

CCS pótzh gyakorlat

1 Gyakorlat - 30p

1. Legyen

$$H(s) = \frac{s+2}{s^2-s-6}$$

illetve

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad C = (1 \quad 2) \quad D = 0$$

- (a) Realizációja-e $H(s)$ -nek a megadott állapotér modell? (2p)
- (b) Minimális realizációja-e $H(s)$ -nek a megadott állapotér modell? (2p)
- (c) Megfigyelhető-e az adott állapotér modell? Miért? (1p)
- (d) Asszimptotikusan stabil-e az adott állapotér modell? Miért? (1p)

MO:

- (a) Igen, mivel controller form, vagy igen mivel $H(s) = C(sI - A)^{-1}B$
- (b) Nem, mert $H(s)$ egyszerűsíthető $H(s) = \frac{(s+2)}{(s-3)(s+2)}$, Vagy nem, mert (A,B,C) nem megfigyelhető
- (c)

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

- (d) Nem, mert $\exists \lambda \operatorname{Re}\{\lambda_i\} > 0$

2. Legyen $x_1, x_2 \in [0, \pi)$

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -\sin(2x_1) \\ \frac{dx_2}{dt} &= \sin(2x_2) \end{aligned}$$

illetve

$$V(x) = \sin^2 x_1 + \cos^2 x_2$$

- Ljapunov függvénye-e V a fenti rendszernek (3p)?
- Mi lesz a rendszer *stabil* egyensúlyi pontja (1p)?

MO:

- Igen,

$$V > 0 \quad \frac{dV}{dx} = [2\sin x_1 \cos x_1 \quad -2\cos x_2 \sin x_2] = [\sin(2x_1) \quad -\sin(2x_2)]$$

$$\frac{dV}{dx} \dot{x} = -\sin^2(2x_1) - \sin^2(2x_2)$$

- Ahol $V(x)=0$: $x^* = [0 \quad \pi/2]'$

3. Adott egy folytonos idejű rendszer a következő mátrixokkal: Legyen

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad C = (0 \quad 1)$$

- Tervezzon állapotviszacsatolást a rendszerhez, mely a rendszer pólusait a $[-2 \ -2]$ helyre mozgatja el! (3p)
- Ellenőrizze a megoldást a zárt kör pólusainak meghatározásával! (1p)
- Tervezzon állapotmegfigyelőt a rendszerhez, ha $\phi_o = (s+2)(s+2)!$ (4p)

MO:

- Pl Ackermann:

$$K = [0 \quad 1]C^{-1}\phi(A) = [5 \quad 5]$$

ahol

$$C = [B \quad AB] = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \rightsquigarrow C^{-1} = [B \quad AB]^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\varphi_c(s) = (s+2)(s+2) = s^2 + 4s + 4 \rightsquigarrow \phi_c(A) = A^2 + 4A + 4I = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

-

$$\lambda_{(A-BK)} = [-2 \quad -2]$$

-

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = F\hat{x} + Ly + Hu$$

$$L = K^T = (C^{-1}\phi(\hat{A}))^T = [5/4 \quad 0]^T \quad F = A - LC \quad H = B$$

ahol $\hat{A} = A^T \quad \hat{B} = C^T$

$$C = [\hat{B} \quad \hat{A}\hat{B}] = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow C^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & 1 \\ 1/4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(s) = (s+2)(s+2) = s^2 + 4s + 4 \rightsquigarrow \phi(A) = A^2 + 4A + 4I = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

4. $\dot{x} = -2x + 2u$ határozza meg azt az u bemenetet állapotviszacsatolás formájában ami minimalizálja a

$$J = \frac{1}{2} \int_0^\infty x^T Q x + u^T R u \quad dt = \frac{1}{2} \int_0^\infty Q x^2 + R u^2 \quad dt$$

funkcionált, ahol $Q=5$, $R=4$ (5p)!

MO: A Ricatti-egyenlet:

$$K A + A^T K - K B R^{-1} B^T K + Q = -4K - 1K^2 + 5 = -K^2 - 4K + 5 = 0$$

melynek gyökei: $[-5 \ 1]$ melyek közül a pozitív gyök adja az állapotviszacsatolás képletét $G = R^{-1} B^T K = 1/4 * 2 * 1$ alakban (tehát $u=-0.5x$)

5. Adott egy diszkrét idejű rendszer a következő mátrixokkal:

$$\Phi = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}, \quad \Gamma = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad x(k+1) = \Phi x(k) + \Gamma u(k)$$

- Asszimptotikusan stabil-e a rendszer(2p)?

MO: Nem $\lambda_{1,2} = -3 \pm i$

- Adja meg azt a legrövidebb jelsorozatot, amely a rendszert a $[1 \ 2]^T$ kezdeti állapotból az origóba irányítja (5p)!

MO: $U = -W_c^{-1} \Phi^2 x_0 = [u_1 \ u_0] = [10 \ 6]^T$

$$W_c = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \quad W_c^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -0.4 & 0.2 \end{pmatrix}$$

$$\phi^2 = \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ -6 & 8 \end{pmatrix} \quad \phi^2 x_0 = \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \end{pmatrix}$$