

CCS 2014 PZh gyakorlat

1 Gyakorlat - 20p

1. Adott az alábbi rendszer:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ a & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Tervezzon állapotvisszacsatolást a rendszerhez, mely a rendszer mindkét pólusát -1 -be helyezi át (3p)!

MO:

Ackermann:

$$\varphi_c(s) = (s+1)(s+1) = s^2 + 2s + 1$$

$$K = [0 \quad 1]M_c^{-1}\varphi_c(A) = [0 \quad 1][B \quad AB]^{-1}(A^2 + 2A + I)$$

$$K = [0 \quad 1] \begin{pmatrix} 1 & -1/a \\ 0 & 1/a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2a+4 & 6 \\ 3a & 2a+1 \end{pmatrix} = [3 \quad (2a+1)/a]$$

- Ellenőrizze a megoldást! (1p)

$$A - BK = \begin{pmatrix} -2 & 2 - (2a+1)/a \\ a & 0 \end{pmatrix} \quad sI - (A - BK) = \begin{pmatrix} s+2 & (2a+1)/a - 2 \\ -a & s \end{pmatrix}$$

$$\det(sI - (A - BK)) = (s+2)s + a((2a+1)/a - 2) = s^2 + 2s + 1 = (s+1)(s+1)$$

- Milyen a érték esetén nem lehet realizálni a visszacsatolást? Miért? (1p)

MO: $a = 0$ -ra a rendszer nem irányítható.

2. Adott a következő állapotter modell:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad C = (2 \quad -2) \quad D = 0$$

- (a) Tekintsük a $H(s) = \frac{2s-2}{s^2+3s+2}$ átviteli függvényt Realizációja-e ennek az adott állapotter modell? (1p)
- (b) Minimálfázisú-e a rendszer? Miért? (1p)
- (c) Megfigyelhető-e a rendszer? Miért? (1p)
- (d) Írja fel a rendszer állapotter modelljét az alábbi új változóiban:
 $\tilde{x}_1 = -x_1 + x_2 \quad \tilde{x}_2 = 2x_1$ (2p)

MO:

- (a) Igen, mivel controller form, vagy igen mivel $H(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{2s-2}{s^2+5s+6}$
- (b) Nem, mert $H(s)$ zérusa ($s=1$) nem stabil.
- (c) Igen, mert minimális. Vagy

$$M_o = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -8 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{(d) } T &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \\ \tilde{A} &= TAT^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -5 \end{pmatrix} \quad \tilde{B} = TB = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \tilde{C} &= CT^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3. Legyen

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1^3 + x_2 \\ \dot{x}_2 &= -2x_1 - x_2 \end{aligned}$$

Ljapunov függvénye-e a rendszernek $V(x) = 2x_1^2 + x_2^2$ (3p)?

MO:

$$V(x) > 0, \quad \frac{dV}{dx} = [4x_1 \quad 2x_2] \rightsquigarrow \frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dx} \frac{dx}{dt} = -4x_1^4 + 4x_1x_2 - 4x_1x_2 - 2x_2^2 \rightsquigarrow \frac{dV}{dt} < 0$$

4. Adott egy diszkrét idejű rendszer a következő mátrixokkal:

$$\Phi = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \Gamma = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad x(k+1) = \Phi x(k) + \Gamma u(k)$$

Adja meg azt a legrövidebb jelsorozatot, amely a rendszert a $[1 \quad -1]^T$ kezdeti állapotból az $[1 \quad -11]^T$ állapotba viszi (3p)!

MO: $x(n) = \Phi^n x(0) + W_c U$ ahol $W_c = [\Gamma \quad \Phi\Gamma \quad \Phi^2\Gamma \quad \dots \quad \Phi^{n-1}\Gamma]$ és $U = [u(n-1) \dots u(0)]^T$ itt

$$x(2) = \Phi^2 x(0) + W_c U = \begin{bmatrix} 1 \\ -11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 6 \\ -6 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(1) \\ u(0) \end{bmatrix}$$

$$x(2) = \Phi^2 x(0) + W_c U = \begin{bmatrix} 1 \\ -11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -14 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(1) \\ u(0) \end{bmatrix}$$

$$x(2) = \Phi^2 x(0) + W_c U = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(1) \\ u(0) \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} u(1) \\ u(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}$$

ellenőrzés:

$$x(1) = \Phi x(0) + \Gamma = [1 \quad -6]^T, \quad x(2) = \Phi x(1) + \Gamma = [1 \quad -11]^T$$

5. Legyen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- (a) Adjon meg a rendszer esetén 3 különböző irányítható állapotot (1p)!
- (b) Végezze el a rendszer irányíthatósági dekompozícióját (3p)!

MO:

(a)

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$\rightsquigarrow$ Az irány irányíthatósági altér az origón átmenő -1 meredekségű egyenes (mert az irányíthatósági mátrix oszlopai ezt feszítik ki) - az ezen található pontok irányíthatóak.

- (b) új bázis - úgy hogy az egyik bázisvektor az irányíthatósági altérbe essen, a másik pedig ettől független legyen - pl: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow T = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & -0.5 \end{pmatrix}$
- $$TAT^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \quad TB = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$