

A digitális számítás elmélete

10. előadás április 25.

- NP nyelvosztály
- NP nyelvhez van polinomiális időben ellenőrizhető tanú
- NP-teljes problémák

Nemdeterminisztikus TG (ism)

Definíció: Nemdeterminisztikus **Turing gép (ND TG):**

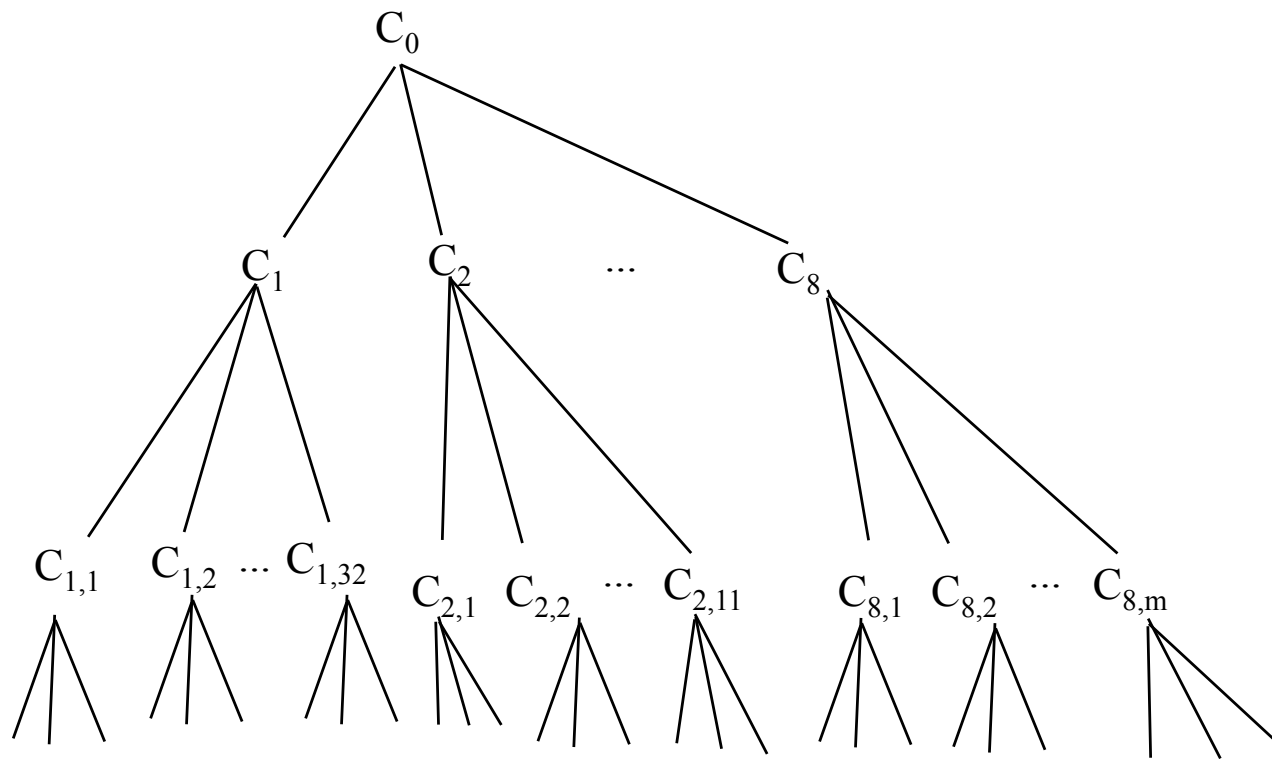
$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{elfogad}}, q_{\text{elutasít}})$ ahol:

1. ...
2. ...
3. ...
4. $\delta: Q \times \Gamma \rightarrow \mathcal{P}(Q \times \Gamma \times \{J, B\})$ az **állapotátmenet függvény**
5. ...
6. ...
7. ...

Megj: A ND TG működését fa írja le. Ha egy ágon az elért állapot elfogadó, akkor a ND TG elfogadta a kezdeti sorozatot.

Turing gép variációk: nemdeterminisztikus TG

Tétel: Minden M NDTG-hez van vele ekvivalens S TG. (volt)



Pl: 2,1,3 címke
melyik konfigurációnak felel meg?

NDTG időkorlátja

Definíció: Legyen $t: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ függvény olyan, hogy $t(n) \geq n$ minden n -re. Az M NDTG **$t(n)$ időkorlátos**, ha az n hosszú bemenetek esetén M minden számítási út mentén legfeljebb $t(n)$ lépést megtéve megáll. Azaz n hosszú bemenetek esetén legfeljebb $t(n) + 1$ mély a számítási fa.

Megj: Nem ismert olyan fizikai megvalósítás, mely $t(n)$ -nel arányos időben szimulálná egy $t(n)$ időkorlátos NDTG működését.

Definíció: $\text{NTIME}(t(n)) = \{L \subseteq I^* \mid L \text{ felismerhető egy } O(t(n)) \text{ időkorlátos } M \text{ NDTG-pel.}\}.$

Az **NP** nyelvosztály

Definíció: **NP** = $\bigcup_{k \geq 1} \text{NTIME}(n^k)$ a polinom időben
egyszalagos NDTG-pel eldönthető nyelvek osztálya.

1. Megj: **P** $\subseteq$ **NP**

mivel egy $t(n)$ időkorlátos TG tekinthető egy speciális, $t(n)$
időkorlátos NDTG-nek, így $\text{TIME}(n^k) \subseteq \text{NTIME}(n^k)$

2. Megj: **P** $\subset$ **NP** vagy **P** = **NP** ?

Nyitott kérdés, 1M \$ díj!

Az **NP** nyelv osztály

Tétel: $\mathbf{P} \subseteq \mathbf{NP} \cap \mathbf{coNP}$

Biz: $\mathbf{P} \subseteq \mathbf{NP}$ láttuk.

De a co operátor tartalmazás megőrző volta miatt ekkor

$$\mathbf{coP} \subseteq \mathbf{coNP}$$

Láttuk hogy $\mathbf{coP} = \mathbf{P}$, tehát $\mathbf{P} \subseteq \mathbf{coNP}$ is teljesül.

NP -be tartozás megmutatása bizonyítékkal

Állítás: $x \in L$

Tanú, bizonyíték: y

A bizonyíték:

- nem hosszú,
- hatékonyan ellenőrizhető!

P1.

Merlin lovagjai és udvarhölgyei - egy párosítás

Hamilton kör van-e a gráfban? – az összes csúcs egy sorozata

G gráf síkbarajzolható-e? – egy síkba lerajzolt gráf

NP –beli nyelvhez tartozás jó bizonyítéka

Egy NP-beli nyelv komplementere nem mindig NP-beli.

Pl:

Merlin lovagjai és udvarhölgyei nem házasíthatók össze

tanú adható: lovagok és hölgyek megfelelő részhalmazai

Nincs Hamilton kör a gráfban

tanú nem adható:

G gráf nem síkba rajzolható

tanu adható: valamelyik Kuratowski-gráf mint G részgráfja

Nem ismert, hogy $\text{co NP} = \text{NP}$ teljesül-e.

NP -be tartozás megmutatása bizonyítékkal

Def: Legyen L egy Σ feletti nyelv. L polinomiálisan bizonyítható, ha van olyan V algoritmus, hogy

$$L = \{w \mid V \text{ elfogadja } \langle w, c \rangle \text{ valamely } \Sigma^*\text{-beli } c\text{-re}\},$$

és V polinom idejű w hosszát tekintve.

Tétel: NP azokat a nyelveket tartalmazza, amelyek polinomiálisan bizonyíthatók.

NP –teljes problémák

Egy L NP-beli nyelv NP-teljes, ha ő a „legnehezebb” az NP-beli nyelvek közül.

1. Megj: ‘Elég’ az NP-teljes problémákat vizsgálni.
2. Megj: Egy NP-teljes problémára nem érdemes polinom idejű algoritmust keresni (mivel az a feltételezés, hogy $P \subset NP$).

Nevezetes **NP** –teljes problémák

Def: A és B Σ^* feletti nyelvek.

A polinom időben visszavezethető B-re, ha van

$f: \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ polinomiális időben kiszámítható fv, hogy

$$w \in A \Leftrightarrow f(w) \in B.$$

Ezt $A \leq_p B$ jelöli.

Tétel: Ha $A \leq_p B$ és $B \in P$, akkor $A \in P$.

Biz: Legyen M az a TG, mely polinom időben felismeri B-t.

Ekkor a következő N TG A-t ismeri fel polinom időben:

Nevezetes **NP** –teljes problémák

w input esetén N:

- Kiszámítja $f(w)$ -t,
- M-et futtatja $f(w)$ -n, és outputként M outputját adja.

Def: L **NP-teljes**, ha

- L NP-beli, és
- tetszőleges A NP-beli probléma polinom időben visszavezethető L-re.

Nevezetes NP –teljes problémák

Def: Bool változók igaz (1) vagy hamis (0) értéket vehetnek fel.

Def: Bool kifejezések:

és	vagy	nem
$0 \wedge 0 = 0$	$0 \vee 0 = 0$	$\neg 0 = 1$
$0 \wedge 1 = 0$	$0 \vee 1 = 1$	$\neg 1 = 0$
$1 \wedge 0 = 0$	$1 \vee 0 = 1$	
$1 \wedge 1 = 1$	$1 \vee 1 = 1$	

Pl: $\Phi = (\neg x \wedge y) \vee (x \wedge \neg z)$

$\text{SAT} = \{\Phi \mid \Phi \text{ kielégíthető Bool kifejezés}\},$

Nevezetes **NP** –teljes problémák

Tétel: Ha B NP-teljes és $B \in P$, akkor $NP = P$.

Biz: definíciókból köv.

Tétel: Ha B NP-teljes, C NP-beli, és $B \leq_p C$, akkor C is NP-teljes.

Biz: definíciókból köv.

Nevezetes **NP** –teljes problémák

Tétel: (Cook-Levin) $SAT \in P$ akkor és csak akkor, ha $NP = P$.

Másképp fogalmazva, SAT NP-teljes.

Biz: nem részletezzük

Def: $3SAT = \{ \Phi \mid$

$$\Phi = (a_1 \vee b_1 \vee c_1) \wedge (a_2 \vee b_2 \vee c_2) \wedge \dots \wedge (a_k \vee b_k \vee c_k)$$

valamely k -ra, ahol tetszőleges a_i, b_i, c_i egy Boole-változó vagy annak negáltja

Φ kielégíthető Boole-kifejezés}.

Tétel: 3SAT NP-teljes.

Biz: SAT polinom időben visszavezethető 3SAT-ra. (Nem részletezzük)

Nevezetes NP –teljes problémák

Tétel: VERTEX COVER (lefogható-e G minden éle legfeljebb k ponttal) NP-teljes.

Tétel: k-COLORABILITY (kiszínezhető-e G minden éle legfeljebb k színnel) NP-teljes $k \geq 3$ esetén.

Tétel: HAMPATH NP-teljes.

Biz: 3SAT polinom időben visszavezethető HAMPATH-ra.

Savitch tétele

Def. **NPSpace** = $\cup_{k \geq 1} \text{NSpace}(n^k)$, ahol

$\text{NSpace}(s(n)) = \{L \mid L \text{ felismerhető egy } O(s(n)) \text{ tárkorlátos } M \text{ nemdeterminisztikus TG-pel.}\}.$

Tétel. Ha $f(n) \geq O(\log_2(n))$, akkor

$$\text{NSpace}(f(n)) \subseteq \boxed{\text{D}}\text{SPACE}((f(n))^2).$$

Biz. (Vázlat) Egyrészt, Savitch megmutatta, hogy a $\text{PATH} \in \text{TIME}((\log_2(n))^2)$.

Savitch tétele

Másrészt, legyen N egy $f(n)$ tárigényű nemdet. TG. Az N konfigurációs gráfja egy n hosszú bemeneten $2^{O(f(n))}$ méretű, és ebben a gráfban kell egy determinisztikus TG-nek egy utat keresni a kezdőkonfigurációból egy elfogadó konfigurációba.

Savitch tétele alapján ez elvégezhető $(\log_2(2^{O(f(n))}))^2$ azaz $O((f(n))^2)$ tárral, ami bizonyítja az állítást.

Következmény. PSPACE=NPSPACE

Emlékeztetőül: az a sejtés, hogy $P \subset NP$.

Problémaosztályok tartalmazása

Tétel: $PSPACE \subseteq EXPTIME$

Biz (vázlat):

Legyen $L \in PSPACE$, és N egy L -et $f(n)$ tárral felismerő TG.

Korábban láttuk, hogy N konfigurációs gráfja egy n hosszú bemeneten $2^{O(f(n))}$ méretű. Ebben a gráfban kell egy M determinisztikus TG-nek egy elfogadó konfigurációt keresni.

Mivel a PATH probléma P -beli, ez megoldható $2^{O(f(n))}$ időben.

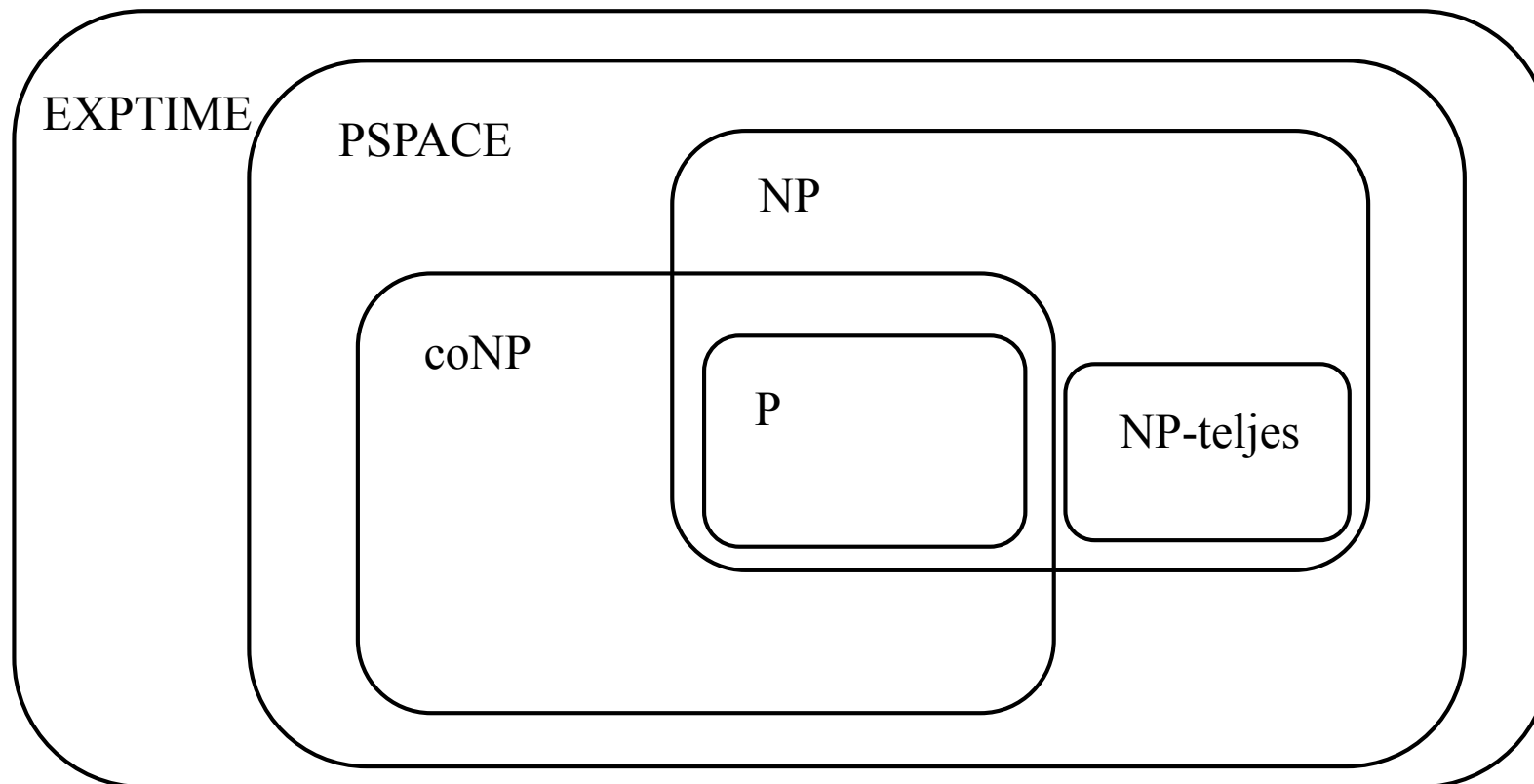
Mivel $f(n)$ egy polinom függvény kapjuk, hogy $L \in EXPTIME$.

Problémaosztályok tartalmazása

Következmény: $P \subseteq NP \subseteq PSPACE = NPSPACE \subseteq EXPTIME$.

Nem ismert, hogy a tartalmazások valódiak-e.

Ismert, hogy $P \subset EXPTIME$. Tehát a fenti láncban legalább az egyik helyen valódi a tartalmazás, sejtés: mindegyik valódi.



PSPACE-teljes problémák

Def. Egy L nyelv PSPACE-teljes, ha PSPACE-beli és minden további PSPACE-beli nyelv polinom időben visszavezethető L -re.

Def. $QBF = \{ \langle \varphi \rangle : \varphi \text{ igaz prenex alakú zárt Boole-formula} \}$

Példa $\exists x_1 \forall x_2 \exists x_3 [(x_1 \vee x_2) \wedge (x_2 \vee x_3) \wedge (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)] \in QBF$
 $\exists x \forall y [(x \vee y) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y})] \notin QBF$

Tétel QBF PSPACE teljes.

PSPACE-teljes problémák

Megjegyzés

- QBF akkor is PSPACE-teljes, ha a formula magja knf, a kvantorok alternálnak, és az első kvantor $\exists$ (esetleg az utolsó is $\exists$).
- Ekkor QBF felfogható kétszemélyes játékként.

Adott $\varphi = \exists x_1 \forall x_2 \exists x_3 \dots Q x_n \psi$

- ◆ az 1. játékos választja az $x_1, x_3, \dots$ változók értékét és célja ψ igazsá tétele,
- ◆ a 2. játékos választja felváltva az $x_2, x_4, \dots$ értékét, célja ψ hamissá tétele.

$\psi \in \text{QBF} \Leftrightarrow$ az 1. játékosnak nyerőstratégiája van.

PSPACE-teljes problémák

FÖLDRAJZI JÁTÉK:

Adott egy G irányított gráf egy p kezdőcsúcsból. Két játékos p -ből indulva felváltva egy olyan út csúcsait nevezi meg, mely nem halad át már meglátogatott csúcson. Az a játékos veszít, aki nem tudja folytatni. A probléma annak eldöntése, hogy az első játékosnak van-e nyerő stratégiája.

Tétel A FÖLDRAJZI JÁTÉK PSPACE-teljes.

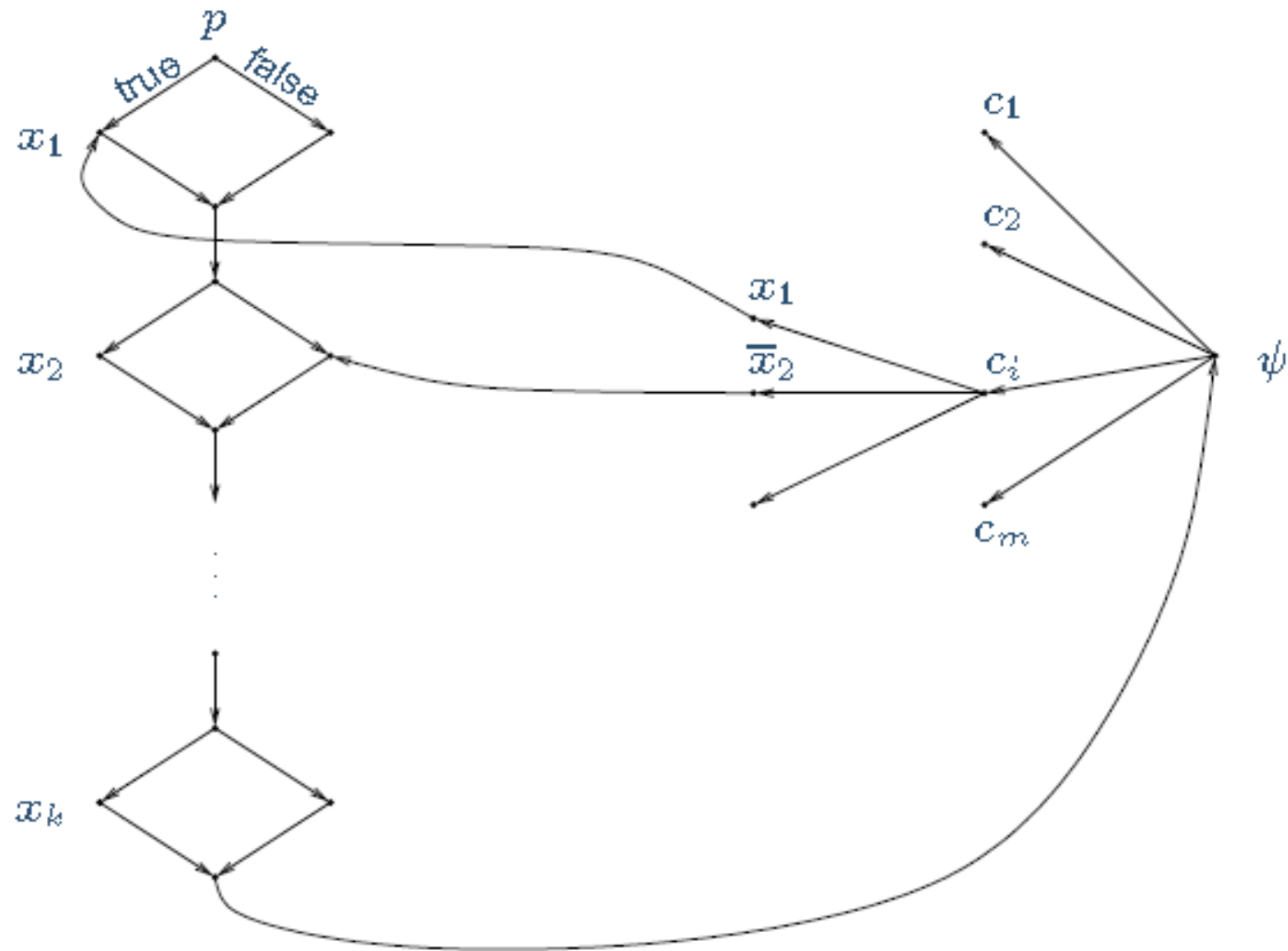
Bizonyítás Az, hogy PSPACE-ben van, a QBF-hez hasonlóan igazolható. Azt, hogy PSPACE-nehéz, a QBF-ből való visszavezetéssel igazoljuk.

Legyen adva a φ formula

$$\varphi = \exists x_1 \forall x_2 \exists x_3 \dots \exists x_k \psi \quad k \text{ páratlan}$$

$$\psi = c_1 \wedge \dots \wedge c_m \quad \text{knf.}$$

PSPACE-teljes problémák



Irodalom

10. előadás dec.5.

Rónyai-Ivanyos-Szabó: Algoritmusok, 255-265, 268-279. oldalak