

2008 Potzh gyakorlati rész

1. Igaz-e hogy $e^A e^B = e^B e^A$? (4p)

(Igen válasz esetén indoklás, nem esetén ellenpélda!)

MO:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$e^A = I + A + \frac{A^2}{2!} + \dots = I + A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$e^B = I + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow e^A e^B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad e^B e^A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- 2.

$$W(s) = \frac{-5s - 4}{s^2 + s - 2}$$

- (a) Határozza meg a rendszer impulzusválaszát (súlyfüggvényét)(2p)!

Mo:

$$W(s) = \frac{-5s - 4}{s^2 + s - 2} = \frac{-2}{s + 2} + \frac{-3}{s - 1} \rightsquigarrow h(t) = -2e^{-2t} - 3e^t$$

3. Legyen egy folytonos idejű rendszer állapotegyenlete $\dot{x} = Ax + Bu \quad y = Cx$ ahol

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad C = [1 \quad 1]$$

- (a) Diszkrétizálja a rendszert $t = \ln 3$ mintavételi idővel (5p)!

- (b) Mi az az állapottranszformáció, mely a fenti modellt a

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \bar{B} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \bar{C} = [-0.25 \quad 0.75]$$

modellbe transzformálja (5p)?

MO:

- (a)

$$(sI - A)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{s-2} & 0 \\ -\frac{1}{(s-2)^2} & \frac{1}{s-2} \end{pmatrix} \rightsquigarrow e^{At} = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ -te^{2t} & e^{2t} \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\Phi = e^{AT} = \begin{pmatrix} e^{2\ln 2} & 0 \\ -te^{2\ln 2} & e^{2\ln 2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -\ln(3)4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\Gamma = A^{-1}(e^{AT} - I)B = \begin{pmatrix} 4.0000 \\ -2.9438 \end{pmatrix} \quad (5p)$$

(b) Mivel $M_c^{-1} \exists$,

$$\bar{M}_c = TM_c \rightsquigarrow T = \bar{M}_c M_c^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$TAT^{-1} = \bar{A}, TB = \bar{B}, CT^{-1} = \bar{C} \text{ (5p)}$$

4. Tekintsük továbbra is a fenti állapotter modellt! Tervezzon állapotvisszacsatolást, mely a rendszer pólusait a $[-2, -1]$ helyre helyezi át (3p)! Ellenőrizze a megoldást! (1p)

MO: Ackermann:

$$\varphi_c(s) = (s+1)(s+2) = s^2 + 3s + 2$$

$$K = [0 \quad 1]M_c^{-1}\varphi_c(A) = [0 \quad 1][B \quad AB]^{-1}(A^2 + 3A + 2I) = [7 \quad -12]$$

$$M_c = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad M_c^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \varphi_c(A) = \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ -7 & 12 \end{pmatrix}$$

5. Tekintsük továbbra is a fenti állapotter modellt!

Tervezzon állapotmegfigyelőt a rendszerhez: Adja meg a megfigyelő

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = F\hat{x} + Gy + Hu$$

egyenletének F, G és H mátrixait, ha a megfigyelő karakterisztikus egyenlete: $\varphi_o = (s+2)(s+2)$ (5p)

MO:

$$\bar{A} = A^T \quad \bar{B} = C^T$$

$$K_2 = [0 \quad 1]\bar{M}_c^{-1}\varphi_o(\bar{A}) = [0 \quad 1][\bar{B} \quad \bar{A}\bar{B}]^{-1}(\bar{A}^2 + 4\bar{A} + 4I) = [-16 \quad 24]$$

$$\bar{M}_c = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \bar{M}_c^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \varphi_o(\bar{A}) = \begin{pmatrix} 16 & -8 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$$

$$G = K_2^T \quad F = A - GC = \begin{pmatrix} 18 & 16 \\ -25 & -22 \end{pmatrix} \quad H = B$$

6. Adott egy diszkrét idejű rendszer a következő mátrixokkal:

$$\Phi = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}, \quad \Gamma = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad x(k+1) = \Phi x(k) + \Gamma u(k)$$

- Asszimptotikusan stabil-e a rendszer(1p)?

MO: Nem $\lambda_{1,2} = -3 \pm i$

- Adja meg azt a legrövidebb jelsorozatot, amely a rendszert a $[1 \ 2]^T$ kezdeti állapotból az origóba irányítja (4p)!

MO: $U = -W_c^{-1}\Phi^2 x_0 = [u_1 \ u_0] = [10 \ 6]^T$

$$W_c = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \quad W_c^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -0.4 & 0.2 \end{pmatrix}$$

$$\phi^2 = \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ -6 & 8 \end{pmatrix} \quad \phi^2 x_0 = \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \end{pmatrix}$$