával.

$\mathcal{L}$ zárt a reguláris operátorokra nézve.

Azaz ha $A_1 \in \mathcal{L}$ és $A_2 \in \mathcal{L}$, akkor:

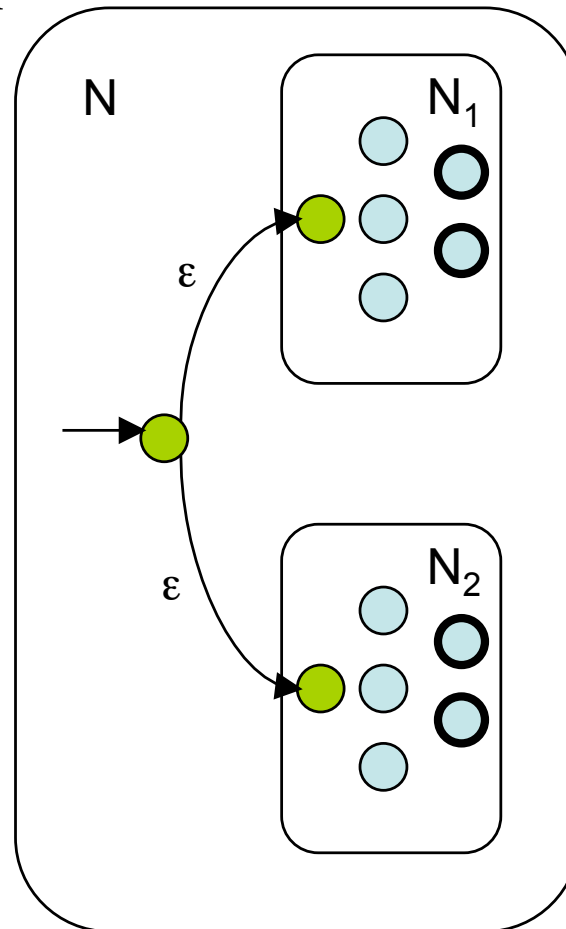
1. $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{L}$.
2. $A_1 \circ A_2 \in \mathcal{L}$.
3. $A_1^* \in \mathcal{L}$.

Nemdeterminisztikus véges automaták

Bizonyítás: Nva-kat használhatunk va helyett!

$$L(N_1) = A_1 \quad L(N_2) = A_2 \quad L(N) = A$$

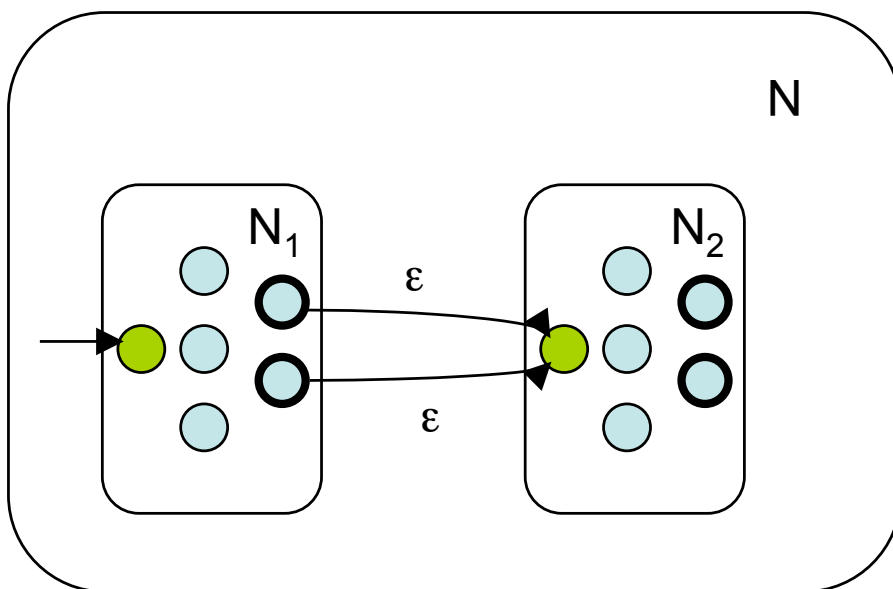
1. $A = A_1 \cup A_2$



Nemdeterminisztikus véges automaták

Bizonyítás:

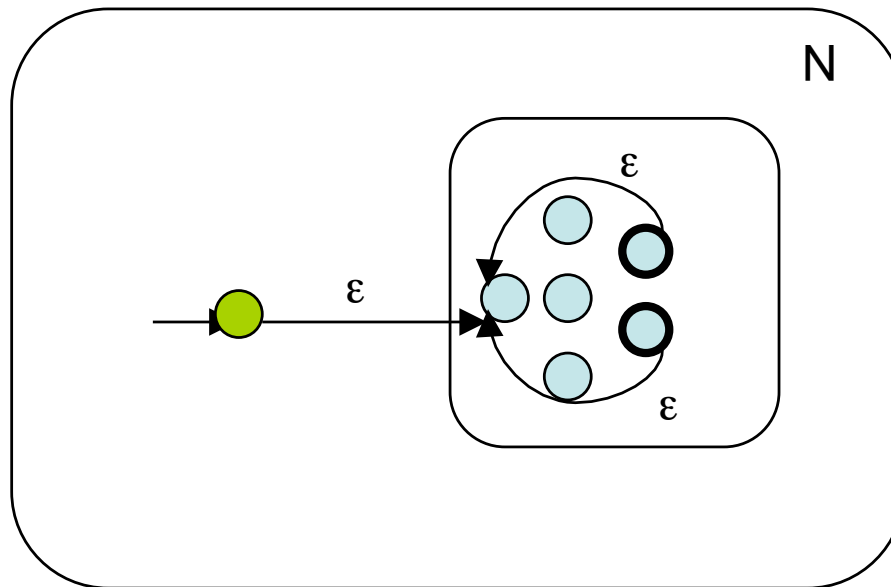
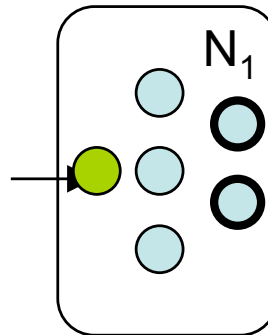
2. $A = A_1 \circ A_2$



Nemdeterminisztikus véges automaták

Bizonyítás:

3. $A = A_1^*$

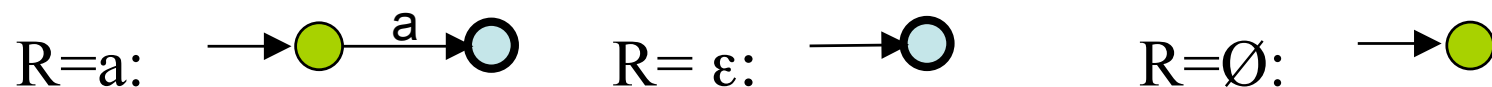


$\mathcal{L}_R$ és $\mathcal{L}_D$ ekvivalenciája

Következmény: Az alábbi, valamely adott Σ feletti nyelvosztályok megegyeznek:

1. $\mathcal{L}_R$ a reguláris nyelvek halmaza
(reguláris műveletekkel / kifejezésekkel megadható nyelvek).
2. $\mathcal{L}_N$ az nva-k által felismert nyelvek.
3. $\mathcal{L}_D$ a dva által felismert nyelvek.

Bizonyítás:



A korábbi két tételből következik, hogy:

$$\mathcal{L}_R \subseteq \mathcal{L}_N \quad \text{és} \quad \mathcal{L}_N = \mathcal{L}_D$$

$\mathcal{L}_R$ és $\mathcal{L}_D$ ekvivalenciája

Megmutatjuk, hogy $\mathcal{L}_D \subseteq \mathcal{L}_R$ is igaz.

Ehhez bevezetjük az **általánosított nemdeterminisztikus véges automata** fogalmát, a következő specialitásokkal:

- az élek reguláris kifejezésekkel címkézettek
- a kezdőállapotból minden más állapotba megy él, de bele egy sem
- egyetlen, a kezdőállapottól különböző végállapot van
- a közbülső állapotok mindegyikéből megy egyetlen él minden közbülső állapotba, így saját magába is

$\mathcal{L}_R$ és $\mathcal{L}_D$ ekvivalenciája

Definíció: **Általánosított nemdeterminisztikus véges automata**
(ánva)

$N = (Q, \Sigma, \delta, q_{\text{kezdő}}, q_{\text{vég}})$ ahol:

1. Q , egy véges halmaz az **állapotok** halmaza
2. Σ egy véges halmaz, az **abc**
3. $\delta: (Q - \{q_{\text{vég}}\}) \times (Q - \{q_{\text{kezdő}}\}) \rightarrow \mathcal{R}$ az **állapotátmenet fv**,
ahol $\mathcal{R}$ a Σ feletti reguláris kifejezések halmaza
4. $q_{\text{kezdő}} \in Q$ a **kezdeti állapot**
5. $q_{\text{vég}} \in Q$ a **végállapot**

$\mathcal{L}_R$ és $\mathcal{L}_D$ ekvivalenciája

Definíció: Felismert (elfogadott) jelsorozat

$N=(Q, \Sigma, \delta, q_{\text{kezdő}}, q_{\text{vég}})$ egy ánya. N felismeri a $w \in \Sigma^*$ sortozatot,

ha $w = w_1 w_2 \dots w_k$ ahol $w_i \in \Sigma^*$ $i = 1, \dots, k$, és $\exists r_0 r_1, \dots, r_k$

Q -beli állapotok sorozata, hogy:

1. $r_0 = q_{\text{kezdő}}$
2. $r_k = q_{\text{vég}}$
3. $w_i \in L(R_i)$, ahol $R_i = \delta(r_{i-1}, r_i)$ $i = 1, \dots, k$

Definíció: N ánya **felismeri az L nyelvet**, ha

$$L = \{w \mid N \text{ felismeri } w\}.$$

$\mathcal{L}_R$ és $\mathcal{L}_D$ ekvivalenciája

A bizonyítás során megkonstruálandó ánya-kat a következő séma szerint használjuk:

- M a kiindulási k állapotú dva
- A_{k+2} egy M -mel ekvivalens, $k+2$ állapotú ánya
- A_{k+1} egy A_{k+2} -mel ekvivalens, $k+1$ állapotú ánya
- ...
- A_2 egy A_m -mal ekvivalens, $k+1$ állapotú ánya
- az A_2 egyetlen élén szereplő reguláris kifejezés amit kerestünk

$\mathcal{L}_R$ és $\mathcal{L}_D$ ekvivalenciája

Bizonyítás: Megmutatjuk, hogy $\mathcal{L}_D \subseteq \mathcal{L}_R$ is igaz.

1. $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ a kiindulási k állapotú dfa. A_{k+2} egy M -mel ekvivalens, $k+2$ állapotú ánya, melyet úgy kapunk, hogy:
 - hozzáadunk Q -hoz egyetlen új $q_{\text{vég}}$ állapotot, melybe minden F -beli állapotból ε címkéjű él vezet,
 - hozzáadunk Q -hoz egyetlen új $q_{\text{kezdő}}$ állapotot, melyből q_0 -ba ε címkéjű él vezet,
 - a többszörös éleket egy újjal helyettesítjük, melyre a kihagyott éleken szereplő szimbólumok unióját írjuk címkeként
 - Az olyan állapotok közé, melyek között nincs M -ben él, beírunk egy $\emptyset$ -zal címkézett élt.

$\mathcal{L}_R$ és $\mathcal{L}_D$ ekvivalenciája

2. Ezután az alábbi KONVERTÁL rekurzív eljárást A_{k+2} -ra alkalmazva, előállítunk egy reguláris kifejezést.

KONVERTÁL(G)

1. Legyen k G állapotainak a száma.
2. Ha $k=2$, visszaadjuk a G egyetlen élén szereplő reguláris kifejezést.
3. Ha $k>2$, legyen $q' \in Q - \{q_{\text{kezdő}}, q_{\text{vég}}\}$ tetszőleges. Legyen:
 $G' = (Q', \Sigma, \delta', q_{\text{kezdő}}, q_{\text{vég}})$, ahol $Q' = Q - \{q'\}$
és $\delta'(q_i, q_j) = (R_1) (R_2)^* (R_3) \cup (R_4)$, ahol:
 $R_1 = \delta(q_i, q')$ $R_2 = \delta(q', q')$ $R_3 = \delta(q', q_j)$ $R_4 = \delta(q_i, q_j)$
4. Adjuk vissza KONVERTÁL(G')-t.

$\mathcal{L}_R$ és $\mathcal{L}_D$ ekvivalenciája

2. Megmutatjuk, hogy KONVERTÁL(G) ekvivalens G-vel.
 $k = |Q|$ szerinti teljes indukciót használunk.

1. $k=2$ -ra igaz.

2. Indukciós feltevés: Igaz $k-1$ állapotú ánya esetén.

3. Megmutatjuk, hogy igaz k állapotú ánya esetén is.

Ehhez megmutatjuk, hogy $L(G) = L(G')$

a) $L(G) \subseteq L(G')$

Legyen $w \in L(G)$, és

$q_{\text{kezdő}}, q_1, q_2, \dots, q_{\text{vég}}$ felismerő állapotok sorozata.

Ha q' nem szerepel, akkor ez a sorozat Q' -beli is, így
 $w \in L(G')$.

$\mathcal{L}_R$ és $\mathcal{L}_D$ ekvivalenciája

Ha ..., q_i , q' , ... q' , q_j , ... szerepel, akkor

$w = \dots, w_i, w_1', \dots w_s', w_j, \dots$ és

$w_i \in \delta(q_i, q') = R_1$,

$w_t' \in \delta(q', q') = R_2, \quad t=1, \dots, s,$

$w_j \in \delta(q', q_j) = R_3$

Tehát ..., q_i , q_j , ... sorozat elfogadó állapotok sorozata

Q' -ben, mert $\delta'(q_i, q_j) = (R_1)(R_2)^*(R_3) \cup (R_4)$, így $w \in L(G)$.

b) $L(G) \subseteq L(G')$

Legyen $w \in L(G')$, és $q_{\text{kezdő}}, q_1, q_2, \dots, q_{\text{vég}}$ egy felismerő állapotátmenet sorozat.

A fentihez hasonló megfontolással látható, hogy $w \in L(G)$ is.

$\mathcal{L}_R$ és $\mathcal{L}_D$ ekvivalenciája

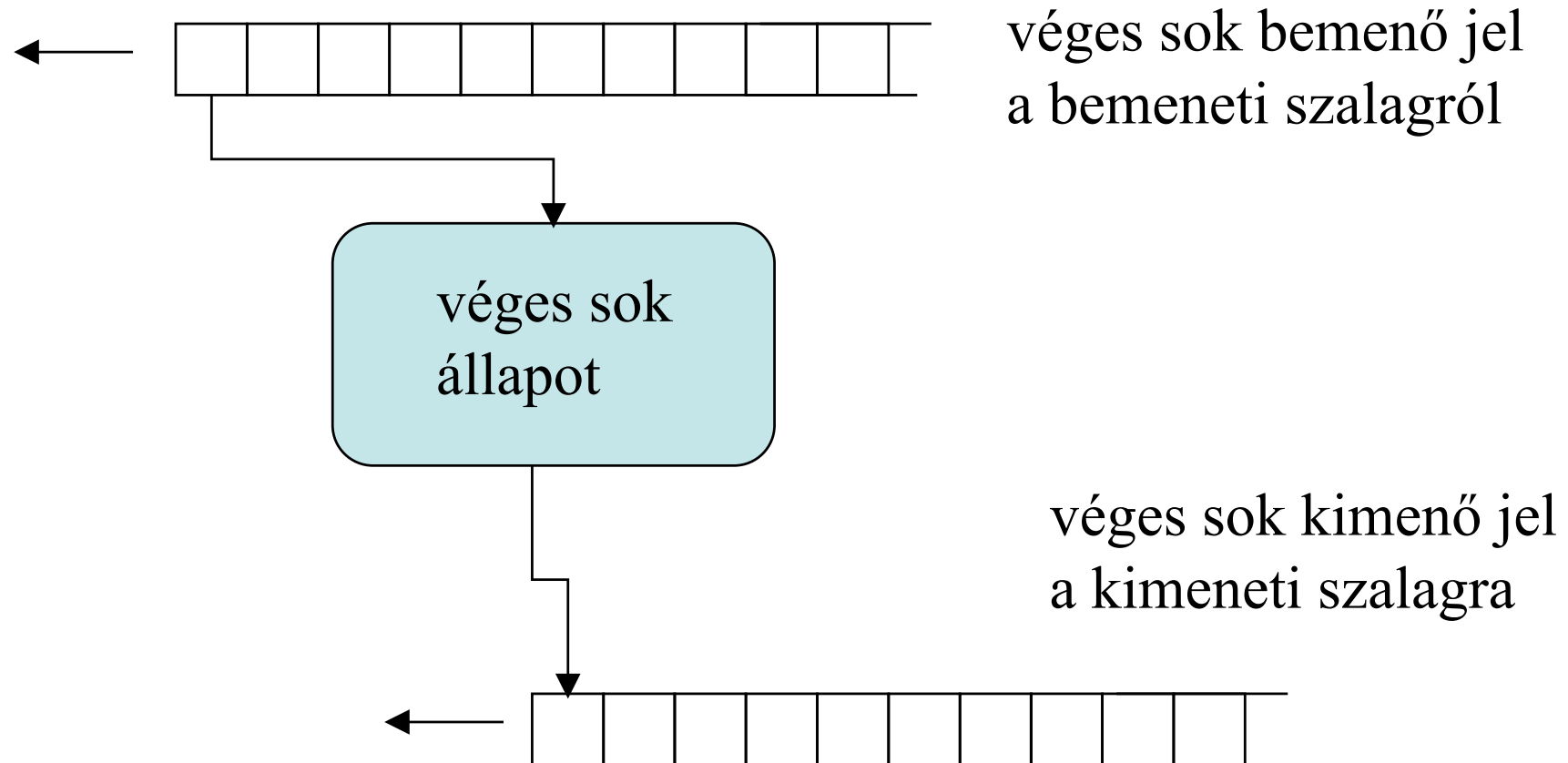
Mivel:

KONVERTÁL(G') ekvivalens G -vel, az indukciós feltevés miatt,

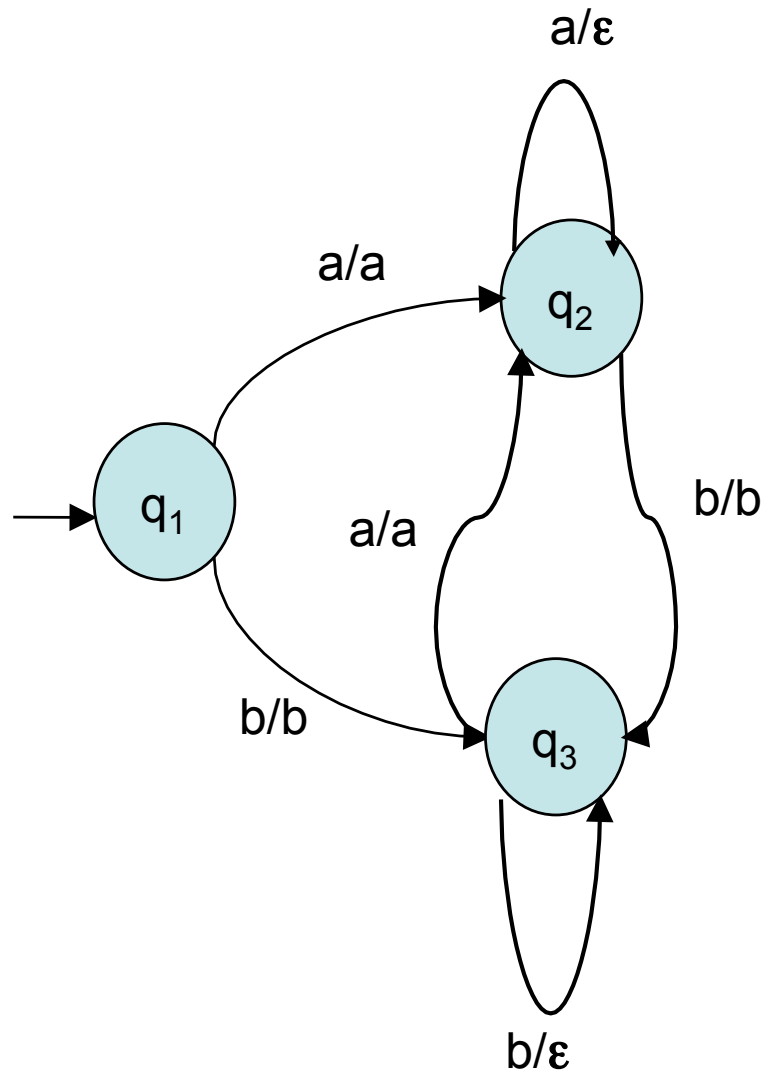
és $L(G) = L(G')$,

ezért KONVERTÁL(G) ekvivalens G -vel.

Véges átalakítók



Véges átalakítók



aaaaa

a

aba

aba

aaaabbaba

ababa

Véges átalakítók

Definíció: Véges átalakító (fordító)

$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0)$ ahol:

1. Q , egy véges halmaz az **állapotok** halmaza
2. Σ egy véges halmaz, a **bemeneti abc**
3. Γ egy véges halmaz, a **kimeneti abc**
4. $\delta: Q \times \Sigma \rightarrow Q \times \Gamma$ az **állapotátmenet függvény**
5. $q_0 \in Q$ a **kezdeti állapot**

Miről volt szó eddig?

- formális nyelv fogalma
- műveletek formális nyelvekkel
- reguláris nyelvek
- determinisztikus véges automata
- nemdeterminisztikus va
- dva, ndva által felismert nyelv
- $\mathcal{L}_N = \mathcal{L}_D$
- $\mathcal{L}_R = \mathcal{L}_D$
- véges fordítók