

CCS Pótzh gyakorlat

1 Gyakorlat - 30p

1. Legyen

$$H(s) = \frac{2s + 12}{(s + 1)(2s + 2)(s + 4)}$$

Adja meg egy tetszőleges állapotter reprezentációját $H(s)$ -nek (3p)!

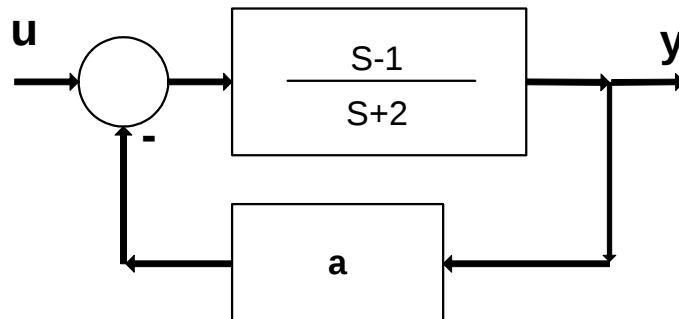
MO:

$$H(s) = \frac{2s + 12}{2s^3 + 12s^2 + 18s + 8} = \frac{s + 6}{s^3 + 6s^2 + 9s + 4}$$

Pl. Controller form:

$$A = \begin{bmatrix} -6 & -9 & -4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = [0 \quad 1 \quad 6]$$

2. Adott az alábbi rendszer:



tfh: $a > 0$

- (a) Határozza meg a rendszer eredő átviteli függvényét (polinóm/polinóm alakban)! (2p)
- (b) Függ-e és ha igen, hogyan a rendszer asszimptotikus stabilitása az a paramétértől? (3p)

MO:

$$W(s) = \frac{\frac{s-1}{s+2}}{1 + a \frac{s-1}{s+2}} = \frac{\frac{s-1}{s+2}}{\frac{s+2+as-a}{s+2}} = \frac{s-1}{(a+1)s + (2-a)}$$

$a > 2$ esetén instabil a rendszer.

3. Milyen a esetén lesz az $L = ax_1^2x_2^2$ függvény az alábbi rendszer Ljapunov-függvénye (5p)?
(indoklás!)

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1^3x_2^2 \\ \dot{x}_2 &= -x_2^3\end{aligned}$$

MO:

$$\frac{dL}{dt} = \frac{dL}{dx} \frac{dx}{dt} = [2ax_1x_2^2 \quad 2ax_1^2x_2] \begin{pmatrix} -x_1^3x_2^2 \\ -x_2^3 \end{pmatrix} = -2ax_1^4x_2^4 - 2ax_1^2x_2^4$$

$$\rightsquigarrow a > 0$$

4. Legyen egy folytonos idejű rendszer állapotegyenlete $\dot{x} = Ax + Bu$ $y = Cx$ ahol

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad C = [1 \quad 1]$$

Mi az az állapottranszformáció, mely a fenti modellt a

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \bar{B} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \bar{C} = [1 \quad 0]$$

modellbe transzformálja (3p) ?

MO:

Mivel $\exists M_c^{-1}$,

$$\bar{M}_c = TM_c \rightsquigarrow T = \bar{M}_c M_c^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$TAT^{-1} = \bar{A}, TB = \bar{B}, CT^{-1} = \bar{C}$$

5. Adott egy diszkrét idejű rendszer a következő mátrixokkal:

$$\Phi = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \Gamma = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad x(k+1) = \Phi x(k) + \Gamma u(k)$$

Adja meg azt a legrövidebb jelsorozatot, amely a rendszert a $[1 \quad -1]^T$ kezdeti állapotból az $[1 \quad -11]^T$ állapotba viszi (5p)!

MO: $x(n) = \Phi^n x(0) + W_c U$ ahol $W_c = [\Gamma \quad \Phi\Gamma \quad \Phi^2\Gamma \quad \dots \quad \Phi^{n-1}\Gamma]$ és $U = [u(n-1) \dots u(0)]^T$ itt

$$x(2) = \Phi^2 x(0) + W_c U = \begin{bmatrix} 1 \\ -11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 6 \\ -6 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(1) \\ u(0) \end{bmatrix}$$

$$x(2) = \Phi^2 x(0) + W_c U = \begin{bmatrix} 1 \\ -11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -14 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(1) \\ u(0) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(1) \\ u(0) \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} u(1) \\ u(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}$$

ellenőrzés:

$$x(1) = \phi x(0) + \Gamma * (-1) = [1 \quad -6]^T, \quad x(2) = \phi x(1) + \Gamma * 4 = [1 \quad -11]^T$$

6. Legyen

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad C = (0 \quad 1)$$

- (a) Tervezzon állapotviszacsatolást a rendszerhez, mely a rendszer pólusait a $[-4 \ -1]$ helyre mozgatja el! (4p)
- (b) Ellenőrizze a megoldást a zárt kör pólusainak meghatározásával! (1p)
- (c) Tervezzon állapotmegfigyelőt a rendszerhez, úgy hogy a megfigyelő karakterisztikus egyenlete legyen $\phi_o = (s + 4)(s + 1)$! (4p)

MO:

(a) Pl Ackermann:

$$K = [0 \quad 1] \mathcal{C}^{-1} \phi(A) = [1 \quad -2.5]$$

ahol

$$\mathcal{C} = [B \quad AB] = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & -8 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \mathcal{C}^{-1} = [B \quad AB]^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ -1/4 & -1/4 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(s) = (s + 4)(s + 1) = s^2 + 5s + 4 \rightsquigarrow \phi(A) = A^2 + 5A + 4I = \begin{pmatrix} 3 & -21 \\ -7 & 31 \end{pmatrix}$$

(b)

$$\lambda_{(A-BK)} = [-4 \quad -1]$$

(c) A fiktív rendszer:

$$A_2 = A^T \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \quad B_2 = C^T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$K_2 = [0 \quad 1] \mathcal{C}_2^{-1} \phi(A) = [-3 \quad 7]$$

ahol

$$\mathcal{C}_2 = [B_2 \quad A_2 B_2] = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \mathcal{C}_2^{-1} = [B_2 \quad A_2 B_2]^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\varphi_o(s) = (s + 4)(s + 1) = s^2 + 5s + 4 \rightsquigarrow \phi(A) = A_2^2 + 5A_2 + 4I = \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ -21 & 31 \end{pmatrix}$$

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = F\hat{x} + Ly + Hu$$

ahol

$$L = K_2^T = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix} \quad F = A - LC = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} \quad H = B = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$