

Sztochasztikus folyamatok 1. házi feladat

1. Egy borfajta alkoholtartalmának meghatározására méréseket végzünk. Az egyes mérések eredményei egymástól független valószínűségi változók, melyek normális eloszlásúak, várható értékük a tényleges alkoholtartalom (százalékban), szórásuk 2.5. A következő mérési eredményeket kaptuk: 12.1, 11.4, 11.5, 12.4, 12.9, 14.2, 7.9, 14.0, 13.2, 14.2, 10.9, 11.3, 14.6, 8.1, 9.7.
 - a) Adjunk meg 99%-os biztonságu szimmetrikus konfidencia-intervallumot a bor alkoholtartalmára!
 - b) Hány mérést kellene végeznünk, ha olyan konfidencia-intervallumot szeretnénk kapni, melynek hossza 2?
 - c) Adjunk meg olyan $(-\infty, \bar{\xi}_{15} + \gamma)$ alakú konfidencia-intervallumot, amelybe 95% valószínűséggel beleesik az alkoholtartalom.
2. Egy cég 16 ml-es üvegekben árul bizonyos gyógyszert. Az üvegeket egy automata tölti. A gyártás ellenőrzésére időnként véletlenszerűen kiválasztanak néhány üveget (minta), ennek alapján próbálnak következtetni az üvegekbe kerülő gyógyszer mennyiségre.

Tegyük fel, hogy a következő, hatelemű mintát kapták az egyik ellenőrzés során:

15.68, 16.00, 15.61, 15.93, 15.86, 15.72.

 - a) Becsüljük meg ez alapján az egy üvegbe kerülő gyógyszer mennyiségének várható értékét és szórását! (Számítsuk ki a mintaátlagot és a korrigált tapasztalati szórást!)
 - b) A minta alapján adjunk 95%-os és 99%-os szimmetrikus konfidencia intervallumot a várható értékre.
3. Egy munkáltatót egy titkárnő által gépelt szövegekben előforduló hibák száma érdekli. Pl. a hibák átlagos száma és a hibaszám szórása. A munkáltató 10 darab, közel azonos hosszúságú, a titkárnő által legépelt szövegben megszámolja a hibákat, és a következő eredményeket kapja: 2,3,1,0,5,3,2,1,4,3. Ésszerű feltenni, hogy a hibák száma Poisson eloszlású, de az eloszlás paramétere λ ismeretlen. A megfigyelések alapján szeretnénk következtetni λ -ra (majd ebből a várható értékre és a szórásra). Adjuk meg a λ paraméter ML becslését! Általános esetben, $\xi_1, \dots, \xi_n$ mérési eredmények esetén mi a λ ML becslése?
4. Hétfőtől péntekig naponta megmérjük számítógépünk áramfogyasztását, és a következő adatokat kapjuk: 320,315,310,319, 316 (kWh). Feltehető, hogy a napi áramfogyasztás normális eloszlású. Adjuk meg m és σ ML becslését! (m ML becslését már az előadáson meghatároztuk, persze fel kell írni, hogy a konkrét értékek alapján itt mi adódik. σ ML becslésénél m helyébe az ML becslésből adódó értéket írjuk! Érdemes előbb általános $\xi_1, \dots, \xi_n$ mérési eredmények esetén felírni az ML becslést, és utána a konkrét értékeket behelyettesíteni.)

5. (Szorgalmi házi feladat.) Hétfőtől péntekig megmérjük, hogy mennyit kell várni a buszra. Feltehető, hogy ez $[0, b]$ intervallumon egyenletes eloszlású, ahol b ismeretlen. A mérési eredmények $\xi_1, \dots, \xi_5$ alapján adjunk ML becslést b -re! Torzítatlan-e ez a becslés? Ha nem, adjunk torzítatlan becslést is b -re!

Sztochasztikus folyamatok 2. házi feladat

1. Egy töltő-gépsor által az üvegbe tett folyadék mennyiségének szórása 2 cl (és normális eloszlást követ). Megmérjük 18 üveg tartalmát ($\xi_1, \dots, \xi_{18}$) és átlagosan $\bar{\xi}_{18} = 52$ cl-nek találjuk. Döntsük el 95%-os szignifikanciaszinten, hogy elfogadható-e az a feltételezés, hogy a gépsor szabványos mennyiséget tölt (azaz $E\xi_1 = 0,5$ l). Melyik az a legnagyobb szignifikanciaszint, amelyiken elvethetjük H_0 -t?
2. Kétmintás u-próbát alkalmazva dönts a következő problémában: Manchester és Leeds városok évi átlagos csapadékmennyisége az elmúlt tíz év mérései alapján $\bar{\xi}_{10} = 35$ illetve $\bar{\eta}_{10} = 28$. A csapadékmennyiség szórásnégyzetei (nem szórásai, vigyázat!) ismertek, $\sigma_M^2 = 53$, $\sigma_L^2 = 47$. Döntsünk 99%-os szinten arról, hogy a két város átlagos csapadékmennyisége megegyezik-e !
3. Manchester és Leeds városok évi csapadékmennyiségének ingadozását akarjuk összevetni. Az elmúlt tíz év mérései alapján (azaz mindkét minta 10 elemű) azt találtuk, hogy a korrigált tapasztalati szórásnégyzetek $s_M^2 = 42$, $s_L^2 = 38$ (az egyszerűség kedvéért ezeket a jelöléseket használjuk), az átlagok pedig $\bar{\xi}_{10} = 35$ illetve $\bar{\eta}_{10} = 28$. Döntsünk 95%-os szignifikanciaszinten arról a hipotézisről, hogy a két csapadékmennyiség szórása azonos-e! Amennyiben igen, döntsünk 99%-os szinten arról, hogy a két város átlagos csapadékmennyisége megegyezik-e !
4. Az alábbi két minta 5 autó fogyasztási adatait tartalmazza. Az első sorban a szervíz előtti, a másodikban a szervíz utáni értékek találhatók. Csökkentette-e a szervíz a fogyasztást?

első eredmény	7,9	8,1	8,8	7,2	6,0
második eredmény	7,5	7,5	8,1	7,2	5,7

3 feladat beadása kötelező, de ajánlott mind a négy feladatot megoldani!

1. Megjegyzés: A 2. (és a 3.) feladatban két **független** mintánk van (két különböző város csapadékmennyiségei), ezért kétmintás (u illetve t) próbát használhatunk. A 4. feladatban a két minta (szervíz előtti és szervíz utáni értékek) **nem független**, mivel ugyanazon autók korábbi és későbbi fogyasztásáról van szó, ezért itt kétmintás próbát **nem használhatunk!** A két minta autónként vett különbségére, azaz a fogyasztás megváltozására kell egymintás próbát használnunk. (Lásd pl. 2. gyakorlat 4. feladat.)

2. Megjegyzés: Figyeljünk arra, hogy u vagy t próbát kell-e használnunk a különböző feladatokban. Ha a valódi szórás(ok) adott(ak), ismertek, akkor u-próba használandó, ha a valódi szórás nem adott, hanem csak korrigált tapasztalati szórást tudunk számolni a mintából (vagy számoltak már helyettünk), akkor t-próba használandó. Az első házi feladat megoldásában sok hibás megoldás született amiatt, hogy erre (normális vagy t eloszlás használandó-e) nem figyeltetek.

3. Megjegyzés: A 4. feladatban szükség van átlag és korrigált tapasztalati szórás számítására. Erre akár számítógépes programcsomagot is segítségül hívhattok. Az Excel Átlag és Szórás parancsai átlagot és korrigált tapasztalati szórást számolnak, persze matematikai programcsomagok is használhatóak.

Sztochasztikus folyamatok 3. házi feladat

1. Tekintsük az alábbi mozgó átlag folyamatot, ahol ε_t fehér zaj, $D^2\varepsilon_0 = \sigma^2 = 3$ és

$$X_t = \varepsilon_t + 3\varepsilon_{t-1} - 2\varepsilon_{t-2} + 4\varepsilon_{t-3}, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Számoljuk ki $R_X(k)$ -t minden $k \in \mathbb{Z}$ -re!

(Segítség: $\text{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$, ha $i \neq j$, $\text{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_i) = D^2\varepsilon_i = 3$, hasonló példa volt gyakorlaton.)

2. Tekintsük az

$$X_t = \frac{1}{m+1}X_{t-1} + \varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z}$$

stacionárius autoregresszív folyamatot, ahol ε_t IID (azaz független, azonos eloszlású) 0 várható értékű és 4 szórásnégyzetű sorozat, m pedig a kedvenc író születési hónapja. Legyen W_t egy másik IID sorozat, 0 várható értékkel és 9 szórásnégyzettel. Tegyük fel, hogy a W_t sorozat független az ε_t sorozattól (ebből következőleg X_t -től is). Adjuk meg a $Z_t := X_t + W_t$ sorozat R_Z kovarianciafüggvényét. Számoljuk ki az

$$U_t = Z_t - \frac{1}{m+1}Z_{t-1}$$

folyamat R_U kovarianciafüggvényét is. Ezek után próbáljuk meg kitalálni, milyen típusú folyamat az U !

3. Két stacionárius folyamatot tekintünk, az egyik

$$X_t = \frac{1}{4}X_{t-1} + \varepsilon_t,$$

ahol ε_t független és azonos eloszlású sorozat 0 várható értékkel és 1 szórásnégyzettel. A másik

$$Z_t = \eta_t - \eta_{t-1},$$

ahol η_t független és azonos eloszlású sorozat 0 várható értékkel és 2 szórásnégyzettel. Tudjuk, hogy az η_t sorozat független a ε_t sorozattól (következésképpen X_t -től is). Számoljuk ki $R_{X+Z}(k)$ -t minden $k \in \mathbb{Z}$ -re ! ($(X+Z)_t := X_t + Z_t$ az összegfolyamat.)

4. Szorgalmi házi feladat.

a) Legyenek X és Y tetszőleges valószínűségi változók, melyek második momentuma létezik és véges. Keressük az Y legkisebb négyzetes értelemben legjobb lineáris közelítését X -ből, azaz keressük azon $a, b \in \mathbb{R}$ számokat, amelyekre $E([Y - (aX + b)]^2)$ a lehető legkisebb. Fejezzük ki a -t és b -t $\text{cov}(X, Y)$ illetve DX, DY, EX, EY segítségével. (Ez az ún. lineáris regresszió, amikor egy val. változót egy másik val. változó lineáris függvényével próbálunk a lehető legjobban közelíteni.)

b) Legyen X_t , $t \in \mathbb{Z}$ egy gyengén stacionárius folyamat μ várható értékkel és R_X kovarianciafüggvénnyel. Legyenek $n, h \in \mathbb{Z}$. Keressük az X_{n+h} legkisebb négyzetes értelemben legjobb lineáris közelítését X_n -ből, azaz keressük azon $a, b \in \mathbb{R}$ számokat, amelyekre $E([X_{n+h} - (aX_n + b)]^2)$ a lehető legkisebb. Fejezzük ki a -t és b -t a μ illetve R_X segítségével.

5. Szorgalmi házi feladat. Legyen U a $[-\pi, \pi]$ intervallumon egyenletes eloszlású val.változó, és képezzük az

$$X_t = \cos(tU), \quad t = 1, 2, \dots$$

sztochasztikus folyamatot. Határozzuk meg az $E(X_t)$ várható értékek és $cov(X_t, X_s)$ kovarianciák értékét. Stacionárius-e az X_t folyamat? Ha igen, adjuk meg a kovarianciafüggvényét!

Az 1. és 2. feladat beadása kötelező, nem kötelező de erősen ajánlott a 3. feladatot is megoldani. A 4. és 5. feladat szorgalmi.

Sztochasztikus folyamatok 4. házi feladat

1. Láttuk, hogy ha $|a| < 1$ és $b \neq -a$, akkor az

$$X_t - aX_{t-1} = \varepsilon_t + b\varepsilon_{t-1}$$

ARMA folyamat létezik, sőt, megkonstruáltuk kauzális végtelen mozgó átlag előállítását:

$$X_t = \varepsilon_t + \sum_{j=1}^{\infty} (a+b)a^{j-1}\varepsilon_{t-j}.$$

Számoljuk ki az $R_X(0)$, $R_X(1)$, $R_X(2)$, és általában az $R_X(k)$ értékeket, majd adjuk meg ezek értékét $a = 1/2$ és $b = 1/3$ esetén is. (Végtelen sorokkal kell dolgozni, de a geometriai sor összegképlete minden nehézségen átsegít. Emlékeztető: Ha $Z_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}$ végtelen mozgó átlag, akkor $R_Z(k) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \psi_{j+k} \sigma^2$.)

2. Az alábbi táblázat két szempont szerint csoportosítja egy iskola tanulóit: zenei ill. matematikai készség.

zene/matematika	kiváló	közepes	rossz
kiváló	35	30	18
közepes	29	18	4
rossz	7	2	1

Ez alapján 95%-os szinten dönts arról, hogy a két készség független-e!

3. Tegyük fel, hogy egy tetraéder alakú dobókockával 100-szor dobtunk. Találjunk ki olyan gyakoriságokat (azaz ν_i , $i = 1, 2, 3, 4$ egészeket, melyekre $\sum_i \nu_i = 100$), amelyekre igaz, hogy 99%-os szinten elfogadható az a hipotézis, hogy a tetraéder szabályos. Adjunk meg olyan gyakoriságokat is, amelyekre ez a hipotézis nem fogadható el az adott szinten! (Őrizkedjünk a nagyon triviális példáktól, mint pl. mind a 100-szor 4-es lett. Két egyforma megoldás ne legyen.)
4. Szorgalmi házi feladat. Milyen próbát végeznél annak eldöntésére, hogy 3 féle adott szempont független? Mi lesz vajon a próba eloszlása?

Sztochasztikus folyamatok 5. házi feladat

1. a) Az alábbi ARMA folyamat esetén írjunk fel rekurziót X_{t+1} becslésére az $(X_t, X_{t-1}, \dots)$ generálta múltból

$$X_t + \frac{1}{20}X_{t-1} - \frac{1}{20}X_{t-2} = 2\varepsilon_t - \frac{3}{5}\varepsilon_{t-1} - \frac{1}{5}\varepsilon_{t-2}.$$

Ellenőrizzük, hogy a folyamat stabil és invertálható.

b) Mi a helyzet, ha két lépésre akarjuk előrejelezni a folyamatot? Avagy írunk fel rekurziót X_{t+1} becslésére az $(X_{t-1}, X_{t-2}, \dots)$ generálta múltból.

c) (Szorgalmi.) Ha 3 vagy általában k lépésre akarnánk előrejelezni, hogyan járnánk el? (Nem kell a számolás minden részletét leírni.)

2. Tekintsük az alábbi ARMA folyamatot

$$X_t + \frac{1}{20}X_{t-1} - \frac{1}{20}X_{t-2} = 2\varepsilon_t.$$

ahol ε_t fehérzaj, $E\varepsilon_t^2 = \sigma^2 = 3$. Számoljuk ki R_X -et.

3. (Szorgalmi.) Tekintsük az alábbi ARMA folyamatot,

$$X_t + \frac{1}{20}X_{t-1} - \frac{1}{20}X_{t-2} = 2\varepsilon_t + \frac{1}{5}\varepsilon_{t-1}.$$

ahol ε_t fehérzaj, $E\varepsilon_t^2 = \sigma^2 = 3$. Számoljuk ki R_X -et. (Nem kell a számolás minden részletét elvégezni. Az adódó lineáris egyenletrendszert esetleg megoldhatjuk valamely matematikai programcsomag segítségével.)

Sztochasztikus folyamatok 6. házi feladat

1. Egy X_t stacionárius folyamat spektrális sűrűségfüggvénye

$$\phi_X(u) = e^{-m|u|}, \quad u \in [-\pi, \pi].$$

m legyen a kedvenc számod 2 és 8 között. Számítsuk ki $R_X(k)$ -t! Használjuk fel a következő állítást:

Állítás. Ha f páros függvény, akkor

$$\int_{-\pi}^0 f(u)e^{iku} du = \overline{\int_0^{\pi} f(u)e^{iku} du}$$

és így

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(u)e^{iku} du = 2\operatorname{Re} \int_0^{\pi} f(u)e^{iku} du.$$

Az integrálásnál komplex függvény jön be, de ettől nem kell megijedni. Például e^{-inu} primitív függvénye $\frac{e^{-inu}}{-in}$, ha $n \neq 0$. A feladathoz tartozik, hogy a kapott kifejezést addig alakítsuk, amíg valós nem lesz, hiszen $R_X(k)$ valós kell legyen.

2. Tekintsük az alábbi ARMA folyamatot:

$$X_t - \frac{1}{3}X_{t-1} = \varepsilon_t - \frac{1}{2m}\varepsilon_{t-1},$$

ahol $m \geq 1$ egy tetszőleges, általad választott szám. Adjuk meg az X_t folyamat spektrális sűrűségfüggvényét!

Használjuk az előadáson tanult képletet $\phi_X(t) = \sigma^2 \left| \frac{B(e^{it})}{A(e^{it})} \right|^2$, és "komplextelenítsünk", azaz a komplex számokra vonatkozó azonosságokat felhasználva küszöböljük ki az i képzetes egységet tartalmazó tagokat. Alkalmazzuk az

$$e^{it} + e^{-it} = 2\cos t, \quad t \in \mathbb{R}, \quad |z|^2 = z\bar{z}, \quad z \in \mathbb{C}$$

azonosságokat, ahol $\bar{z}$ a z konjugáltja. Koszinusz két polinomjának hányadosát kell kapnunk.

3. A Paley-Wiener tétel segítségével döntsük el, hogy a $\phi_X(u) = e^{-1/u^2}$, $u \in [-\pi, \pi]$ spektrális sűrűségfüggvény származhat-e olyan folyamatból, amely előáll kauzális végtelen mozgóátlagként!
4. Szorgalmi feladat. Adott egy ARMA folyamat spektrális sűrűségfüggvénye:

$$\phi(u) = \frac{1 + \cos u}{2.125 - \cos(2u)}, \quad u \in [-\pi, \pi].$$

Mi lehet az ARMA folyamat egyenlete?

Sztochasztikus folyamatok 7. házi feladat

1. Írjátok le egy (vagy több) olyan jelenséget a valós életből, amelyik Markov-lánccal modellezhető! Legalább 3 állapota legyen a Markov-láncnak! Írjátok fel az átmenetmátrixot, és rajzoljátok fel a gráfes reprezentációt is!
2. Az X_t diszkrét idejű Markov lánc állapotainak halmaza $S = \{1, 2, 3\}$, átmenetmátrixa pedig

$$\pi = \begin{pmatrix} 1/2 & p & 0 \\ 1/2 & q & 1/4 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

- a) Határozzuk meg p és q értékét!
- b) Feltéve, hogy a lánc a kezdeti $t = 0$ időpontban a 2 állapotból indul, mennyi annak a valószínűsége, hogy a $t = 2$ időpontban az 1 állapotban lesz?
- c) $P(X_5 = 1 | X_3 = 2) = ?$
- d) Mi lesz X_2 eloszlása, ha X_0 eloszlása $(2/10, 3/10, 5/10)$?
- e) Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy a $t = 0, 1, 2, 3$ időpontokban a lánc az $X_0 = 3, X_1 = 2, X_2 = 2, X_3 = 1$ állapotokban lesz, ha a kezdeti $t = 0$ időpontban a lánc állapotának eloszlása $(2/10, 3/10, 5/10)$!
- f) Irreducibilis-e a Markov lánc, azaz igaz-e, hogy minden állapotból minden állapotba el lehet jutni valahány lépésben pozitív valószínűséggel?
- g) Aperiodikus-e a Markov lánc?

A megoldáshoz hívjuk segítségül az előadásjegyzetet is.

3. Szorgalmi (de jó lenne, ha mindenki megpróbálná megoldani).

A Söder kft. kétféle munkát vállal: A és B típusút. Az A típusú munka 1 hónapig tart, és a bevétele belőle 1,2 millió forint, a B típusú munka 2 hónapig tart és a bevétele belőle 3 millió forint. Minden hónap elején vesznek fel rendelést, feltéve, hogy nem tartanak éppen egy B típusú munka közepén. Minden hónap elején 50% eséllyel érkezik megrendelés B típusú munkára és 60% eséllyel A típusú munkára (függetlenül). Ha mindkét fajta megrendelés érkezik, akkor egy B típusút fogadnak el.

Modellezzük a Söder kft. havi tevékenységét Markov-lánccal. Mik legyenek az állapotok? Mik az átmenetvalószínűségek?

4. Szorgalmi. Ottó bácsi minden nap $2/3$ eséllyel megveszi az aznapi újságot, és este beteszi a többi közé. Vacsora után a felesége $1/4$ eséllyel az egész újságkupacot kidobja (akár hozott Ottó bácsi újságot, akár nem). Ha összegyűlik 5 újság, azonnal kidobja őket. Egy este vacsora után meglátogatjuk Ottó bácsit. Mi az ekkor az újságkupacban lévő újságok számának eloszlása?

Sztochasztikus folyamatok 8. házi feladat

1. A következő szerencsejátékot játszom: minden körben $1/3$ valószínűséggel nyerek $1\$$ -t (akkor is, ha most éppen semennyi pénzem nincs), $2/3$ valószínűséggel minden pénzemet elveszítem. Ha már $3\$$ -om összegyűlt, akkor tovább nem nőhet a pénzem, viszont $2/3$ eséllyel továbbra is mindent elveszíthetek a következő körben. Írd fel a játékot leíró Markov-lánc állapotterét és átmeneti mátrixát! Irreducibilis-e ez a Markov-lánc és miért? Aperiodikus-e? Számítsd ki a stacionárius eloszlását! Egyensúlyi állapotban mennyi a pénzem várható értéke?
2. Irreducibilis és aperiodikus-e a következő átmenetmátrixú Markov lánc?

$$\pi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Írj fel olyan 4×4 -es átmenetmátrixot, amelyhez tartozó Markov-lánc irreducibilis és aperiodikus, de a főátlóban minden elem 0! Próbálj olyan mátrixot felírni, amiben a lehető legtöbb 0 elem van! Matematikai programcsomag segítségével ellenőrizd, hogy van a mátrixnak olyan hatványa, amelynek minden eleme pozitív. (Megj. A Markov lánc gráfját lerajzolva ellenőrizhető, hogy a Markov lánc irreducibilis és aperiodikus. Ezt tegyük is meg! Láttuk azt, hogy az, hogy a Markov lánc irreducibilis és aperiodikus, ekvivalens azzal, hogy valamelyik hatványának minden eleme pozitív. Ennek ellenőrzése több számolást igényel, de ha az állapottér nagy, ez a járhatóbb út, az ábráról már nem biztos, hogy le tudjuk olvasni a választ.)
4. Három testvér: Aladár, Botond és Csaba felváltva őrzik a (boros)pince kulcsát. A kulcs őrzője naponként dönti el véletlenszerűen, kinek adja át a kulcsot (avagy megtartja). Aladár $1/2$ - $1/2$ eséllyel átadja testvéreinek. Botond $1/3$ eséllyel megtartja, $2/3$ eséllyel átadja Csabának. Csaba $1/3$ eséllyel megtartja, ugyanilyen valószínű, hogy Aladárnak vagy Botondnak adja. Jó ideje űzik már ezt a játékot. Stabil-e ez a (diszkrét idejű) rendszer? (Az átmenetmátrixról hogyan olvasható le ez?) Mi a határeloszlás? Mennyi az esélye, hogy a kulcs Botondnál van?

A feladat második részét oldjuk meg kétféleképpen:

- (1) Számoljuk ki közvetlenül a stacionárius eloszlást!
 - (2) Matematikai programcsomag (Maple, Mathematica, stb) segítségével írjuk fel a π átmenetmátrix π^n hatványait, $n = 2, 3, 4, 10, 20, 50, 100$ értékekre. Mit tapasztalunk?
5. Szorgalmi. Igazoljuk, hogy minden véges állapotterű Markov láncnak van stacionárius eloszlása.

6. Szorgalmi. Adjunk meg olyan Markov láncot, amelynek több mint egy stationárius eloszlása van.
7. Szorgalmi. Igazoljuk, hogy egy véges állapotterű Markov lánc irreducibilis és aperiodikus akkor és csak akkor, ha létezik $N \in \mathbb{Z}^+$, hogy $\pi^N > 0$ (a mátrix minden eleme nagyobb mint 0.)
8. Szorgalmi. Adva van egy n állapotú ML átmenetvalség-mátrixa. El akarjuk dönteni, hogy igaz-e az az állítás, hogy a ML irreducibilis és aperiodikus. Bizonyítsd be, hogy létezik n -től függő korlát, hogy elég ennyiszor hatványozni a mátrixot ennek eldöntéséhez !
9. Szorgalmi. Adj meg olyan ML-ot, hogy a kezdőállapotba 1000 lépésben nem lehet visszajutni, de minden $n > 1000$ -re n lépésben vissza lehet jutni! (Ennek a ML-nak nyilván nagyon sok állapota lesz!) (Próbáljunk olyan Markov láncot adni, amelyet bármelyik állapotból indítva igaz a fenti állítás.)
10. Szorgalmi. Adj meg olyan végtelen állapotterű Markov-láncot, amelyik irreducibilis, de nem aperiodikus!

Idő hiányában a matematikai programcsomag használatát igénylő részfeladatok később is megoldhatóak, és még a következő hétfőn is beadhatóak (nyomtatott vagy kézzel írt formában.) A 7-10. szorgalmi feladatok is beadhatóak később is.

Sztochasztikus folyamatok 9. házi feladat

1. Nagyesze professzor minden percben 0.5 valséggel ír be egy jegyet az indexbe (ha van erre igény), 0.5 valséggel pedig a titkárnőjének udvarol. Minden percben 0.45 valséggel hozza egy diák az indexét, 0.55 valséggel senki sem jön. Írjuk fel a professzor szobája előtt tekergő sor hosszát leíró ML átmenetmátrixát! Mi a stac. eloszlás? Egyensúlyi állapotban mennyi a sor átlagos hossza? Mi a valószínűsége annak, hogy több mint 3 diák áll sorban? Mennyit kell egy diáknak átlagosan várnia, hogy beírják a jegyét? (Segítség: a megfelelő diszkrét idejű, végtelen állapotterű tömegkiszolgálási modellt, ún. bináris modellt kell használni. Lásd 10. gyakorlat 2. feladat.)
2. Egy hajó három kikötőben szokott horgonyozni: Marseille, Lisszabon és Nápoly. Átlagosan 3, 5 ill. 4 hónapig tartózkodik ezeken a helyeken (ehhez képest a kikötők közti utazás gyors, ezért azt elhanyagoljuk). Marseille-ből mindig Nápolyba utazik, Nápolyból egyforma valséggel a másik két városba, Lisszabonból kétszer olyan valószínű, hogy Marseille-be megy mint hogy Nápolyba. Írjuk fel a folyamat rátamátrixát! Stabil-e ez a folytonos idejű Markov-lánc és miért? Mi a stacionárius eloszlása? Már hosszú ideje közlekedik a hajó a három város között. Mi a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott napon Lisszabonban van, ha tudjuk, hogy a három város valamelyikében van?
3. Rudolf, a rénszarvas át akar kelni egy úton, ahol az autók érkezése percenkénti $\lambda = 4$ intenzitású Poisson folyamattal reprezentálható. Mivel Rudolf olyan öreg, mint maga a Mikulás, a szeme és a füle is rossz, így a forgalomtól függetlenül, véletlenszerűen rohan át az úton.
 - a) Tegyük fel, hogy 10 másodperc alatt ér át az úton. Mekkora valószínűséggel ütik el, tehát mekkora valószínűséggel érkezik autó ezen 10 másodperc alatt?
 - b) Tegyük fel, hogy Rudolf azért még elég ügyes ahhoz, hogy egyetlen autót kikerüljön, de ha a kritikus 10 másodpercben érkezik még egy autó, akkor már tényleg elütik. Mekkora valószínűséggel fogja megúszni a kalandot?
 - c) Válaszoljunk az a) és b) pont kérdéseire, ha csak 30 másodperc alatt tud átvánszorogni az úton.
 - d) Most ment el egy autó. Várhatóan hány másodperc múlva jön a következő?
 - e) Most ment el egy autó. Mi az esélye annak, hogy a következő autó több mint 30 másodperc múlva érkezik?
 - f) Most ment el egy autó. Mi a valószínűsége annak, hogy a következő 2 percben 5 autó érkezik? És annak, hogy a következő két percben 5 autó és az azt követő három percben 4 autó érkezik?
 - g) Most ment el egy autó. Mi a valószínűsége annak, hogy 2 percen belül 5 autó és 3 percen belül 7 autó érkezik?
 - h) Válaszoljunk a d)-g) kérdésekre, ha az utolsó autó 1 perce ment el, illetve ha nem láttuk, hogy mikor ment el az utolsó autó!