

Neurális hálózatok alapjai (áttekintés)

Bérci Norbert

2005.

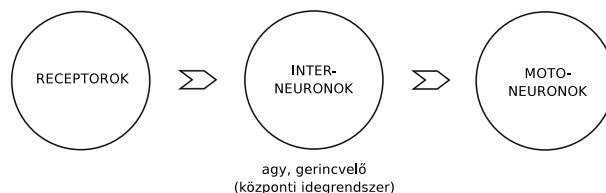
1. fejezet

Az idegrendszer

A mesterséges neurális hálózatok ma még leginkább a biológiai neurális hálózatok mintájára működnek, emiatt az idegrendszer (számítástudományi szempontból fontos) működésének ismerete is szükséges:

1.1. Az idegrendszer fő részei

Az idegrendszer – funkcionális felépítését tekintve – három fő részre osztható: a receptorok alkotta ingerületfelvevő részre, az (inter)neuronok alkotta „számítást” végző részre (amit az ember esetében központi idegrendszernek nevezünk), és a kívüllágra (vagy más belső szervekre) hatással lévő motoneuronok rendszerére (1.1. ábra). Ezen részek között az információátvitel a felsorolás sze-



1.1. ábra. Az idegrendszer fő részei.

rinti, így ezeket bemeneti (input), számító (computing) és kimeneti (output) részeknek nevezzük. Általában ezt a szerkezetet követi a legtöbb mesterséges neuronhálózat is.

Fontos megjegyezni, hogy a receptorok és a motoneuronok egyes területeken együttesen vannak jelen, hiszen a legtöbb külső, belső hatást visszacsatolások révén monitorozza az idegrendszer a működés stabilitása érdekében.¹

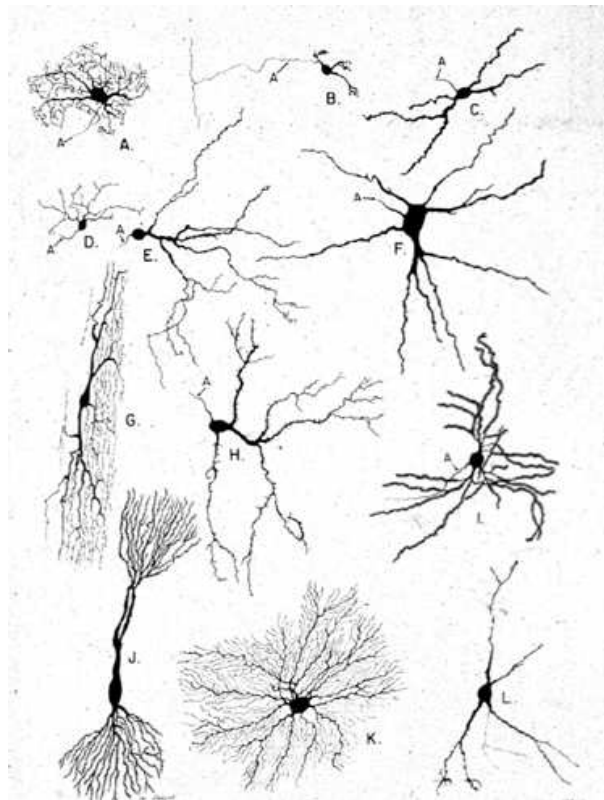
¹Például a végtagok mozgásának vezérlésénél az aktuális pozíció ismerete elengedhetetlen a szükséges izommunka paramétereinek (mozgás hosszának ideje; a mozgáshoz szükséges erő és ennek időbeli lefolyása, stb.) meghatározásához.

1.2. Az idegrendszer vizsgálatának szintjei

Számítástudományi szempontból az emberi idegrendszer funkcionális utánzása a cél, de a gerinctelenek és egyéb egyszerűbb fajok idegrendszerének tanulmányozása is jelentős eredményekkel járhat, mivel jelenlegi ismereteink ezen a területen meglehetősen korlátozottak, gyakorlatilag csak az elemi működés egyes részletei ismertek (kémiai, elektromos, biológiai); a pszichológia által vizsgált magasszintű működés részleteiről, annak sejt, hálózat szintű megfeleltetéséről, az információ kódolásának módjáról gyakorlatilag alig van némi ismeretünk. A mikroszerkezet és mikroműködés (neuron szintű) megértése mellett biztosan szükséges egy magasabb szintű, hálózatelméleti, információelméleti megközelítés is, hiszen az emberi idegrendszer több, mint pusztán inger-válasz kapcsolatok végrehajtásáért felelős szerv: a környezet változásához alkalmazkodni, tanulni képes, sőt, öntudattal, énképpel rendelkezik.

1.3. A neuron működése

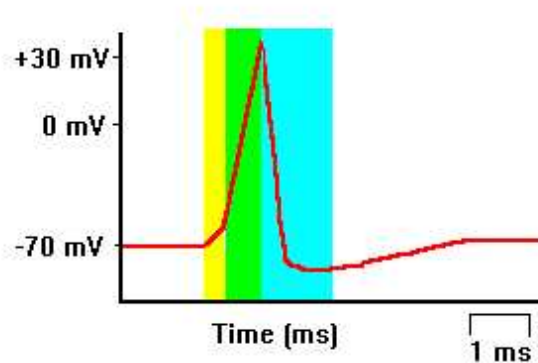
A neuronok állatfajonkénti és egy konkrét fajon belüli, a különböző funkciók megvalósítása alapján megfigyelhető különbözősége igen nagy (1.2. ábra), de



1.2. ábra. Különböző neuronok.

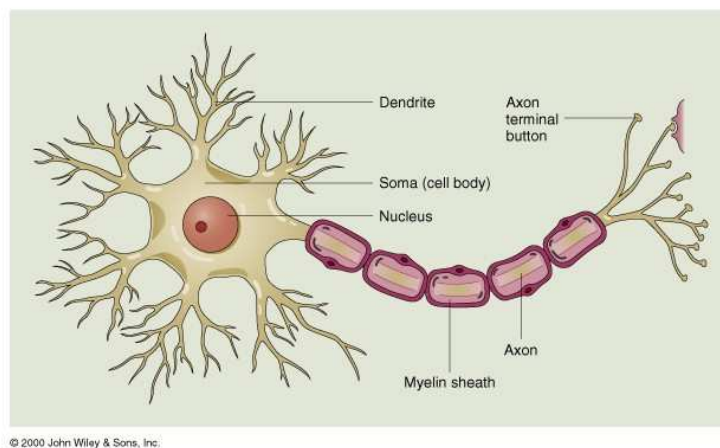
sok közös vonással, közös felépítéssel rendelkeznek.

A neuronok – később részletezett módon – egymáshoz kapcsolódnak, és egymás között információátadásra képesek. Az információt elektromos impulzusok sorozata hordozza, de az információ kódolásáról, a jelalak fontos paramétereiről jelenleg nincs sok ismeretünk, így a későbbiekben nem információról és információátadásról, hanem impulzusról és impulzusátadásról lesz szó. Az impulzus a sejtmembrán két oldalának elektromos potenciálja közötti különbség (feszültség) időbeli lefolyása (1.3. ábra), ami főként ionok mozgásával jön létre.



1.3. ábra. Az akciós potenciál (spike) időbeli lefolyása.

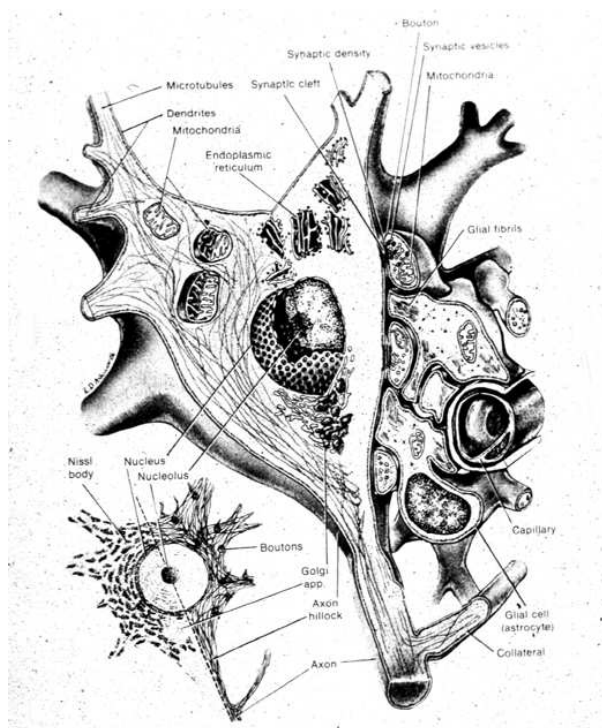
Az impulzusokat a dendritnek nevezett nyúlványokon fogadják, a soma (sejttest) is résztvesz a műveletek elvégzésében, és az axonnak nevezett nyúlványon továbbítják az eredményt (1.4. ábra). Az impulzusátadás folyamatáról a később-



1.4. ábra. Egy neuronsejt.

biekben részletesen lesz szó. Néhány speciális sejt, például az amacrine sejtek a retinában nem rendelkeznek jól elkülöníthető dendritekkel és axonnal, nyúlványaik mindkét funkciót betölthetik, kétirányú kommunikációra alkalmasak.

A központi idegrendszerben a neuronok között (körül) glia sejtek találhatók (1.5. ábra), amik funkciója elsősorban a szerkezeti tartás és a kommunikáció



1.5. ábra. Egy neuron és a körülvevő glia sejt.

egyes paramétereinek javítása (lásd később), de újabb kutatások kimutatták, hogy jelentős szerepük van a sérült idegrendszer regenerálódásában, sőt a normál működés közben szükséges kémiai környezet biztosításában is.

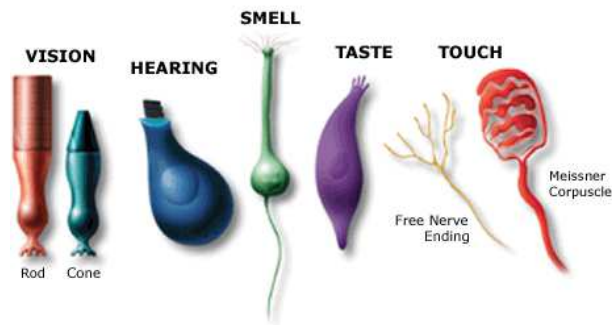
A továbbiakban részletesebben áttekintjük az idegrendszer működését az információ haladásának megfelelően, a receptoroktól kezdve az effektorokig:

1.4. Receptorok

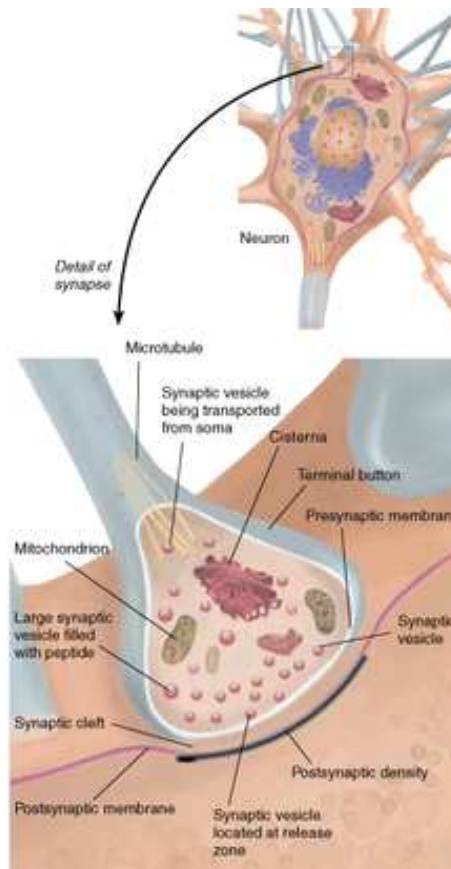
Feladatuk a külső (exteroceptor) vagy a belső (interoceptor) környezet fizikai, kémiai paramétereinek az idegrendszer számára megfelelő formára (impulzusokká) alakítása. Ilyenek például a retinában elhelyezkedő csapok és pálcikák a különböző frekvenciájú elektromágneses hullámok és azok intenzitásának érzékelésére (látás); a fülben lévők a nyomásváltozás érzékelésére (hallás); a hő, fájdalom, mozgás, érintés érzékelésére a bőrben; különböző molekulák érzékelésére a szájban és az orrban, stb. (1.6. ábra). Az inger erőssége és az impulzusok frekvenciája között összefüggés van, de létezik egy határfrekvencia, aminél sűrűbb impulzussorozatot a receptor nem képes kibocsájtani.

1.5. Szinapszisok és neurotranszmitterek

A neuronok közötti impulzusátadás a szinapszisokon keresztül történik (1.7. ábra), amik a kapcsolódó sejtek (megvastagodott) membránjának speciális részei és



1.6. ábra. Különböző receptorok.

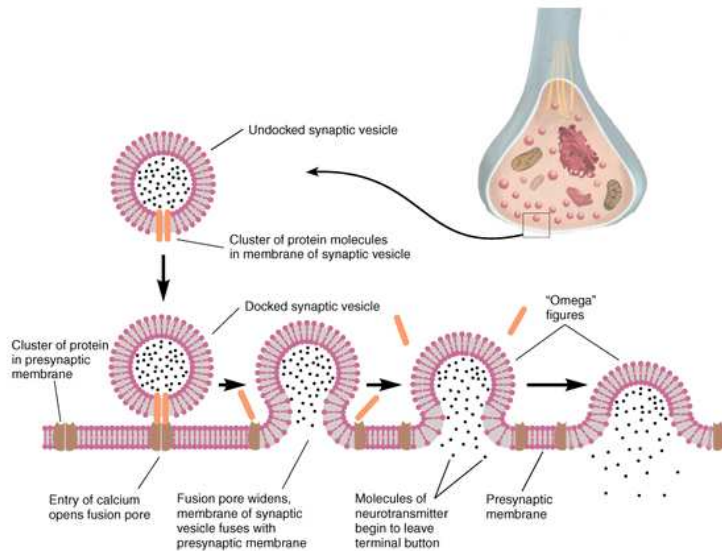


1.7. ábra. A szinapszis és részei

a közöttük lévő sejtközi rés (szinaptikus rés). Az impulzusátadás irányát figyelembe véve beszélhetünk preszinaptikus és postszinaptikus (sejt)membránról. A szinapszisok kémiai vagy közvetlen, elektromos kapcsolatban is lehetnek a szomszédos neuronnal: a szinaptikus rés kémiai ingerületátadás esetén $10 - 50nm$, közvetlen ingerületátadás esetén akár $1 - 3nm$ szélességűek is lehetnek. Két fő

szinapszis típust különböztetünk meg: serkentő (excitatory) és gátló (inhibitory): az előbbiek növelik a membránfeszültséget, az utóbbiak csökkentik azt.

A legtöbb esetben kémiai ingerületátadás történik, ami a preszinaptikus membránon keresztül az előzőleg vezikulákban tárolt neurotranszmitterek kibocsátásával jár, amik a sejtközi térbe diffundálva elérik a postszinaptikus membránt, ahol a megfelelő receptormolekulák ezeket fogadni képesek (1.8. ábra). A



1.8. ábra. Neurotranszmitterek felszabadulása.

transzmitterek hatása nem maguktól a transzmitterektől, hanem a transzmitter-receptor kapcsolattól függ, mivel a postszinaptikus válasz a receptortól függ. Néhány sejt esetében azonban az információátadás elektromos (jellemzően a neocortexben), ami gyorsabb (kb. $0,1\text{ms}$ késleltetésű) impulzustovábbítást tesz lehetővé.

A neurotranszmittereken kívül neurohormonok is képződhetnek, amelyek a véráramban továbbítódva nem helyi, hanem távoli hatásúak lehetnek. Egyes fajtáik a neurotranszmitterekhez hasonlóak, míg más típusaik neuromodulátorok, amelyek a neurotranszmitterekhez képest hosszabb ideig képesek neuronhálózat-részek működésének megváltoztatására.

A postszinaptikus membrán potenciálkülönbségét a neurotranszmitterek csak kis mértékben változtatják meg, de a sok kis változás eredményeképpen elérhető az a határérték, ami az axonon az akciós potenciál kiváltását okozza.

A legismertebb neurotranszmitterek: dopamin, adrenalin, noradrenalin, szerotonin, illetve a nagy molekulasúlyúak közül az opioidok, endorfinok, amik a fájdalomérzést csökkentik (egyéb, kábulatot okozó hatásuk mellett).

A transzmitterek felszabadulása impulzussorozat hatására módosulhat: facilitáció (fokozódik a felszabadulás), potencirozódás (könnyített felszabadulás az impulzussorozat után percekig, aminek a tanulásban, emlékezetben lehet szerepe), depresszió (a transzmittertartalék kiürülése) következhet be.

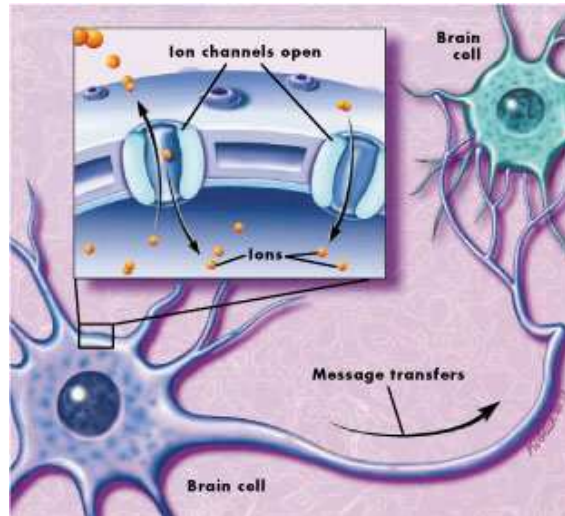
1.6. A dendrit

A neuronon belül – elsősorban a sejt információ-továbbításra szolgáló nyúlványain – az információ a sejtmembrán külső és belső oldala közti potenciálkülönbség változásával terjed, amit elsősorban ionok mozgása idéz elő. Ennek a passzív terjedésnek a leírására használható a kábel-egyenlet, ami a potenciálkülönbség térbeli és időbeli lefolyása között teremt kapcsolatot. A térben csak egy dimenziót vesz figyelembe, mivel a dendrit egy dimenziós kábelnek tekinthető:

$$\tau_m \frac{\partial V_m(x, t)}{\partial t} = \lambda_c^2 \frac{\partial^2 V_m(x, t)}{\partial x^2} - V_m(x, t)$$

ahol $V_m(x, t)$ a transzmembrán feszültség x távolságban, t időpillanatban, τ_m a membrán időállandó (ami azt jellemzi, hogy a membrán mennyi idő múlva egyenlítődik ki), λ_c a kábelhossz-állandó (ami jellemzi, hogy a kábel milyen távolságra tudja a potenciálváltozást jelentős amplitúdócsökkenés nélkül továbbítani). A levezetés részletesen megtalálható a A. fejezetben.

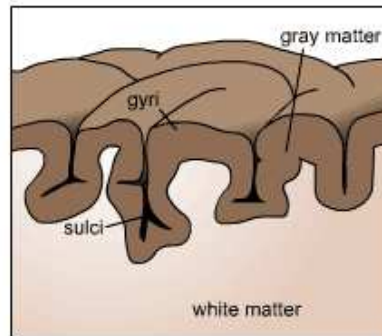
A dendrit tekinthető az előbbieken ismertetett passzív jelterjedést lehetővé tevő elektromos vezetőknek, de a felületén elhelyezkedő szinapszisok és feszültségvezérelt ion-csatornák – olyan speciális sejt részek, amelyek feszültség hatására adott ionok számára átjárhatóvá teszik a sejtmembránt (lásd 1.9. ábra) – miatt



1.9. ábra. Ion-csatornák.

nem pusztán passzív vezető, hanem aktív, „számítást” végző elem is. Továbbá egy neuron dendritei alkotta struktúra, és a felületén elhelyezkedő ion-csatornák illetve szinapszisok típusa, és eloszlása határozza meg elsősorban a neuron típusát.

Az ember esetében az agy szürke felszíne (a szürkeállomány) tartalmazza a neuron sejttestjeit és a dendriteket; itt játszódnak le tehát az agyi funkciók (1.10. ábra).

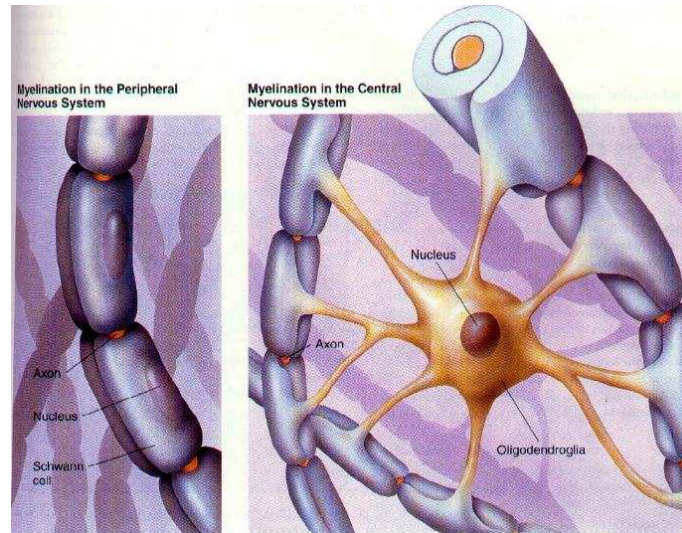


1.10. ábra. Az agy fehér- és szürkeállománya.

1.7. Az axon

A dendriteken belépő impulzusok összegződnek (nem feltétlenül egyszerű összeadódásról van szó), és ha együttesen elérik egy küszöbszintet (threshold), akkor az axoneredetből kiindulva, az axonon keresztül elindul az akciós potenciál (spike), ami már aktív módon továbbítódik, azaz a potenciálváltozás csillapítás nélkül halad az axonon. Ezután egy rövid ideig az újabb akciós potenciál létrejötte nem lehetséges, amit refrakter fázisnak (refractory period) nevezünk. Egyetlen spike ritkán képződik, általában hosszabb-rövidebb ideig tartó impulzussorozatok jönnek létre. Az idegimpulzus az idegrendszerben terjedő akciós potenciál.

Az axonok lehetnek mielinizáltak (mielin hüvellyel borítottak), ami nem más, mint glia sejtek nyúlványainak az axon körüli feltekeredése (1.11. ábra). Ezek



1.11. ábra. Mielin hüvellyel borított axonok.

között Ranvier befűződések találhatók, amik között „ugrálva” terjed az akciós

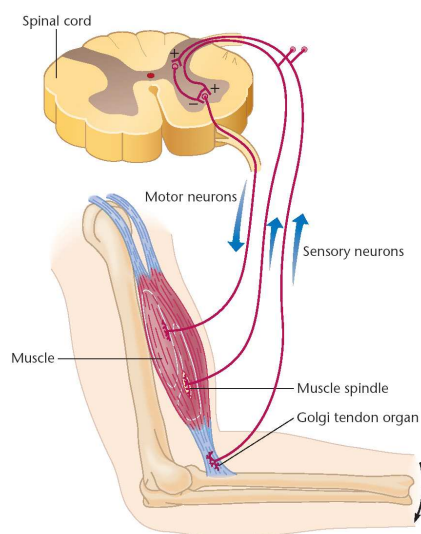
potenciál, így gyorsabb terjedési sebesség és kevesebb energiafelhasználás érhető el. Az axonok végén fakorona szerű elágazások vannak (1.4. ábra), amik más neuronok dendritjéhez vagy sejttestjéhez (soma) kapcsolódnak, de az axon középső részén is lehetnek nyúlványok, amit collaterálisoknak nevezünk.

A különböző dendriteken bejövő impulzusok fáziskülönbsége is jelentősen befolyásolhatja a számítás eredményét, lehetővé téve egyetlen neuron számára viszonylag bonyolult funkció elvégzését: egyszerűen megvalósítható például egy adott irányban adott sebességű tárgy detektálása egyetlen neuron segítségével.

Az emlősök esetében az agy fehér belseje (a fehérállomány) tartalmazza a mielinizált axonokat (1.10. ábra), amik az agy egyes részeit összekötik egymással, a gerincvelővel; szerepe tehát a gyors impulzustovábbítás.

1.8. Effektorok

Az egyik legjobb példa az effektorok működésére a gerincvelőben elhelyezkedő motoneuronok működése: a központi idegrendszerből kapott impulzusokat (a nagylábujjat mozgató motoneuron esetében akár 1 m hosszú) axonjaikon keresztül továbbítják a funkciótól függően néhány vagy sok izomrost felé (1.12. ábra). Egy-egy impulzus hatására egy izomrost csak kis összehúzódást végez,



1.12. ábra. Egy izomrostot vezérlő motoneuron.

de az impulzusok ismétlődése, és a fáziseltérések miatt kvázi konstans összehúzó erő valósul meg. A nagyobb izomrostok nagyobb határértékkel rendelkeznek, így először a kisebbek aztán a nagyobbak lépnek működésbe, így biztosítva a fokozatos erő kifejtés lehetőségét. A refrakter fázis miatt van egy maximális impulzus-frekvencia, ami a maximális erő kifejtéshez társul.

2. fejezet

A tudományterület részterületei

A neurális hálózatok témaköre több tudományterület, sőt diszciplína metszetében helyezkedik el. A biológiától a számítástudományon át a pszichológia, matematika, fizika, kémia tárgykörére támaszkodik jelentősen. Ebben a fejezetben a különböző kutatási, tudományos irányokat, illetve ezek kialakult elnevezéseit tekintjük át. A legtöbb esetben az eredeti, angol terminológiát használom, a szakirodalom nyelvéhez igazodva.

2.1. Computational neuroscience

A biológiai neuronok modellezésével foglalkozik, célja a minél pontosabb, részletesebb matematikai modell megalkotása elsősorban kísérletezés, megfigyelés segítségével. Ezt az irányt alkalmazták, amikor a dendrit passzív vezetésével kapcsolatosan megalkották a kábel egyenletet.

2.2. Neural computing

A biológiai modellek és mesterséges neurális hálózatok közti aktív megfigyelésen, összehasonlításon, a biológiai rendszerekből vett ötleteken alapul, ahol a fajsúlyos szempont azonban nem a tökéletes modell létrehozása, hanem a technológiai hasznosíthatóság, az (ipari) alkalmazhatóság. Sok esetben olyan modelleket alkotnak (matematikailag és fizikai megvalósításban), amelyek a biológiai rendszerekben nem lelhetők fel, de hatékonyan alkalmazhatók valamely feladat megoldására.

3. fejezet

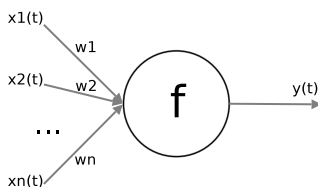
Neuron-modellek

3.1. Impulzus-kód

Ha megfigyelünk néhány, összeköttetésben lévő neuront, és feljegyezzük az általuk generált analóg impulzusmintát, felmerül a kérdés: Hogyan lehet dekódolni ezt? Melyek az impulzusok jellemző vonásai? Melyik jellemzőket kell figyelembe venni, ha számítást végzünk? Egyszerűsítésképpen melyek hagyhatóak el a modellekben? A neuronok hogyan képesek „értelmezni” ezeket? *Mi a neuroimpulzus-kód?*

3.2. Az általános neuronmodell

Általánosságban elmondhatjuk, hogy a neuronmodellek mindegyike rendelkezik a következő tulajdonságokkal (3.1. ábra):



3.1. ábra. Az általános neuronmodell.

- n darab, időtől függő bemenetük van: $x_i(t)$, $i = 1, \dots, n$
- egyetlen, időtől függő kimenetük van: $y(t)$
- a bemenetek súlyozottak, amik a bemenetek kimenetre való hatását határozzák meg: $\omega_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$. A bemenet $\omega_i < 0$ esetén gátló, $\omega_i > 0$ esetén serkentő¹.

¹ $\omega_i = 0$ esetén a bemenetnek nincs hatása a kimenetre, jelentősége a fix struktúrában összekötött (például egy chipen megvalósított) mesterséges neuronok esetében van, így a súlyok megfelelő beállításával egyes bemenetek kvázi kikapcsolhatók, nem kell minden egyes feladatra új chipet készíteni.

- a kimenet értéke valamilyen függvénykapcsolatban van bemenetekkel, figyelembe véve a súlyokat: $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$

A kimenet számításának módjától illetve a be- és kimenetek lehetséges értékeitől függően különböztetjük meg a neuronmodelleket:

3.3. A lineáris neuronmodell

A modell súlyozottan összegzi bemeneteit, és ez az eredmény lesz a kimenet. Értelmezhető diszkrét időben:

$$y(t+1) = \sum_{i=1}^n \omega_i x_i(t), \quad t \in \mathbb{N}$$

illetve folytonos időben:

$$y(t) = \sum_{i=1}^n \omega_i x_i(t), \quad t \in \mathbb{R}$$

Hátránya, hogy (a súlyoktól és a bemenettől függően) a kimenet bármekkora értéket felvehet, továbbá a folytonos esetben a számítás zérus idő alatt végbemegy, így ez a modell alig hasonlít a biológiai neuronokra, teljesen lineáris működésű, vizsgálatát algebrai (mátrix) módszerekkel el lehet végezni. Önmagában, jelenlegi formájában nem használható, a továbbiakban ezzel a modellel nem is fogunk foglalkozni.

3.4. A McCulloch-Pitts neuronmodell

A modellt 1943-ban Warren McCulloch és Walter Pitts alkotta meg. Bár a legegyszerűbb modellek közé tartozik, hatása jelentős.

3.4.1. A modell tulajdonságai:

A rendszer diszkrét idejű: Az impulzusok csak adott időpillanatban jelenhetnek meg, a lehetséges időpontok periódikusan ismétlődnek, így elég egy sorszámmal ellátni őket, azaz

$$\text{dom}(x_i) = \text{dom}(y) = \mathbb{N}, \quad i = 1, \dots, n$$

A rendszer bináris be- és kimenetű: Valamely bemenet illetve kimenet értéke 1, ha az adott időpontban impulzus van a bemeneten illetve a kimeneten; 0 egyébként, azaz

$$\text{im}(x_i) = \text{im}(y) = \{0, 1\}, \quad i = 1, \dots, n$$

Az elvégzett számítás a bemenetek súlyozott összege.

A $\theta \in \mathbb{R}$ tüzelési határt elérve generálódik impulzus a kimeneten.

A számítási idő egy periódusnyi: a bemeneteken jelentkező impulzusok egy periódussal később vannak a kimenetre hatással.

A modell működésének matematikai leírása:

$$y(t+1) = \mathbb{H}_1 \left(\sum_{i=1}^n \omega_i x_i(t) - \theta \right)$$

ahol $\mathbb{H}_1$ a Heaviside egységugrás függvény²:

$$\mathbb{H}_1(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < 0 \\ 1, & \text{ha } x \geq 0 \end{cases}$$

A rendszer a 0. időpillanatban kezd működni, ekkor a kimenetének értéke nem definiált.

A modell kellő hasonlóságot mutat a mai számítógépeinkkel, hiszen azokban a szisztolikus (systolic) processzorokban is ugyanígy egy órajel szinkronizálja az impulzusáramlást.

3.4.2. Változtatható modell-paraméterek

Abban az esetben, ha a modell célja a biológiai neuronok modellezése, akkor az időosztást a modellezett neuron refrakter periódusával összemérhető értékre állítják (ez *ms* nagyságrendű), így a modell a lehetséges maximális impulzus frekvencia esetén – az időbeliséget tekintve – elég pontos, más esetekben azonban jelentős információ veszteséget jelenthet a kizárólag az időosztásban lehetséges impulzus-megjelenés.

Ha nem a biológiai modellezés a cél, akkor a bináris ki- és bemenetek értéke más is lehet, de ekkor a Heaviside egységugrás függvény helyett annak eltolts és nyújtott változatát kell használni, hogy a két lehetséges állapot a modell által használt bináris értékek legyenek³.

3.4.3. A modell „ereje”

1. állítás. *A McCulloch-Pitts modellű mesterséges neuronok hálózataival bármely számítás elvégezhető, amit számítógéppel is elvégezhetünk.*

Bizonyítás. Mivel a modell segítségével megvalósíthatók az ÉS, VAGY, NEGÁCIÓ logikai műveletek (3.2. ábra), ekvivalenciája a CPU-val egyértelmű. $\square$

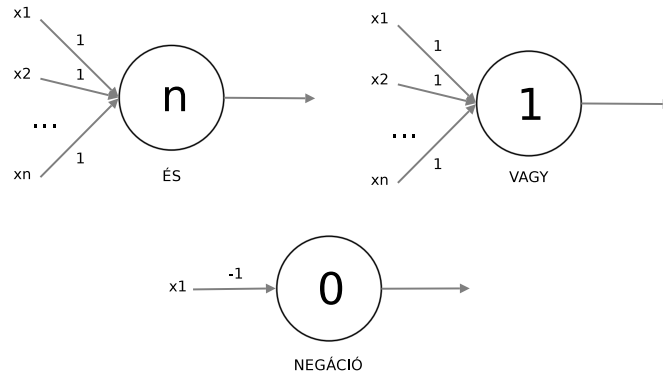
Bonyolultabb számítások elvégzéséhez jelentős számú mesterséges neuronra lehet szükség, azaz nem ez a számítási mód a leghatékonyabb.

2. állítás. *Egyetlen McCulloch-Pitts neuron az XOR művelet elvégzésére nem képes.*

Bizonyítás. Mivel az elvégzett számítás egyszerű súlyozott összeadás, a kimenet a súlyozott összeg tüzelési határnál nagyobb értékeire 1, ellenkező esetben 0, így a kimeneti függvény grafikonja egy hipersíkkal két térfélre bontható: az egyik térfélen a függvény értéke 1, a másikon 0. Olyan (logikai) függvények nem implementálhatók, amik grafikonja nem bontható fel két összefüggő térfélre.

²A Heaviside függvény indexe a 0 pontban felvett értéket jelöli, ami jelen esetben 1

³Például $\{-1, 1\}$ értékek esetén: $2\mathbb{H}_1 - 1$



3.2. ábra. McCulloch-Pitts logikai kapuk.

AZ XOR függvény pedig ilyen, hiszen minden bemenet 0 esetén az eredmény is 0, minden bemenet 1 esetén a kimenet szintén 0, az összes többi esetben pedig a kimenet 1, azaz három térrészből áll a függvény grafikonja⁴ $\square$

3.5. A szigmoid McCulloch-Pitts modell

Ez a modell annyiban különbözik az eredetitől, hogy folytonos be- és kimeneti értékekkel működik (az idő továbbra is diszkrét), ami miatt nem tekinthető létező biológiai neuron modelljének, de számítástudományi szempontból mégis jelentős. A kimenet folytonossága miatt a Heaviside függvény helyett szigmoid típusú függvényt kell használni a kimenet számításakor:

3.5.1. Szigmoid típusú függvények

Egy függvény szigmoid típusú, ha monoton növekedő és korlátos:

$$\lim_{m \rightarrow -\infty} \sigma(m) = \sigma_{\min} \quad \text{és} \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \sigma(m) = \sigma_{\max}$$

A leggyakrabban használt szigmoid függvény:

$$\sigma(m) = \frac{\sigma_{\max}}{1 + e^{-\frac{m}{\theta}}}, \quad \sigma_{\max}, \theta \in \mathbb{R}, \sigma_{\max} > 0, \theta > 0$$

amiből jól látható, hogy teljesíti a fenti feltételeket: (szigorúan) monoton növekedő és

$$\lim_{m \rightarrow -\infty} \sigma(m) = 0 \quad \text{illetve} \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \sigma(m) = \sigma_{\max}$$

Természetesen ha nem szükséges a kimenet $[0, \sigma_{\max}]$ intervallumban tartása, a fenti feltételeknek megfelelő, lefutásában különböző más függvény is használható (pl. szakaszosan konstans lépcsős függvény, negatív értékeket felvevő függvény, tanh, stb.)

⁴A grafikonjuk alapján egy hipersíkkal két térrészre bontható bináris értékkészletű függvényeket lineárisan szeparálható függvényeknek nevezzük.

3.5.2. A modell tulajdonságai:

A rendszer diszkrét idejű: A folytonos változók értékét csak adott időpillanatban figyeljük meg, a lehetséges időpontok periódikusan ismétlődnek, így elég egy sorszámmal ellátni őket, azaz

$$\text{dom}(x_i) = \text{dom}(y) = \mathbb{N}, \quad i = 1, \dots, n$$

A rendszer folytonos be- és kimenetű:

$$\text{im}(x_i) = \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, n$$

$$\text{im}(y) = [\sigma_{\min}, \sigma_{\max}]$$

Az elvégzett számítás a bemenetek súlyozott összege.

A $\theta \in \mathbb{R}$ tüzelési határt átlépve generálódik impulzus a kimeneten.

A számítási idő egy periódusnyi: a bemeneteken jelentkező impulzusok egy periódussal később vannak a kimenetre hatással.

A modell működésének matematikai leírása:

$$y(t+1) = \sigma \left(\sum_{i=1}^n \omega_i x_i(t) - \theta \right)$$

A rendszer a 0. időpillanatban kezd működni, ekkor a kimenetének értéke nem definiált.

3.6. A leaky integrator modell

3.6.1. Frekvencia be és kimenet

Egyértelmű, hogy a McCulloch-Pitts modellt használva elveszítjük a spike-ok keletkezésének pontos időpontjával kódolt információt, így a következő fokozat lehet, hogy egy időablakot tekintünk, és az ebben bekövetkező impulzusok átlagát (frekvenciáját) vizsgáljuk, ami egy kicsit pontosabb közelítést ad⁵.

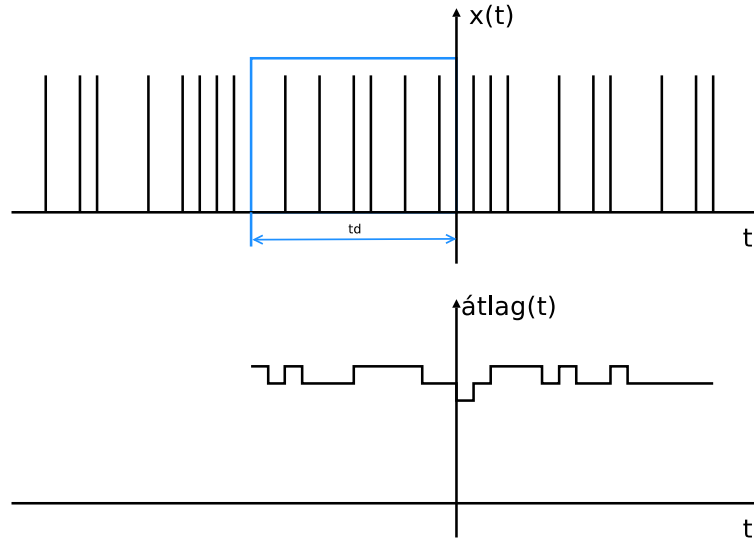
Ha az impulzusokat továbbra is nulla szélességűnek, adott magasságúnak tekintjük, akkor a frekvencia függvény (az átlagolási időablaktól függő) diszkrét értékeket felvevő lépcsős függvény lesz (3.3. ábra), hiszen egy impulzus időablakba lépésével a függvény értéke ugrásszerűen megnő, kilépésével ugrásszerűen lecsökken. Azonban jobban szeretjük a folytonos függvényeket, így célszerűbb egységnyi területű négyszöggel alakú impulzusokban gondolkodni. Ha az időablak függvényünk is egy egységnyi területű négyszöggel, akkor az átlagot számolhatjuk a két függvény konvolúciójaként:

$$\check{x}(t) := (f * g)(t) \stackrel{\text{def.}}{=} \int_{\mathbb{R}} f(t-u)g(u)du$$

ez szemléletesen annyit jelent, hogy az $\check{x}$ függvény t időpontbeli értékét úgy kaphatjuk meg, hogy az f (átlagolandó) függvényt eltoljuk t -vel⁶, aztán az y tengelyre tükrözzük, és az így kapott „új” f és a g függvény pontonkénti szorzatának területét kiszámítjuk. Az így kapott $\check{x}$ függvény (3.4. ábra) folytonos,

⁵A frekvencia az izomrostokat vezéző motoneuronok esetében elegendő információ is, hiszen az impulzusok frekvenciája arányos (egy adott határig) az izomrost által létrehozott erővel.

⁶ha t negatív, akkor jobbra; ha t pozitív, akkor balra



3.3. ábra. Nulla szélességű impulzusok és átlagfüggvénye.

mivel integrálfüggvény.

Egy rendszert kauzálisnak nevezünk, ha kimenetének értéke nem függ a bemenetek jövőbeli értékétől. Értelemszerűen kizárólag ilyen rendszerek építhetők. Ennek teljesüléséhez a g időablak függvényünk $t < 0$ -ra konstans nulla értéket kell, hogy felvegyen.

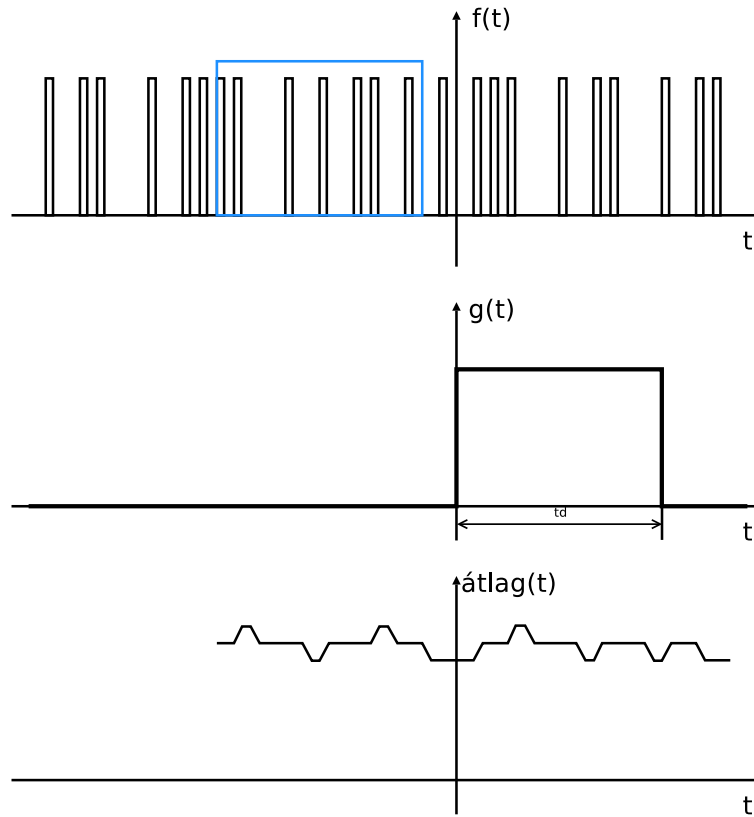
Felvetődik a kérdés: Mekkora időtartamban végezzük el az átlagolást? Ha túl rövid időtartamot választunk, az időablakban gyakran egyetlen spike sem lesz, azaz a frekvencia túlságosan ingadozik, ha meg túl hosszút, akkor az időablakon belüli, gyakori frekvencia-változások kisimulnak, az átlagot csak kis mértékben változtatják meg, az információ egy része elvész.

3.6.2. A neuronmodell működése

A bemenetek és a kimenet értékei ebben a modellben frekvenciákat adnak meg, így a belső működés már nem pusztán súlyozott összeget képez, hanem a kimenő tüzelési frekvenciát a neuron axoneredetén mérhető membránpotenciálból számítjuk, egy szigmoid függvény segítségével. A membránpotenciál változását befolyásolják (súlyozva) a bemenetek, másrészt a membránpotenciál az egyensúlyi értéke (h) felé „próbál” közelíteni az egyensúlyi és az aktuális érték közti különbséggel arányosan, mintha szivárogná (innét az angol elnevezés első fele: leaky). Ha a membránpotenciál t időpontbeli értékét $m(t)$ -vel jelöljük, akkor a kiszámítási mód:

$$\tau \frac{dm(t)}{dt} = \sum_{i=1}^n \omega_i x_i(t) - (m(t) - h)$$

ahol τ az integrálási időállandó, gyakorlatilag a függvény változási sebességét befolyásolja; $x_i(t)$ az i . bemeneti frekvencia a t időpontban (az i . szomszédos neuron kimeneti frekvenciája); h pedig a membránfeszültség egyensúlyi értéke. Az egyensúlyi érték azért helyénvaló, mert bemenet hiányában ($x_i \equiv 0$, $i =$



3.4. ábra. Egységnyi területű impulzusok és átlagfüggvénye.

$1, \dots, n$) a differenciál-egyenlet megoldása:

$$m(t) = e^{-\frac{t}{\tau}} m(0) + (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) h$$

amiből látszik, hogy $\lim_{t \rightarrow \infty} m(t) = h$. Ugyanakkor ha a szivárgást és az egyensúlyi helyzetet mellőznénk, akkor az egyenlet megoldása:

$$m(t) = m(0) + \frac{1}{\tau} \int_0^t \sum_{i=1}^n \omega_i x_i(u) du$$

azaz egyszerűen a bemenetek integrálja lesz az aktuális érték (innét az angol elnevezés második része: integrator), továbbá $m(t)$ folytonos (mivel differenciál-egyenlet megoldása, a differenciál-egyenletet ki kell elégítenie).

3.6.3. A membránpotenciál mint belső állapot

Nagyon fontos észrevennünk, hogy a membránpotenciál fenti definíció szerinti (integrálást tartalmazó) bevezetésével a rendszer memóriával rendelkezik: a membránpotenciál (a kiszámítási képletében lévő integrál miatt) a neuron előéletéből is tárol információt: egy adott időpontban lévő membránpotenciál szint

részben a megelőző időszakban beérkező impulzusok miatt lett akkora. Ez a modell emiatt minőségileg különbözik az előzőtől!

A neuron memóriája nem a modern memória koncepciót követi: adott bemenet kombináció hatására a kimeneten nem jelenhet meg mindig ugyanaz az érték, ellentétben a modern memóriával, ami függetlenül a megelőző lekérdezésektől mindig ugyanazt az eredményt adja.

3.6.4. A modell tulajdonságai:

A rendszer folytonos idejű: A bemenetek és a kimenet tüzelési frekvenciája bármely időpillanatban értelmezhető, azaz

$$\text{dom}(x_i) = \text{dom}(y) = \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, n$$

A rendszer folytonos be- és kimenetű: A frekvenciák értéke folytonosan változik, azaz

$$\text{im}(x_i) = \text{im}(y) = \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, n$$

A belső állapot függvényt megadó differenciál-egyenlet:

$$\tau \frac{dm(t)}{dt} = \sum_{i=1}^n \omega_i x_i(t) - m(t) + h$$

Ahol τ az integrálási idő konstans, h a membrán nyugalmi feszültsége. A rendszer a 0 időpillanatban kezd működni, ekkor $m(0)$ értékét meg kell adni (ez a differenciál-egyenlet megoldásához szükséges kezdeti érték is).

A kimenet számítása a belső állapotból:

$$y(t) = \sigma(m(t))$$

ahol σ egy szigmoid függvény; biológiai neuron modellezése esetén $\sigma_{min} = 0$ és σ_{max} jelöli a modellezni kívánt neuron maximális tüzelési frekvenciáját.

Látható, hogy a modellben nincs órajel, ez egy analóg számítási eszköz!

3.7. Az integrate and fire neuronmodell

Nyilván az átlagos impulzusszám sem elégséges a pontos modellezéshez, mivel az időablak hosszától jelentősen függ az átlag kiszámításának pontossága, változási sebessége, az eredeti jel „simításának” mértéke. Az integrate and fire neuronmodellek az impulzus pontos idejét veszik figyelembe, de az impulzus alakjával még mindig nem foglalkoznak. Ez az egyszerűsítés (ma még) nem tűnik túlzónak, mivel biológiai neuronok vizsgálatával megfigyelhető, hogy az akciós potenciálok időbeli lefolyása közel azonos.

Ez a neuronmodell már folytonos idejű, a leíró egyenletekben már részben figyelembe lehet venni a dendritek formáját, késleltetéseiket, és a refrakter periódust is.

3.8. A Hodgkin-Huxley egyenletek

A Hodgkin-Huxley egyenletek jelentik az akciós potenciálok létrejöttét és terjedését leíró egyenletek csúcsát. A két kutató 1952-ben alkotta meg ezeket, amiért 1963-ban orvosi és pszichológiai Nobel díjat kaptak. Bonyolultságuk miatt ezekkel nem foglalkozunk.

4. fejezet

Neurális hálózatok

Az ebben a fejezetben ismertetett modellek csak a hasznosíthatóságuk alapján kerültek kialakításra, biológiai hálózatokhoz csak hasonlítanak, annak nem modelljei, hisz az utóbbiakról nagyon keveset tudunk még.

4.1. Miért van szükség neurális hálózatokra?

Tekintsük az n bináris bemenettel és n bináris kimenettel rendelkező logikai függvényeket. A bemeneti kombinációk száma 2^n , a lehetséges logikai függvények száma 2^{2^n} . A McCulloch-Pitts modell tárgyalásánál láthattuk (2. állítás), hogy a modellel nem lehetséges az XOR (és a XNOR) logikai függvény implementálása. Jól ismert (Murogata 1971) a megvalósítható függvények számára vonatkozó határ is:

$$2^{\frac{n(n-1)}{2}} < \text{NTL}(n) \leq 2 \sum_{i=0}^n \binom{2^n - 1}{i} < 2^{n^2} \leq 2^{2^n} \quad n \in \mathbb{N}, 2 \leq n$$

ahol $\text{NTL}(n)$ jelenti az n bemenetű McCulloch-Pitts modellel implementálható n változós logikai függvények számát. A képletbe $n = 2$ -t helyettesítve $2 < \text{NTL}(2) \leq 14 < 16$ adódik, ami megfelel az $\text{NTL}(2) = 14$ pontos értéknek. Látható az is, hogy a bemenetek számának növekedésével a megvalósítható függvények aránya egyre rosszabb.

4.2. Neurális hálózatok és gráf reprezentációjuk

Neuronokat (neuron modelleket) összekapcsolva neurális hálózatokat kapunk. Az összekapcsolás annyit jelent, hogy az egyik neuron kimenetét összekötjük egy másik neuron egyik bemenetével. Az ilyen struktúrájú neurális hálózatot modellezhetjük egy irányított, súlyozott élű gráffal, amelyben a csúcsok jelképezik a neuronokat (neuron-modelleket), az élek az összeköttetéseket, aminek iránya az impulzusok (adatok) terjedésére utal, azaz az egyik neuron kimenetéről egy másik neuron bemenetére mutat. A gráf éleinek súlyai a neuron bemeneteinek súlyaival egyeznek meg. Az eddigi ábrákon is ezt a jelölést használtuk.

Egy neurális hálózatot visszacsatolás nélkülinek (feedforward neural network) nevezünk, ha a gráf reprezentációjában nincs irányított kör, illetve visszacsatoltnak (feedback neural network), ha van irányított kör.

4.2.1. Réteg szerkezetű neuronhálózatok

Mivel a visszacsatolás nélküli neuronhálózatok nem tartalmaznak irányított kört, topológikusan rendezhetők, azaz létezik a csúcsoknak olyan (nem biztos, hogy egyértelmű) sorrendje, amelyben egy csúcsból csak a sorrendben utána következőkhöz mutathat él. Ilyen módon rétegeknek nevezhetjük a topológikus sorrend egymás utáni csúcsokból álló, olyan diszjunkt halmazait, amelyekben nincsen a halmazon belüli csúcsok közötti él, hiszen az ilyen módon képzett csúcs partíciók között csak egyirányú kapcsolat van.

Mivel körmentes gráfnak mindig megadható topológikus rendezése, a visszacsatolást nem tartalmazó hálózatot mindig rétegekbe lehet rendezni. Természetesen a topológikus rendezés nem egyértelműsége miatt a rétegeképítés sem egyértelmű.

Visszacsatolást tartalmazó hálózatok esetén a rétegszerkezet kialakítása önkényes, a tervezési fázis része, a hálózat struktúrájából csak speciális esetekben (pl. valamilyen szimmetria esetén) következik.

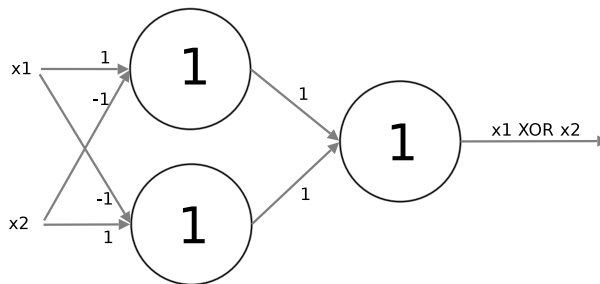
4.3. Logikai függvények implementálása kétrétegű hálózattal

3. állítás. Minden bináris be- és kimenetű logikai függvény implementálható egy legfeljebb két rétegű neuronhálózattal, amelyben a második réteg csupán egyetlen neuront tartalmaz.

Bizonyítás. Mivel minden logikai függvény felírható konjunktív vagy diszjunktív kanonikus alakban¹, az első réteg feladata a termek kiszámítása, míg a második réteg ezeken a termeken végzi el az ÉS vagy VAGY műveletet. $\square$

4.3.1. Az XOR megvalósítása két rétegű McCulloch-Pitts hálózattal

Mivel $XOR(a,b) = (a \text{ AND } (\text{NOT } b)) \text{ OR } ((\text{NOT } a) \text{ AND } b)$, a hálózat könnyen megvalósítható (4.1. ábra). Ebben a példában is a logikai függvény kanonikus alakját használtuk fel az implementációhoz.



4.1. ábra. Az XOR függvény megvalósítása két rétegű McCulloch-Pitts hálózattal.

¹a bemenetek és negáltjaik VAGY kapcsolatából kialakított kifejezések ÉS kapcsolata illetve a bemenetek és negáltjaik ÉS kapcsolatából kialakított kifejezések VAGY kapcsolata

5. fejezet

Tanulás

Ezeket a modelleket az különbözteti meg az eddigiektől, hogy a bemeneteik súlyát illetve a tüzelési határt is lehet változtatni, így adaptációra, tanulásra képesek.

A tanulás nem más, mint a súlyok olyan változtatása, amely egy adott funkció elvégzésére alkalmassá teszi a neurális hálózatot. Felmerül a kérdés: Hogyan lehet a súlyokat meghatározni? Milyen algoritmus szerint kell a súlyokat változtatni?

A következő részekben kizárólag bináris be- és kimenetű ADALINE tanulási algoritmusairól lesz szó, a szigmoid ADALINE és a több neuronból álló, kiváltképpen a többrétegű, visszacsatolt neuronhálózatok tanulásával nem foglalkozunk azok bonyolultsága miatt.

Továbbá csak az ún. felügyelt tanulási szabályokkal foglalkozunk, amelyek esetében ismerjük egyes bemenetek (teszt adatok) esetén a helyes választ, és ennek segítségével próbáljuk szisztematikusan változtatni a súlyokat.

5.1. Az ADALINE

Az adaline nem más, mint egy olyan McCulloch-Pitts neuron, amelynek a súlyai változtathatók, és a tüzelési határ is (változtatható) súlyként van megadva: θ a t időpontban: $-\omega_0(t)$, így szükséges az $x_0(t) = 1$ feltétel is, hogy a működés ne változzon:

$$y(t+1) = \text{sgn}^+ \left(\sum_{i=0}^n w_i(t)x_i(t) \right)$$

ahol sgn^+ az előjel függvény: $\text{sgn}^+(x) = 0$ ha $x < 0$ és $\text{sgn}^+(x) = 1$ más esetben¹. Ezekkel a formális változtatásokkal, és bevezetve a súlyvektort: $\vec{\omega} = (\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n)$ illetve a bemeneti vektort: $\vec{x} = (1, x_1, \dots, x_n)$ illetve ezek időtől függő változatait, a működési képlet a következőre egyszerűsödik:

$$y(t+1) = \text{sgn}^+ (\vec{\omega}^T(t)\vec{x}(t))$$

¹Ez a jelölés más függvényt jelöl, mint az a matematikában általában megszokott: ott az sgn függvény a 0 pontban 0 értéket vesz fel.

5.2. Az α -perceptron szabály

Rosenblatt 1958-ban alkotott szabálya szerint a súlyok változtatását a hibafüggvény értékétől függően kell megtenni. A hibafüggvény: $e(t) = d(t) - y(t)$, ahol $d(t)$ jelöli a t . időpillanatban a rendszer várt eredményét. Mivel a perceptron szabály bináris ki- és bemenetű neuronokra lett alkotva, a hibafüggvény csak három értéket fehet fel:

$$e(t) = \begin{cases} 2 & \text{ha } y(t) = -1 \text{ és } d(t) = 1 \\ 0 & \text{ha } y(t) = d(t) \\ -2 & \text{ha } y(t) = 1 \text{ és } d(t) = -1 \end{cases}$$

Az első esetben azt szeretnénk, hogy a kimenet értéke növekedjen a súlyok változtatásával, azaz a súlyokra $\Delta \vec{\omega}^T(t) \vec{x}(t) > 0$, illetve a harmadik esetnek megfelelően $\Delta \vec{\omega}^T(t) \vec{x}(t) < 0$, ahol $\Delta \vec{\omega}^T(t)$ jelöli a t . időpillanatban számított súlyváltoztatás mértékét ($\Delta \vec{\omega}^T(t) = \vec{\omega}^T(t+1) - \vec{\omega}^T(t)$). Ezeknek a feltételeknek megfelel a $\Delta \vec{\omega}(t) = \alpha e(t) \vec{x}(t)$ súlyváltoztatás is, ahol α jelöli a változtatás sebességét, amiből:

$$\vec{\omega}(t+1) = \vec{\omega}(t) + \alpha e(t) \vec{x}(t)$$

amit α -perceptron tanulási szabálynak nevezünk. Fontos megfigyelni, hogy a tanulási szabály helyes értékek esetén nem változtatja a súlyokat (mivel $e(t) = 0$), de a súlyoknak nincs maximuma, hiszen $\Delta \vec{\omega}(t)$ értékét nem korlátozza semmi.

4. tétel. *A perceptron szabály szerint végrehajtott tanulás lineárisan szeparálható függvények esetén konvergál egy helyes működést eredményező súlyvektorhoz, más esetben divergál.*

Különböző kezdeti értékek és α esetén a tanulási algoritmus más-más súlyvektorhoz konvergál.

5.3. Az α -LMS algoritmus

Az α -LMS algoritmus az ADALINE kimenete helyett a lineáris összeggel számolja a hibafüggvényt: $e_l(t) = d(t) - \vec{\omega}^T(t) \vec{x}(t)$ és az ún. következő hibát: $e_l(t+1) = d(t) - \vec{\omega}^T(t+1) \vec{x}(t)$, amiből számítható a hibafüggvény változása:

$$\begin{aligned} \Delta e_l(t) &= e_l(t+1) - e_l(t) \\ &= \vec{\omega}^T(t) \vec{x}(t) - \vec{\omega}^T(t+1) \vec{x}(t) \\ &= -\vec{x}^T(t) \Delta \vec{\omega}(t) \end{aligned}$$

ahol $\Delta \vec{\omega}(t)$ a súlyfüggvény változása a t . időpontban. A $\Delta e_l(t) = -\alpha e_l(t)$ választása esetén:

$$\begin{aligned} -\vec{x}^T(t) \Delta \vec{\omega}(t) &= -\alpha e_l(t) \\ -\Delta \vec{\omega}(t) (\vec{x}^T(t) \vec{x}(t)) &= -\alpha e_l(t) \vec{x}(t) \\ \Delta \vec{\omega}(t) &= \alpha \frac{e_l(t) \vec{x}(t)}{|\vec{x}(t)|^2} \end{aligned}$$

amit Widrow-Hoff delta szabálynak is nevezünk. Ahhoz, hogy $e_l(t)$ konvergáljon a 0-hoz, $0 < \alpha < 2$ egyenlőtlenségnek teljesülnie kell, de praktikusan $0.1 < \alpha < 1.0$ közötti értékeket szoktak választani.

5.4. A μ -LMS algoritmus

A μ -LMS algoritmus a klasszikus gradiens csökkenésen alapuló módszerből származik, ahol az optimális súlyvektor keresése a hibafüggvény adott súlyvektorbeli gradiensének irányával ellentétesen történik. Mivel a hibafüggvény ebben az esetben kvadrátikus, a felület konvex, így egyetlen, globális minimummal rendelkezik. A gradiens vektor kiszámítása:

$$\nabla \vec{\omega}(e_l^2(t)) = \begin{bmatrix} \frac{\partial e_l^2(t)}{\partial \omega_0} \\ \frac{\partial e_l^2(t)}{\partial \omega_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial e_l^2(t)}{\partial \omega_n} \end{bmatrix} = -2e_l(t)\vec{x}(t)$$

így a súlyváltoztató algoritmus a következő:

$$\vec{\omega}(t+1) = \vec{\omega}(t) + 2\mu e_l(t)\vec{x}(t) = \vec{\omega}(t) + \Delta\vec{\omega}(t)$$

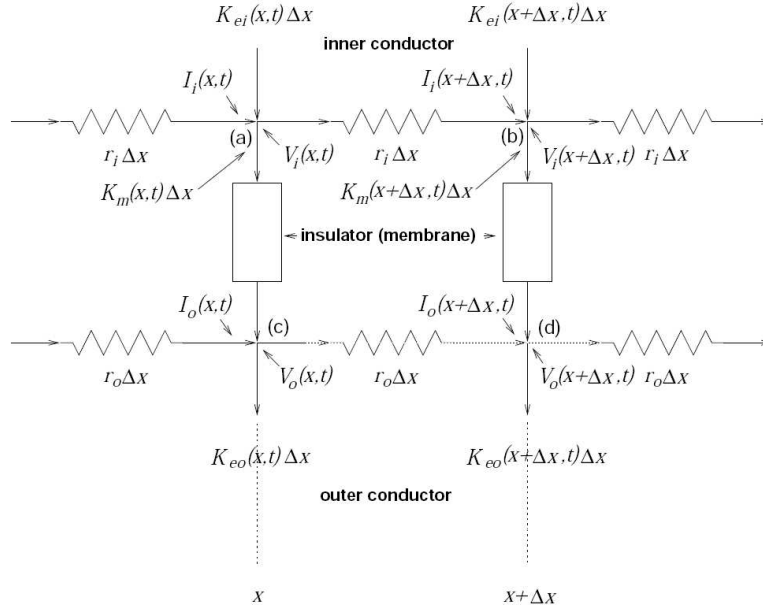
ahol $\mu \in \mathbb{R}$, $\mu > 0$ a tanulási algoritmus konvergencia sebességét határozza meg. Ezt az algoritmust Widrow μ -LMS algoritmusának nevezzük. Widrow és Lehr bizonyították, hogy a μ -LMS algoritmus megfelelő μ választása esetén az optimális súlyvektorhoz tart.

Mivel $\Delta\vec{\omega}(t)$ párhuzamos $\vec{x}(t)$ -vel, a hibafüggvény változása kellően nagy, és ugyanakkor az új tanító minta által végzett súlymódosítás a régebbi mintákra való választ a lehető legkisebb mértékben változtatja meg.

A. függelék

A kábel-egyenlet levezetése

A dendritet (vagy a nem mielinizált axont) kör keresztmetszetű, homogén vezetőnek is tekinthetjük úgy, hogy a sejt belsejében lévő vezető folyadékot és a sejtet körülvevő vezető folyadékot egy szigetelő, a sejtmembrán választja el. Ha a sejtmembránt körszimmetriája alapján síkba terítjük, majd a síkot oldalról nézzük, akkor a következő egyszerűsített áramkört kapjuk (A.1. ábra): amiből



A.1. ábra. A dendrit (és a nem mielinizált axon) helyettesítő áramköri rajza.

Kirchoff I. törvénye alapján az (a), (c) pontokra:

$$\begin{aligned} I_i(x, t) + K_{ei}(x, t) \Delta x &= I_i(x + \Delta x, t) + K_m(x, t) \Delta x \\ I_o(x, t) + K_m(x, t) \Delta x &= I_o(x + \Delta x, t) + K_{eo}(x, t) \Delta x \end{aligned}$$

Átrendezve, osztva Δx -szel, és véve a $\Delta x \rightarrow 0$ határértéket:

$$\frac{\partial I_i(x, t)}{\partial x} = K_{ei}(x, t) - K_m(x, t) \quad (\text{A.1})$$

$$\frac{\partial I_o(x, t)}{\partial x} = K_m(x, t) - K_{eo}(x, t) \quad (\text{A.2})$$

Ohm törvényéből és Kirchoff II. törvényéből az (a), (b) pontokra:

$$V_i(x, t) - V_i(x + \Delta x, t) = r_i \Delta x I_i(x + \Delta x, t)$$

$$V_o(x, t) - V_o(x + \Delta x, t) = r_o \Delta x I_o(x + \Delta x, t)$$

Mindkét oldalt osztva $-\Delta x$ -szel, és a $\Delta x \rightarrow 0$ határértéket véve:

$$\frac{\partial V_i(x, t)}{\partial x} = -r_i I_i(x, t) \quad (\text{A.3})$$

$$\frac{\partial V_o(x, t)}{\partial x} = -r_o I_o(x, t) \quad (\text{A.4})$$

Mivel $V_m = V_i - V_o$, ha kivonjuk A.3-ból A.4-et, akkor:

$$\frac{\partial V_m(x, t)}{\partial x} = r_o I_o(x, t) - r_i I_i(x, t)$$

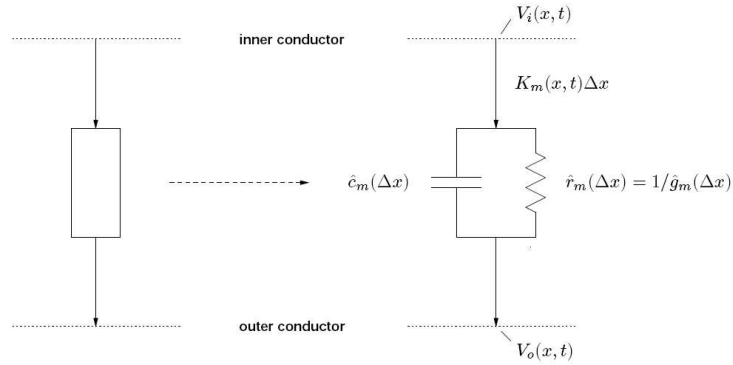
Ezt deriválva x szerint:

$$\frac{\partial^2 V_m(x, t)}{\partial x^2} = r_o \frac{\partial I_o(x, t)}{\partial x} - r_i \frac{\partial I_i(x, t)}{\partial x}$$

és behelyettesítve (A.1)-t és (A.2)-t:

$$\frac{\partial^2 V_m(x, t)}{\partial x^2} = (r_o + r_i) K_m(x, t) - r_o K_{eo}(x, t) - r_i K_{ei}(x, t) \quad (\text{A.5})$$

Az eddig nem-lineáris elemmel jelölt sejtmembránt most már vizsgálhatjuk a következő helyettesítéssel (A.2. ábra):



A.2. ábra. A sejtmembrán helyettesítő áramköri rajza.

$$K_m(x, t) \Delta x = \hat{c}_m(\Delta x) \frac{\partial}{\partial t} (V_i(x, t) - V_o(x, t)) + \frac{V_i(x, t) - V_o(x, t)}{\hat{r}_m(\Delta x)} =$$

$$\hat{c}_m(\Delta x) \frac{\partial V_m(x, t)}{\partial t} + \hat{g}_m(\Delta x) V_m(x, t)$$

Ha $\Delta x \rightarrow 0$, akkor $\hat{c}_m(\Delta x) = c_m \Delta x$ illetve $\hat{r}_m(\Delta x) = r_m \Delta x$. Ezeket behelyettesítve:

$$K_m(x, t) = c_m \frac{\partial V_m(x, t)}{\partial t} + \frac{V_m(x, t)}{r_m}$$

Behelyettesítve A.5-be:

$$r_m c_m \frac{\partial V_m(x, t)}{\partial t} = \frac{r_m}{r_o + r_i} \left\{ \frac{\partial^2 V_m(x, t)}{\partial x^2} + r_o K_{eo}(x, t) + r_i K_{ei}(x, t) \right\} - V_m(x, t) \quad (\text{A.6})$$

Mivel a legtöbb esetben $K_{ei} = K_{eo} \equiv 0$:

$$\tau_m \frac{\partial V_m(x, t)}{\partial t} = \lambda_c^2 \frac{\partial^2 V_m(x, t)}{\partial x^2} - V_m(x, t) \quad (\text{A.7})$$

ahol

$$\lambda_c = \sqrt{\frac{r_m}{r_o + r_i}} \quad \tau_m = r_m c_m$$

τ_m a membrán időállandó (ami azt jellemzi, hogy a membrán mennyi idő múlva egyenlítődik ki), λ_c a kábel hossz állandó (ami jellemzi, hogy a kábel milyen távolságra tudja a potenciálváltozást továbbítani), r_m a hengerfelületű membrán egységnyi hosszra eső ellenállása, r_i a belső vezető egységnyi hosszra eső ellenállása, r_o a külső vezető egységnyi hosszra eső ellenállása.

A differenciál-egyenlet megoldásához szükség van a kezdeti értékekre és a határfeltételekre (a kábel végein V_m értékére) is, a megoldások azonban bonyolultak.

Irodalomjegyzék

- [1] ARBIB, MICHAEL A. (2002). The elements of brain theory and neural networks. *The handbook of brain theory and neural networks. (2nd edition)*. The MIT press.
- [2] GUPTA, MADAN M.; JIN, LIANG; HOMMA, NORIYASU (2003). *Static and dynamic neural networks*. IEEE Press, Wiley-Interscience.
- [3] SALÁNKI, JÁNOS (1998). *Neurobiológia*. Jegyzet, Veszprémi Egyetem Mérnöki Kar.