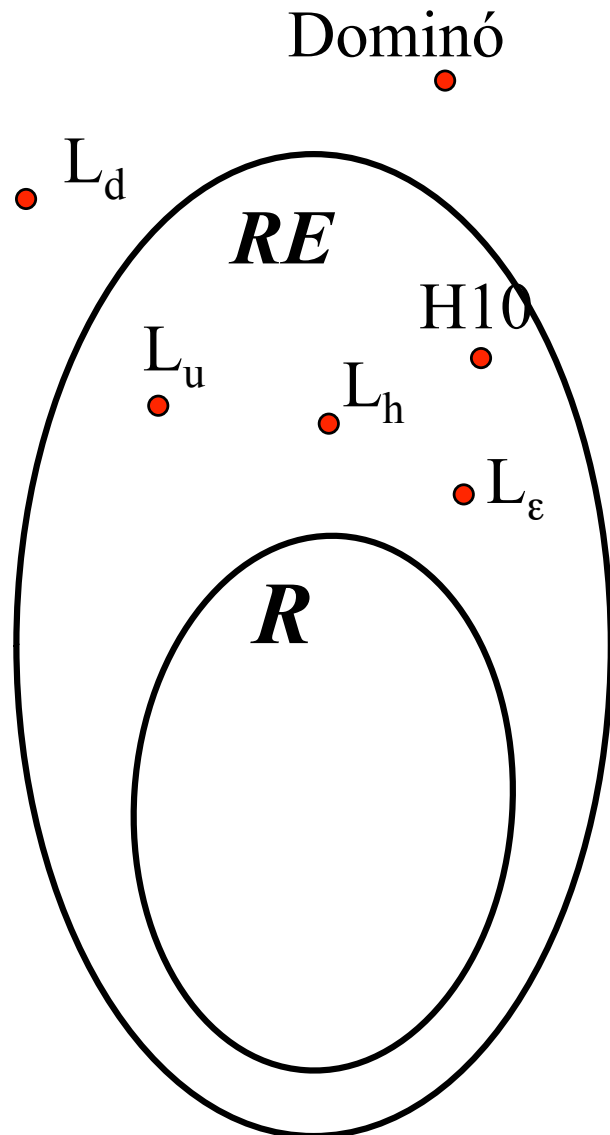


A digitális számítás elmélete

8. előadás március 28.

- Turing gépek és nyelvtanok
- A nyelvosztályok áttekintése
- Turing gépek és a természetes számokon értelmezett függvények

Áttekintés



Bizonyítások:

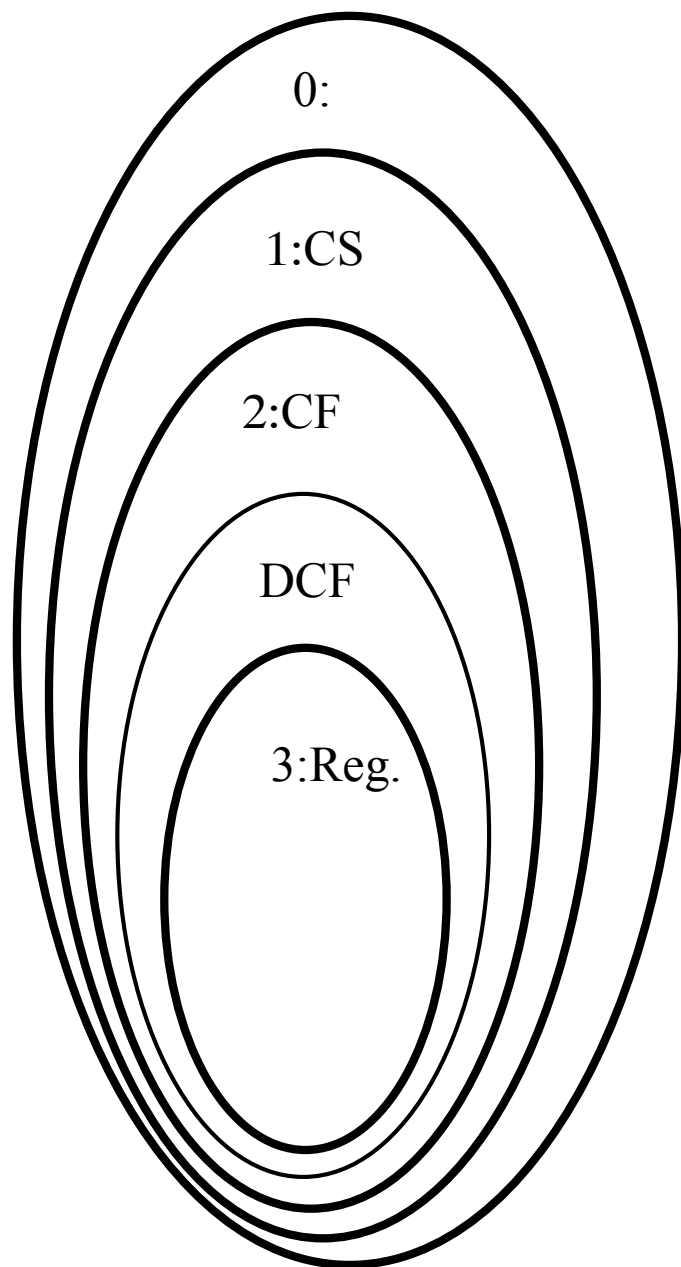
$L_d \notin RE$ Indirekte, közvetlenül Cantor diag.
elv.

$L_u \in R$ -ből következne, hogy $L_d \in RE$

$L_h \in R$ -ből következne, hogy $L_u \in R$

$L_\epsilon \in R$ -ből következne, hogy $L_h \in R$

Grammatikával generálható nyelvek (ism)



Generatív grammatikák (ism)

Definíció: Egy $G = (V, \Sigma, R, S)$ négyes generatív grammatika, ahol:

- V egy véges halmaz, a **grammatikai változók vagy nemterminálisok** halmaza,
- Σ egy véges halmaz, diszjunkt V -vel, a **terminálisok halmaza**,
- R egy véges halmaz, a **levezetési szabályok halmaza**, ahol egy levezetési szabály alakja

$$\alpha \rightarrow \beta$$

ahol α és β terminálisok és nemterminálisok sorozata,

- $S \in V$ a **kezdő- vagy mondatszimbólum**.

Generatív grammatikák (ism)

Definíció: A $G = (V, \Sigma, R, S)$ grammatika **generálja az** $L \subseteq \Sigma^*$
nyelvet, ha $L = \{ w \in \Sigma^* \mid S \Rightarrow^* w \}$

Jelölés:

$L(G)$ a G **grammatika által generált nyelv.**

Chomsky-féle nyelvosztályok (ism)

A nyelvet generáló grammatika szabályaira tett megkötések alapján:

3-as nyelvosztály:

reguláris (Reg)

$A \rightarrow a, A \rightarrow aB$ alakú szabályok

2-es nyelvosztály:

környezetfüggetlen (CF)

$A \rightarrow \alpha$ alakú szabályok

1-es nyelvosztály

környezetfüggő (CS)

$\beta A \gamma \rightarrow \beta \alpha \gamma$ alakú szabályok

$\alpha \rightarrow \beta$ alakú szabályok ahol $|\alpha| \leq |\beta|$ nem csökkenő

megj: ezek ekvivalensek!

0-ás nyelvosztály:

tetszőleges alakú szabályok

Rekurzíve felsorolható és nyelvtannal generálható nyelvek kapcsolata

Tétel: A nyelvtannal generálható nyelvek osztálya megegyezik a rekurzíve felsorolható nyelvek osztályával. Azaz L nyelv akkor és csak akkor generálható grammatikával, ha van a nyelvet felismerő Turing -gép.

Biz: $\Rightarrow$ irány (a Turing-Church tézisből is következik/azt támasztja alá)

Megmutatjuk, hogy ha L grammatikával generálható, akkor van M TG, hogy $L(M)=L$.

Legyen $G = (V, \Sigma, R, S)$ grammatika mely L -et generálja.

A grammatika szerinti levezetés egy-egy lépését meghatározza, hogy mely szabályt alkalmazzuk, és annak bal oldalát az éppen aktuális mondatszerű forma hányadik elemére illesztjük.

Rekurzíve felsorolható és nyelvtannal generálható nyelvek kapcsolata

R	nem változik, a szabályok kódolt alakja
w	a bemeneti szó
S	a k lépéssel levezethető mondatszerű formák
	munkaszalag, a k-1 lépés eredménye

Négyszalagos, ‘univerzális’, nyelvtan szerinti levezetést szimuláló
TG-et határozzunk meg.

M működése:

1. Átmásolja a 3. szalagot a 4-re, majd törli 3 tartalmát.
2. A 4. szalagon szereplő minden egyes mondatszerű formára:
 - a) Minden egyes $\alpha \rightarrow \beta$ szabályra megkeresi mindazon helyeket a mondatszerű formában, ahol α előfordul.
 - b) Minden egyes ilyen esetben a mondatszerű formát úgy toldja hozzá a 3. szalagon szereplő sorozatokhoz, hogy elválasztójel után a mondatszerű forma megfelelő helyén α helyett β szerepel.
3. Megvizsgálja, hogy a 4. szalagon szerepel-e w -vel azonos mondatszerű forma. Ha igen, elfogadó állapotban megáll, ha nem, 1-re lép.

M éppen a G grammatika által generált szavakat fogja elfogadni.

Rekurzíve felsorolható és nyelvtannal generálható nyelvek kapcsolata

Biz: $\Leftarrow$ irány (vázlat)

Egy $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{elfogad}}, q_{\text{elutasít}})$ TG-hez megkonstruáljuk azt a $G = (V, \Sigma, R, S)$ grammatikát, amely éppen $L(M)$ -et generálja.

Feltesszük, hogy ha M megáll, akkor a szalag üres. (Ezek nem megszorító feltevések, mivel egy tetszőleges TG-hez megadható vele ekvivalens ilyen TG.)

M működése során egy pillanatnyi konfigurációt megadunk egy jelsorozattal: $u p v$, ahol p egy állapot, uv a szalagon levő sorozat a végtelen sok $_$ jel előtt, a fej v első elemén áll.

Például, az $x a p b y$ konfiguráció rákövetkezője az $x a c q y$, ha $\delta(p, b) = (q, c, J)$ (a fej jobbra lépett)

Rekurzíve felsorolható és nyelvtannal generálható nyelvek kapcsolata

A G grammatika V változói Q és Σ szimbólumai, valamint S és határ szimbólum.

A szabályok M működését visszafelé írják le:

1. Ha $\delta(p, a) = (q, b, J)$, akkor $b \ q \rightarrow p \ a$
2. Ha $\delta(p, a) = (q, b, B)$, akkor $q \ b \rightarrow p \ a$
3. Szabályok az input elé és után beszúrt üres ill. határ szimbólumok törlésére

Az egyetlen elfogadó állapot felel meg a kezdő szimbólumnak:

$S \rightarrow q_{\text{elfogad}} _$

Ha M egy inputra az elfogadó állapotba érkezik, akkor az input levezethető a fenti szabályokkal, és szó levezetésnek megfelel M konfigurációinak egy sorozata, amely a szót mint inputot a végállapotba viszi. Tehát G éppen $L(M)$ -et generálja.

Környezetfüggő nyelvtannal generálható nyelvek felismerése TG-pel

Mi a helyzet az 1-es (CS) nyelvosztállyal?

Def: **Lineárisan korlátozott TG** egy olyan, speciális TG, mely a szalagnak csak a bemeneti által elfoglalt részét használja.

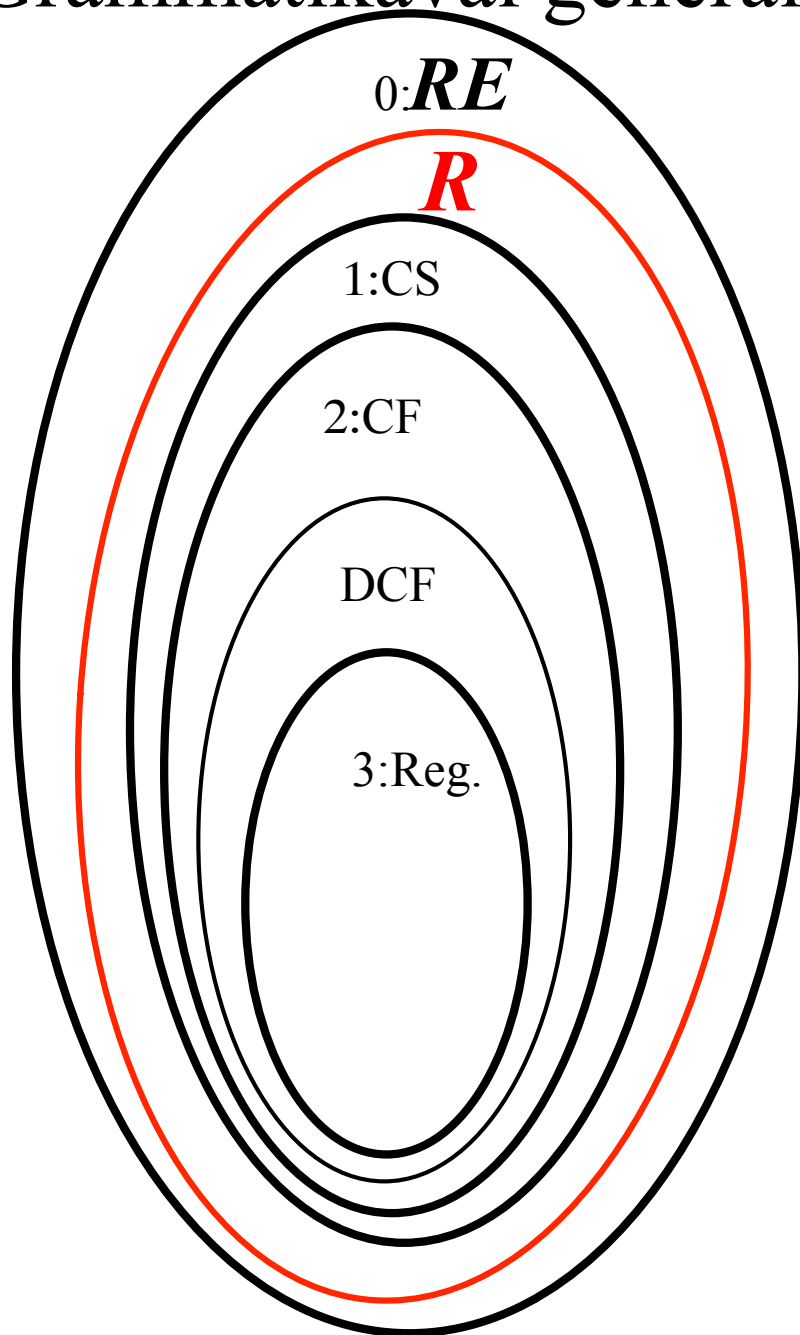
Tétel: A környezetfüggő nyelvtannal generálható nyelvek osztálya (CS) megegyezik a lineárisan korlátozott TG-pel felismerhető nyelvek osztályával.

Biz: nem részletezzük

Tétel: A környezetfüggő nyelvtannal generálható nyelvek osztálya (CS) valódi részhalmaza a rekurzív nyelvek osztályának.

Biz: nem részletezzük

Grammatikával generálható nyelvek összevetése



Numerikus függvények

A nemnegatív egészeket N jelöli. N^k -en értelmezett, N értékű függvényeket vizsgálunk.

$$\text{Pl. } f(n, m) = m n^2 + 3 m^{2m+17}$$

A fv értékét úgy számítjuk ki, hogy a kifejezéseit visszavezetjük alap kifejezésekre (pl. szorzás) és alacsonyabb kitevőjű kifejezésekre,

$$\text{pl: } m^n = m m^{n-1}$$

Numerikus függvények

Def: Az **alap függvények** a következők:

- a) $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ rákövetkező fv: $\text{succ}(\mathbf{n}) = n+1.$
- b) $\mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ ($k \geq 0$) k -változós záro fv: $\text{zero}_k(\mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_k) = 0.$
- c) $\mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ ($k \geq 0$) k -változós j -dik identitás fv: $\text{id}_{k,j}(\mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_k) = n_j.$

Bonyolultabb függvényeket a következő módokon kombinálunk:

Def: Legyen $k, m \geq 0$, és adottak a $g: \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ illetve

$h_1, \dots, h_k: \mathbb{N}^m \rightarrow \mathbb{N}$ függvények. Ekkor **g kompozíciója a**

$h_1, \dots, h_k$ függvényekkel az az $f: \mathbb{N}^m \rightarrow \mathbb{N}$ fv, melyre:

$$f(n_1, \dots, n_m) = g(h_1(n_1, \dots, n_m), \dots, h_k(n_1, \dots, n_m)).$$

Numerikus függvények

Def: Legyen $k \geq 0$, és adottak a $g: \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ illetve

$h: \mathbb{N}^{k+2} \rightarrow \mathbb{N}$ függvények. Ekkor **g és h által rekurzívan definiált függvény** az az $f: \mathbb{N}^{k+1} \rightarrow \mathbb{N}$ fv, melyre:

$$f(n_1, \dots, n_k, \mathbf{0}) = g(n_1, \dots, n_k).$$

$$f(n_1, \dots, n_k, \mathbf{m+1}) = h(n_1, \dots, n_k, m, f(n_1, \dots, n_k, \mathbf{m})).$$

Def: A **primitív rekurzív függvények** az alap függvények, és a belőlük tetszőleges, véges számú kompozícióval és rekurzióval származtatott függvények.

Numerikus függvények

1. pl: $\text{plus}(n,m) = n+m$ függvény rekurzív definíciója:

$$\text{plus}(n,0)=n, \text{plus}(n,m+1)=\text{plus}(n,m)+1.$$

Primitív rekurzív függvényként:

$$k=1, \quad g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \quad g(n) = \text{id}_{1,1}(n) = n,$$

$$h: \mathbb{N}^3 \rightarrow \mathbb{N}, \quad h(n,m,p) = \text{succ}(\text{id}_{3,3}(n,m,p)).$$

Ekkor g és h által rekurzívan definiált $\text{plus}: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ fv, melyre:

$$\text{plus}(n, 0) = g(n) = \text{id}_{1,1}(n) = n.$$

$$\begin{aligned} \text{plus}(n, m+1) &= h(n, m, \text{plus}(n, m)) = \text{succ}(\text{id}_{3,3}(n, m, \text{plus}(n, m))) \\ &= \text{succ}(\text{plus}(n, m)). \end{aligned}$$

Numerikus függvények

2. Pl: $\text{mult}(n,m)=nm$ függvény rekurzív definíciója:

$$\text{mult}(n, 0)=0, \text{mult}(n, m+1)=\text{plus}(n, \text{mult}(m,n)).$$

Primitív rekurzív függvényként:

$$\text{mult}(n,0) = \text{zero}(n),$$

$$\text{mult}(n,m+1) = h(n,m,\text{mult}(n,m))=\text{plus}(n,\text{mult}(m,n))$$

3. Pl: $\text{exp}(n, 0) = \text{succ}(\text{zero}(n)).$

$$\text{exp}(n, m+1) = \text{mult}(n, \text{exp}(n,m)).$$

Numerikus függvények

Tétel: A primitív rekurzív függvények számossága megszámlálhatóan végtelen.

Biz: A primitív rekurzív függvények megadhatók az alap függvények, a kompozíció és rekurzió, valamint zárójelek és term. számok szimbólumaiból álló véges sorozatokkal, ilyenből megsz. végtelen van.

Tétel: Nem minden kiszámítható fv. primitív rekurzív.

Biz: Cantor-féle átlós módszerrel, unáris fv-ekre

Soroljuk fel az összes primitív rekurzív unáris függvényt,

$f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$

Legyen g az az unáris fv, melyre $g(n) = f_n(n) + 1$

Numerikus függvények

A g fv kiszámítható, és különbözik minden f_n -től, ugyanis $g(n) \neq f_n(n)$.

Példa totális, kiszámítható nem primitív rekurzív függvényre:

az Ackermann függvény.

$A(m,n) =$

$n+1$, ha $m=0$,

$A(m-1,1)$, ha $m>0$ és $n=0$,

$A(m-1,A(m,n-1))$, ha $m>0$ és $n>0$.

Numerikus függvények

Def: Legyen $k \geq 0$. A $g: \mathbb{N}^{k+1} \rightarrow \mathbb{N}$ függvény **minimalizációja** az az $f: \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ függvény, melyet a következő módon értelmezünk:

$f(n_1, \dots, n_k) =$ a legkisebb m , melyre $g(n_1, \dots, n_k, m) = 1$,

ha van ilyen m

$f(n_1, \dots, n_k) = 0$ különben.

Numerikus függvények

Megj: A $g: \mathbb{N}^{k+1} \rightarrow \mathbb{N}$ függvény minimalizációja jól definiált, de nincs módszer a kiszámítására.

$m := 0,$

while $g(n_1, \dots, n_k, m) \neq 1$ do $m := m + 1,$

output m .

Nem algoritmus, mivel nem feltétlenül áll meg.

Def: Legyen $k \geq 0$. A $g: \mathbb{N}^{k+1} \rightarrow \mathbb{N}$ függvény **minimalizálható**, ha a fenti eljárás mindig megáll, azaz minden $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$ esetén van olyan $m \in \mathbb{N}$, hogy $g(n_1, \dots, n_k, m) = 1$.

Def: Egy f fv **μ -rekurzív**, ha előállítható az alap függvényekből a kompozíció, a rekurzió és a minimalizáció operátorokkal, az utóbbit minimalizálható függvényre alkalmazva.

Numerikus függvények

Tétel: Az $f: \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ függvény μ -rekurzív akkor és csak akkor, ha rekurzív, azaz kiszámítható Turing géppel.

Biz: nem részletezzük