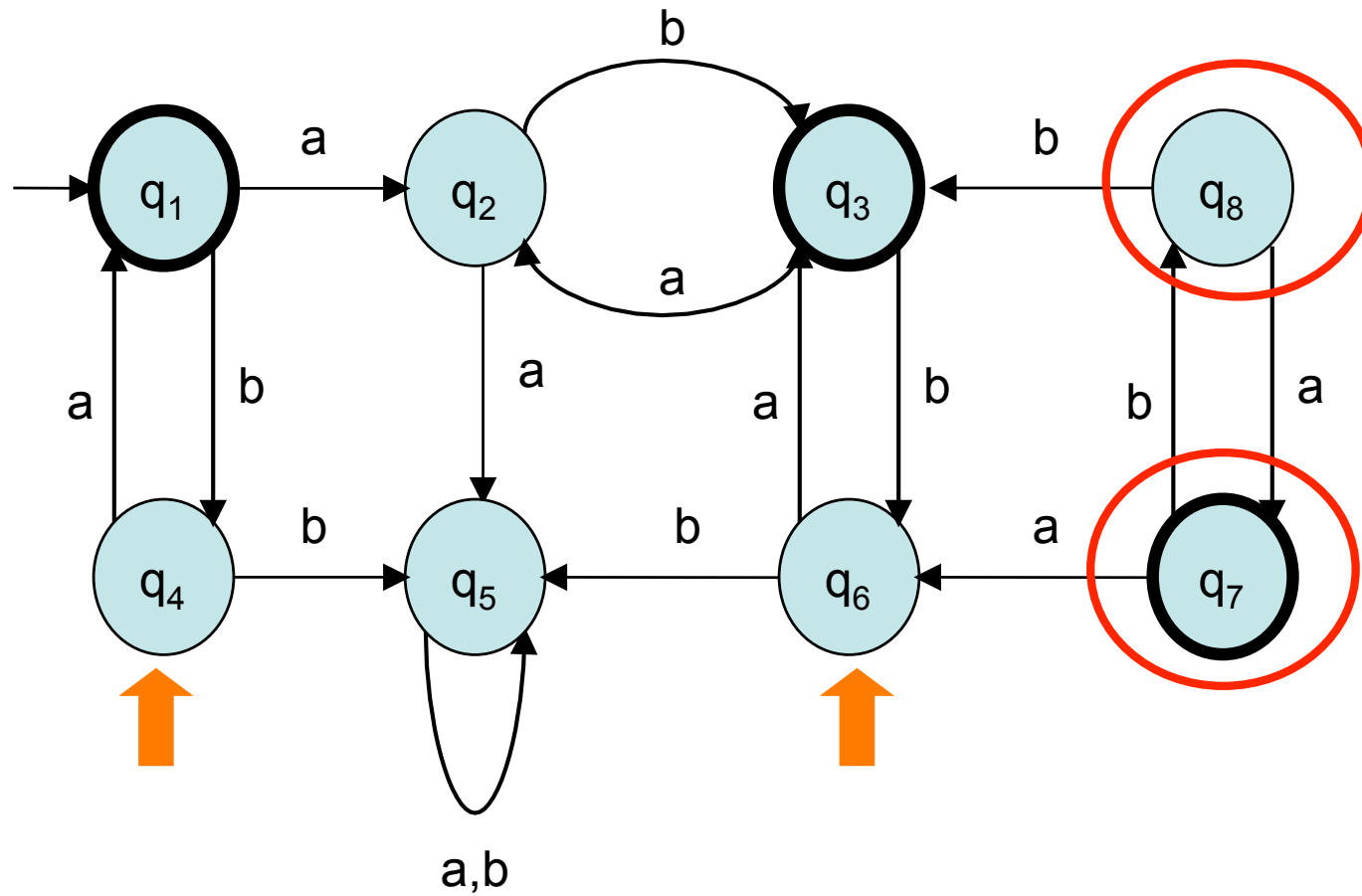


A digitális számítás elmélete

2. előadás 2017. febr. 21.

- Egy reguláris nyelvet felismerő minimális dva
- A dva nem elég: vannak nemreguláris nyelvek
- Reguláris nyelvek jellemzése a ‘pumpáló lemmával’

Minimális dva



$$L(M) = (ab \cup ba)^*$$

Minimális dva

Definíció: Legyen $L \subseteq \Sigma^*$ egy nyelv. $x, y \in \Sigma^*$ **L-re nézve ekvivalensek**, ha $\forall z \in \Sigma^*$ esetén igaz, hogy:
 $xz \in L$ akkor és csak akkor (csakkor), ha $yz \in L$.

Ezt a relációt $\approx_L$ -vel jelöljük.

Megj: $\approx_L$ **ekvivalencia reláció** Σ^* -on, mely **ekvivalencia osztályokra** bontja Σ^* -t.

Egy $x \in \Sigma^*$ ekvivalencia osztályát $[x]$ jelöli.

Minimális dva

P1: $L = (ab \cup ba)^*$ esetén a $\Sigma^* \approx_L$ szerinti ekvivalencia osztályai:

1. $[\varepsilon] = L$
2. $[a] = La$
3. $[b] = Lb$
4. $[aa] = L(aa \cup bb)\Sigma^*$

Ugyanis igaz, hogy:

- a) a fenti halmazok ekvivalencia osztályok
- b) különböznek
- c) együtt kiadják Σ^* -t

Minimális dva

a) a halmazok $\approx_L$ szerinti ekvivalencia osztályok, azaz $\forall z \in \Sigma^*$
 esetén: $xz \in L$ csakkor, ha $yz \in L$, ahol $L = (ab \cup ba)^*$

1. $[\varepsilon] = L$, $x = \varepsilon$, $y \in L$

$\varepsilon z = z \in L$ csakkor, ha $yz \in L$

2. $[a] = La$, $x = a$, $y \in La$

$az \in L$ csakkor, ha $yz \in L$

$a(b(..)(..) \dots (..))$ $(..) (..) \dots (..)a(b(..)(..) \dots (..))$

3. mint 2

4. $[aa] = L(aa \cup bb)\Sigma^*$, $x = aa$, $y \in L(aa \cup bb)\Sigma^*$

$aa z \in L$ semmilyen z -re, $yz \in L$ semmilyen z -re

Minimális dva

Definíció: Legyen $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ dva.

$(r, x) \in Q \times \Sigma^*$, **M egy konfigurációja**

Definíció: Legyen $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ dva, (r, x) egy konfiguráció.

(r, x) **rákövetkezője** az (r', x') konfiguráció, ha:

- $ax' = x$, ahol $a \in \Sigma$,
- $\delta(r, a) = r'$.

Jelölés: $(r, x) \vdash_M (r', x')$.

Definíció: $(r, x) \vdash_M^* (r', x')$, **(r, x) –ből (r', x') elérhető**, ha

$(r, x) \vdash_M (r_1, y_1) \vdash_M \dots (r_k, y_k) \vdash_M (r', x')$ valamely $k \geq 0$.

Minimális dva

Definíció: Legyen $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ dva. $x, y \in \Sigma^*$ **M-re nézve**

ekvivalensek, ha $\exists q \in Q$ hogy

$$(q_0, x) \vdash_M^* (q, \varepsilon) \text{ és } (q_0, y) \vdash_M^* (q, \varepsilon)$$

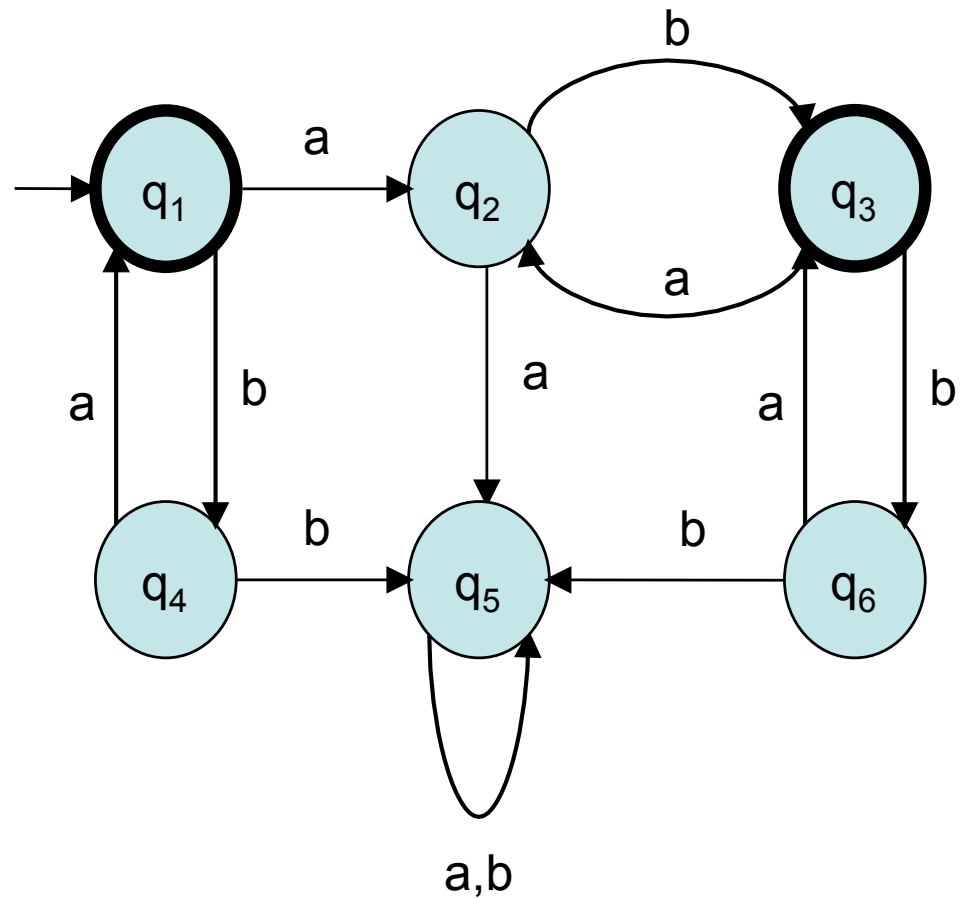
Ezt a relációt $\sim_M$ -vel jelöljük.

Megj: $\sim_M$ **ekvivalencia reláció** Σ^* -on.

Jelölés: Minden q elérhető állapothoz egy-egy Σ^* -részhalmaza
ekvivalencia osztály tartozik, ezt $[q]$ jelöli.

Minimális dva

1. $[q_1] = (ba)^*$
2. $[q_2] = La$
3. $[q_3] = abL$
4. $[q_4] = b(ab)^*$
5. $[q_5] = L(bb \cup aa) \Sigma^*$
6. $[q_6] = abLb$



Belátása hf.

Minimális dva

Tétel: Legyen $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ dva. Ekkor $\forall x, y \in \Sigma^*$ esetén:

$$x \sim_M y \Rightarrow x \approx_{L(M)} y$$

Biz: $x \in \Sigma^*$ esetén legyen $q(x)$ az az állapot, melyre

$$(q_0, x) \vdash_M^* (q(x), \varepsilon)$$

Így $x, z \in \Sigma^*$ esetén $xz \in L(M)$ akkor és csak akkor, ha

$$(q(x), z) \vdash_M^* (q', \varepsilon), \text{ ahol } q' \in F.$$

De $x \sim_M y \Rightarrow q(x) = q(y)$, tehát

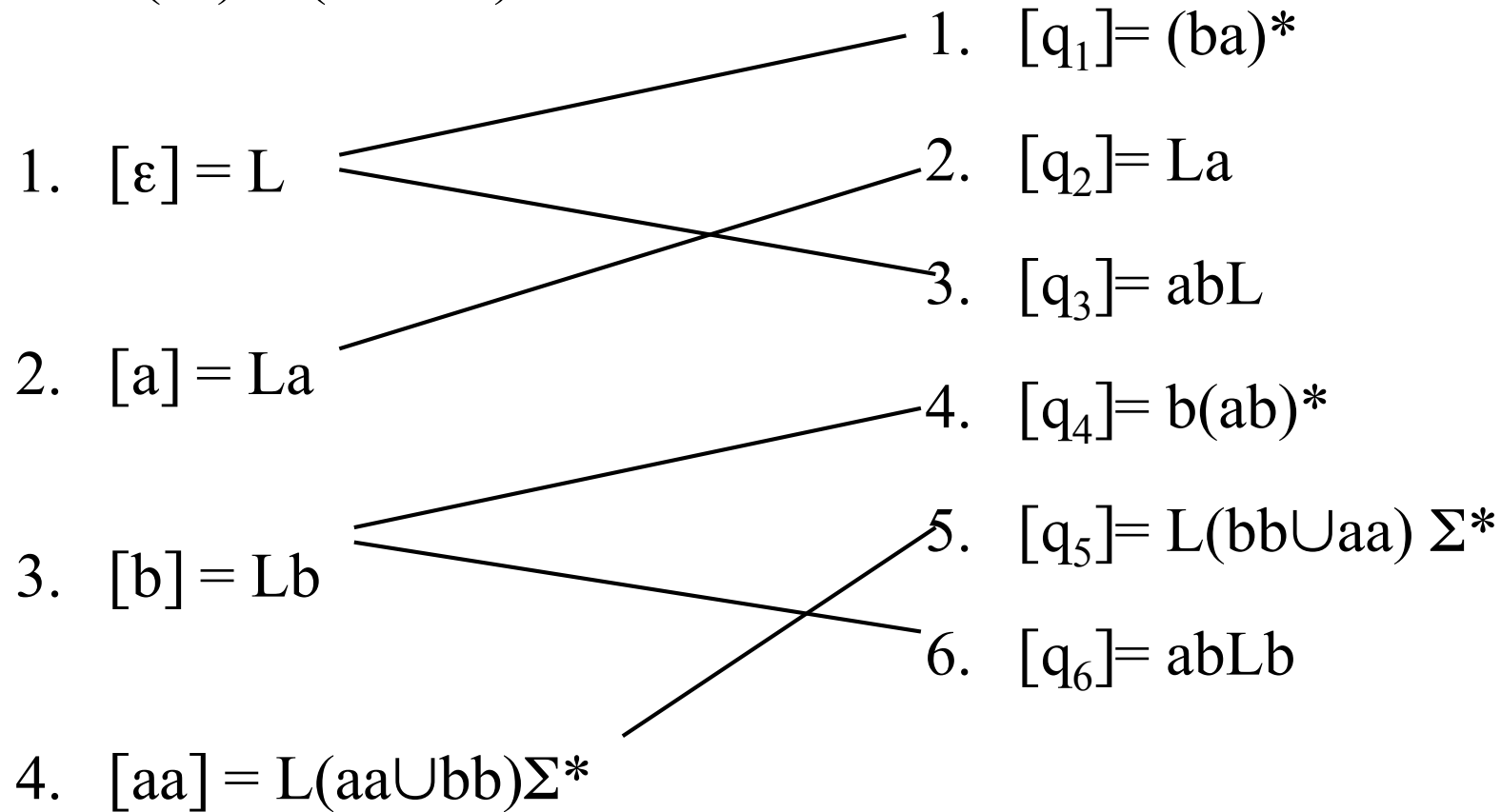
$xz \in L(M)$ akkor és csak akkor, ha $yz \in L(M) \forall z \in \Sigma^*$ esetén.

Azaz $x \approx_{L(M)} y$.

Minimális dva

$\sim_M$ finomítása $\approx_{L(M)}$ -nek

P1: $L(M) = (ab \cup ba)^*$



Minimális dva

Tétel: Ha $L \subseteq \Sigma^*$ egy reguláris nyelv, akkor

$\exists M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ dva, hogy $L(M) = L$, és állapotainak száma, n éppen az $\approx_L$ reláció által meghatározott ekvivalencia osztályok száma. M , az állapotainak számozásától eltekintve, egyértelmű.

Biz: Legyen

- $Q = \{ [x] \mid x \in \Sigma^* \}$
- $q_0 = [\varepsilon]$
- $F = \{ [x] \mid x \in L \}$
- $\delta([x], a) = [xa]$

Minimális dva

- $Q = \{ [x] \mid x \in \Sigma^* \}$ véges, ugyanis mivel L reguláris, $\exists M'$ dva, hogy $L = L(M')$. De láttuk, hogy $\sim_{M'}$ finomítása $\approx_L$ -nek, így $\approx_L$ -nek maximum annyi ekvivalencia osztálya van, mint $\sim_{M'}$ -nek, ami pedig véges.

- $\delta([x], a) = [xa]$ jól definiált, azaz ha $x' \in [x]$, akkor $[xa] = [x'a]$

De $xa \approx_L x'a$ csak akkor ha $x \approx_L x'$

- Minden $x, y \in \Sigma^* : ([x], y) \vdash_M^* ([xy], \varepsilon)$

Biz.: y hossza szerinti teljes indukcióval.

$y = \varepsilon$ esetén trivi.

Ind. feltevés: igaz max. n hosszú y -okra.

Ekkor $y = y'a$ -t tekintve és az indukciós feltevést

alkalmazva: $([x], y'a) \vdash_M^* ([xy'], a) \vdash_M ([xy'a], \varepsilon) = ([xy], \varepsilon)$.

Minimális dva

Megmutatjuk, hogy $L=L(M)$.

Minden $y \in \Sigma^*$ esetén:

$$y \in L(M) \iff ([\varepsilon], y) \vdash_M^* (q, \varepsilon), \text{ ahol } q \in F \iff [y] \in F \iff y \in L.$$

Köv: $L \subseteq \Sigma^*$ reguláris csakkor, ha az $\approx_L$ reláció által meghatározott ekvivalencia osztályok száma véges.

Melyik nyelv nem reguláris?

- $A_k = \{ 1^{nk} \mid n \geq 0 \} \in \mathcal{L}_R$
- $B = \{ 1^n \mid n \text{ prím} \}$
- $C = \{ w \mid \text{azonos számú 0 és 1 } w\text{-ben} \}$
- $D = \{ w \mid \text{azonos számú 01 és 10 részsorozat } w\text{-ben} \} \in \mathcal{L}_R \quad \text{HF!}$

Reguláris nyelvek jellemzése

Tétel (Pumpáló lemma, Bar-Hillel lemma):

Ha $L \subseteq \Sigma^*$ egy reguláris nyelv, akkor $\exists p \in \mathbb{N}$ szám, hogy

$\forall s \in L$ esetén, ha s hossza leglább p , akkor s felbontható

$s = xyz$ alakba úgy, hogy:

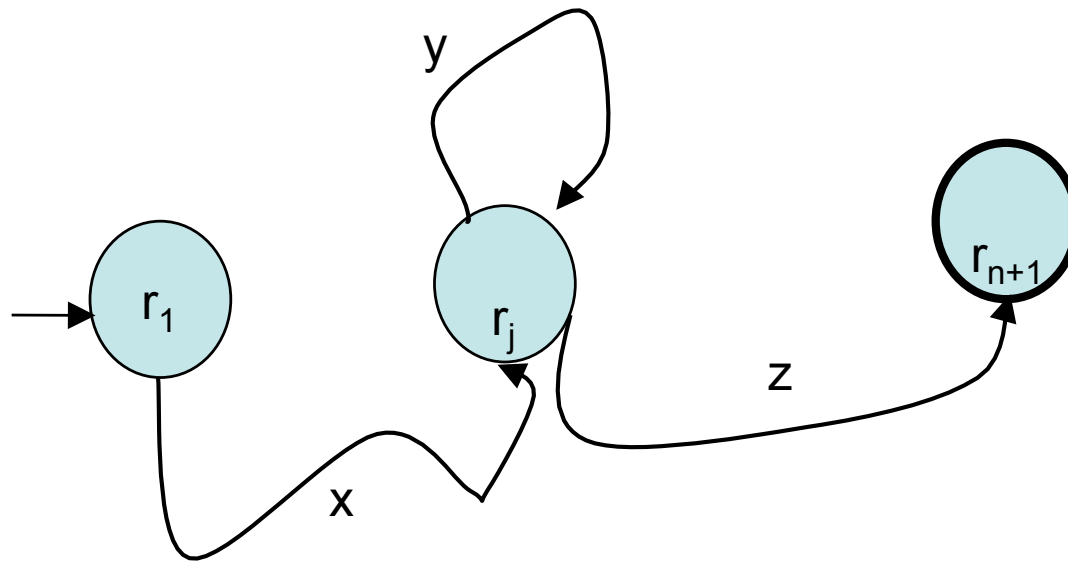
1. $xy^n z \in L$ minden $n \geq 0$ esetén,
2. $|y| > 0$,
3. $|xy| \leq p$.

Biz:

- $p = |Q|$ legyen.
- Legyen $s \in L$, $s = s_1 s_2 \dots s_n$, $p \leq n$. Az s -et elfogadó állapotok sorozata legyen $r = r_1 r_2 \dots r_{n+1}$, ekkor $p < n+1$. Tehát r tagjai között kell lennie legalább két azonosnak, a **skatulya elv** miatt. Jelölje ezeket r_j és r_k . Feltehetjük, hogy $k \leq p+1$.

Reguláris nyelvek jellemzése

- $X = s_1 s_2 \dots s_{j-1}, \quad y = s_j s_{j+1} \dots s_{k-1}, \quad Z = s_k s_{k+1} \dots s_n.$



1. $xy^n z \in L$ minden $n \geq 0$ esetén valóban,
2. $|y| > 0$, mert $j \neq k$,
3. $|xy| = k-1 \leq p$, mert $k \leq p+1$.

A pumpáló lemma használata

Pl: $C = \{ w \mid \text{azonos számú 0 és 1 } w\text{-ben} \}$ **nem** reguláris.

Biz:

A pumpáló lemmát használjuk, indirekten bizonyítunk.

Tfel, hogy C reguláris, ekkor p jelölje a pumpáló hosszt.

Legyen $s = 0^p 1^p$. Mivel $|s| \geq p$, a pumpáló lemma szerint $s = xyz$,
hogy

- $xy^n z \in L$ minden $n \geq 0$ esetén (1. feltétel),
- és $|xy| \leq p$. (3. feltétel)

Ekkor xy , így y is csupa 0-ból áll, és $|y| \geq 1$, tehát $xy^2 z \notin L$.

Azaz az indirekt feltevés hamis, az eredeti állítás az igaz.

Miről volt szó ma?

- Egy reguláris nyelvet felismerő minimális dva
- A dva nem elég: vannak nemreguláris nyelvek
- Reguláris nyelvek jellemzése a ‘pumpáló lemmával’
- A pumpáló lemma használata indirekt bizonyítással