

A digitális számítás elmélete

6. előadás március 21.

- Turing gép variációk és ekvivalenciájuk az alap géppel

Múlt óra:

- fej helyben maradhat
- több szalag
- nem determinisztikus állapotátmenet

Mai óra:

- felsoroló (enumerator)

- Függvényszámítás Turing géppel, Hilbert 10-edik problémája, Church-Turing tézis.

Turing gép variációk: nem determinisztikus TG

Ismétlés: Minden nemdeterminisztikus Turing-géphez van vele ekvivalens determinisztikus Turing-gép.

Következmény: Egy L nyelv pontosan akkor **Turing felismerhető**, ha van ND TG mely felismeri.

Def: Egy N ND TG eldöntő, ha mindig megáll q_i -ben vagy q_n -ben (minden ágon).

Tétel: Egy L nyelv **Turing eldönthető** akkor és csak akkor, ha van ND TG, mely eldönti.

Turing gép variációk: felsoroló TG

Definíció: Felsoroló Turing gép

$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{elfogad}}, q_{\text{elutasít}})$ ahol:

1. ...
2. nincsenek bemeneti sorozatok, csak munkaszalag
3. ...
4. $\delta: Q \times \Gamma \rightarrow (Q \times \Gamma \times \{J, B\} \times \Sigma^*)$ az **állapotátmenet függvény**,
ahol a Σ^* -beli sorozatok a **felsorolt (kinyomtatott) sorozatok**.
5. ...
6. ...
7. ...

Megj: Az összes felsorolt elemek (egyesek esetleg többször is) alkotják a
TG által felsorolt nyelvet.

Turing gép variációk: felsoroló TG

Tétel: Egy L nyelvet felsoroló E TG-hez létezik egy N TG, mely éppen L -et ismeri fel, és viszont.

Biz: E -hez N

Legyen N egy kétszalagos TG, ahol az első szalagra a bemeneti sorozat kerül, a másodikra íródik mindig az E által felsorolt új sorozat. N elfogadja a w inputot, ha az egy, a második szalagra kiírt sorozattal azonos. N -hez van S ekvivalens TG.

Turing gép variációk: felsoroló TG

M-hez E

Legyen A az S által felismert nyelv. Legyen $s_1, s_2, \dots, s_n, \dots$ az összes lehetséges Σ^* -beli sorozat. E a következő képen működik:

1. $i=1,2,3,\dots$ ra ismételi:
2. Szimulálja M -met i lépésig, az $s_1, s_2, \dots, s_i$ szavakon.
3. Ha elfogadó állapotba ér M , kinyomtatja a megfelelő s_j szót.

Turing gép variációk: további példák

- két irányban végtelen szalag
- 2 dimenziós szalag
- több fej
- több elutasító és elfogadó állapot
- RAM (random access machine)
- Kétvermes automata, kétszámlálós gép, ...

A fentiek mind ekvivalensek az alap TG-ekkel. Egy adott fajta TG-hez konstruálható vele ekvivalens alap TG.

Függvényyszámítás Turing géppel

Definíció: $x \in \Sigma^*$ kezdeti bemeneti sorozatra az M Turing gép

outputja az $y \in \Sigma^*$ sorozat, ha M megáll az x inputra, és megállásakor a szalagon éppen y szerepel (az üres szimbólumok előtt), valamint a fej ismét az első pozíción áll.

Ezt a tényt $y = M(x)$ jelöli.

Definíció: Az M által kiszámított fv az a

$f_M: \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ parciálisan értelmezett fv, mely minden x -en értelmezett, melyre van y , hogy $y = M(x)$.

Definíció: Egy $f: \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ parciális függvény **parciálisan rekurzív**,

ha van M TG, hogy $f = f_M$.

Ha ezen felül f minden Σ^* -ra értelmezve van, akkor f **rekurzív**.

Függvényyszámítás Turing géppel

Megj: Tetszőleges n természetes szám egyértelműen felírható mint

$\mathcal{B} = 0 \cup 1(0 \cup 1)^*$ eleme, ezt $\text{bin}(n) = w$, illetve $\text{num}(w) = n$ jelöli.

Minden, a természetes számokon értelmezett, és természetes szám értékű fv tekinthető egy $f: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ függvénynek.

Továbbá minden, k -dimenziós $\mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ függvény tekinthető egy $f: \mathcal{B}^k \rightarrow \mathcal{B}$ függvénynek.

Definíció: $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{elfogad}}, q_{\text{elutasít}})$ TG, $0, 1, ; \in \Sigma$ M

kiszámítja az $f: \mathcal{B}^k \rightarrow \mathcal{B}$ függvényt, ha tetszőleges $w_1, \dots, w_k \in \mathcal{B}$

esetén a $w = w_1 ; \dots ; w_k$ sorozatra $M(w) = u$, ahol

$u = f(w_1, \dots, w_k)$.

Church-Turing tézis

Algoritmus: véges sok lépéssel kiszámít egy fv-t, eldönt egy kérdést.

Megvalósítható-e minden algoritmus Turing géppel?

Church-Turing tézis: Ami algoritmussal kiszámítható/eldönthető, az

Turing kiszámítható/eldönthető. Nevezetesen:

- Egy $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ parciális fv algoritmussal kiszámítható $\Leftrightarrow$ f parciálisan rekurzív.
- Egy $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ teljes fv algoritmussal kiszámítható $\Leftrightarrow f$ rekurzív.
- Egy L nyelvre a nyelvbe való tartozás problémája algoritmussal eldönthető $\Leftrightarrow$ a nyelv rekurzív.

Church-Turing tézis

Tudunk-e eldönthetetlen problémákról?

Hilbert 10 problémája: Diofantikus egyenletek általános

megoldhatósága: adjunk algoritmust, mely tetszőleges d . e -re eldönti, hogy az megoldható-e.

$f(x_1, \dots, x_n) = 0$ egész megoldását keressük,

ahol $f(x_1, \dots, x_n)$ egész együtthatós, n változós polinom.

Általában: NINCS algoritmus (Matijasevics, 1970), H. 10 eldönthetetlen.

Church-Turing tézis

1. Megj: H10 Turing-felismerhető!

Az összes szám n -est sorra véve teszteljük, hogy megoldás-e. Ha van mo, az véges sok lépésben kiderül. De ha nincs, az nem.

2. Megj: Egyváltozós polinomok esetében a probléma eldönthető, mivel a lehetséges gyökök korlátozottak:

$$\pm k \frac{c_{\max}}{c_1}$$

(k : a tagok száma, $c_{\max}$: a legnagyobb abszolút értékű eh., c_1 : a legnagyobb kitevőjű tag eh.-ja.)

Miről volt szó ?

- Turing gép variációk, ekvivalenciájuk az alap géppel
 - fej helyben maradhat
 - több szalag
 - nem determinisztikus állapotátmenet
 - felsoroló (enumerator)
 - RAM
- Függvényszámítás Turing géppel
- Hilbert 10-dik problémája
- Church-Turing tézis