

Játékelmélet és hálózati alkalmazásai 2019 Minta vizsga sor

A vizsga anyagának típusfeladatai *a zh anyagán túl*:

1. Tekintsük a következő profitmátrix által adott hozzárendelési játékot (sorok-eladók (u), oszlopok - vevők (v)):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Adjon meg egy lehetséges stabil kimenetelt a játék esetén (párosítás + hasznovektor)!

MO:

$$\left(\begin{array}{c|ccc} & 0 & 2 & 2 \\ \hline 2 & 1 & \textcircled{4} & 3 \\ 3 & 3 & 3 & \textcircled{5} \\ 2 & \textcircled{2} & 4 & 2 \end{array} \right)$$

Eladó-vevő párosítás (1-2,2-3,3-1), stabil hasznovektor pl: $(u_1 = 2, u_2 = 3, u_3 = 2, v_1 = 0, v_2 = 2, v_3 = 2)$ - Ez egyrészt elérhető: Az 1. eladó és a 2. vevő között 4 egységet, a 2. eladó és a 3. vevő között 5 egységet, a 3. eladó és az 1. vevő közt 2 egységet osztottunk szét, ami megegyezik az értékükkel (az A mátrix megfelelő eleme) ezen párosítás esetén. Továbbá az összes *lehetséges* eladó-vevő párosítást végignézve (Az A mátrix minden elemét külön-külön tekintve) nincs blokkoló pár (melyre az érintett eladó-vevő pár kifizetése alacsonyabb lenne mint az A mátrix megfelelő eleme).

2. Legyen 4 megye lakossága rendre $p_1 = 176$, $p_2 = 360$, $p_3 = 450$, $p_4 = 220$ fő, és legyen az ország parlamentje 10 fő.

- Ossza fel a 10 képviselői helyet a megyék közt a Jefferson módszer szerint!
- Ossza fel a 10 képviselői helyet a megyék közt a D'Hondt módszer szerint!
- Ossza fel a 10 képviselői helyet a megyék közt a Lexmin módszer szerint!
- Hare-kvóta szerinti-e az (1,3,3,3) elosztás?
- Mit nevezünk Alabama-paradoxonnak ?

MO:

- Jefferson: Átlag $\frac{176+360+450+220}{10} = 120.60$ lakosra jut egy mandátum

Megye	Kvóta	Alsóegészrész	Megye	Kvóta	Alsóegészrész
1	$176/120.60 = 1.4594$	1	1	$176/120 = 1.4667$	1
1	$360/120.60 = 2.9851$	2	1	$360/120 = 3$	3
3	$450/120.60 = 3.7313$	3	3	$450/120 = 3.7500$	3
4	$220/120.60 = 1.8242$	1	4	$220/120 = 1.8333$	1
Összesen		7	Összesen		8

119-113 ue

Megye	Kvóta	Alsóegészrész
1	$176/112 = 1.5714$	1
1	$360/112 = 3.2143$	3
3	$450/112 = 4.0179$	4
4	$220/112 = 1.9643$	1
Összesen		9

111 ue.

Megye	Kvóta	Alsóegészrész
1	$176/110 = 1.6000$	1
1	$360/110 = 3.2727$	3
3	$450/110 = 4.0909$	4
4	$220/110 = 2$	2
Összesen		10

- D'Hondt:

a:	(1,1,1,1)	(1,1,2,1)	(1,2,2,1)	(1,2,3,1)	(1,3,3,1)	(1,3,4,1)	(1,3,4,2)
$\frac{p_1}{a_1+1}$	88	88	88	88	88	88	
$\frac{p_2}{a_1+1}$	180	180	120	120	90	90	
$\frac{p_3}{a_1+1}$	225	150	150	112.5	112.5	90	
$\frac{p_3}{a_1+1}$	110	110	110	110	110	110	

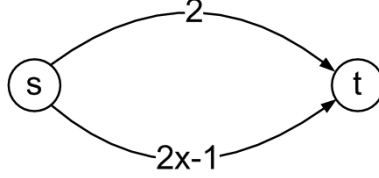
- Lexmin: $A=120.60$

Megye	Népesség	Kvóta	$\delta_i(l_i)$	$\delta_i(u_i)$	Előzetes
1. megye	176	1.4594	0.4594	-0.2703	2
2. megye	360	2.9851	0.4925	-0.005	3
3. megye	450	3.7313	0.2438	-0.0672	3
4. megye	220	1.8242	0.8242	-0.0879	2
Összesen	1206				21

$\rightsquigarrow$ Már első lépésben is pont 10 mandátumot osztunk szét. Ha kevesebbet/többet osztanánk akkor hozzá kéne adni/el kéne venni 1-et úgy hogy az átlagtól való eltérés a legkevésbé sérüljön, illetve ezt kellene folytatni amíg megfelelő számú mandátumot nem osztunk szét.

- Hare kvóta: $A = 1206/10 = 120.6 \rightsquigarrow$ A 4-ik megyére $220/120.6 = 1.82 \rightsquigarrow$ Nem.
- Amikor a parlament nagyságának növelésével valamelyik megye kevesebb körzetet kap (a megyék népességének változatlansága mellett).

3. Számolja ki az anarchia árát (PoA) a következő esetben, ha egy egység forgalmat kell s -ből t -be irányítani!



MO: Tegyük fel hogy $x < 1$ rész halad a felső élen. A teljes költség ekkor:

$$L = 2x + (1 - x)(2(1 - x) - 1) = 2x^2 - x + 1 \quad \rightsquigarrow \quad \frac{dL}{dx} = 4x - 1 \quad \rightsquigarrow \quad x = \frac{1}{4}$$

$x = \frac{1}{4}$ esetén minimális a teljes költség, méghozzá:

$$L_{opt} = 2\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \left(2\frac{3}{4} - 1 \right) = \frac{7}{8}$$

Másfelől Nash egyensúly akkor van, ha mindenki az alsó élet használja, ekkor az összköltség = 1. PoA = $1/(7/8) = \frac{8}{7}$.

4. Alkalmazzuk a Fink eljárást az $F_A(x) = x^3$, $F_B(x) = \sqrt{x}$, $F_C(x) = x$ esetre!

MO:

- (a) A és B - Cut and choose: A elvágja $\sqrt[3]{\frac{1}{2}} = 0.7937$ -nél (mert $F_A(\sqrt[3]{\frac{1}{2}}) - F_A(0) = F_A(1) - F_A(\sqrt[3]{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}$). B értékelése a bal oldali szakaszra: 0.8409, a jobb oldali szakaszra 0.1591, így a bal oldalt választja. ($[\sqrt[3]{\frac{1}{2}}, 1[$ - A-é, $[0, \sqrt[3]{\frac{1}{2}}[$ - B-é)
- (b) Mindketten három egyenlő részre osztják a náluk lévő tortaszeletet:
A osztópontjai: 1. osztópont:

$$F_A(OP_1^A) - F_A\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right) = (OP_1^A)^3 - \left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right)^3 = \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow OP_1^A = \sqrt[3]{\frac{2}{3}} = 0.8736$$

2. osztópont

$$1 - (OP_2^A)^3 = \frac{1}{6} \Leftrightarrow OP_2^A = \sqrt[3]{\frac{5}{6}} = 0.9410$$

B osztópontjai: 1. osztópont:

$$\sqrt{OP_1^B} - 0 = \frac{0.8409}{3} \Leftrightarrow OP_1^B = 0.0786$$

2. osztópont:

$$\sqrt{0.7937} - \sqrt{OP_2^B} = \frac{0.8409}{3} \Leftrightarrow OP_2^B = 0.3728$$

(c) C először A szeletét tekinti, ennek a 3 része:

- $[0.7937, 0.8736[$ - a hossza 0.0799
- $[0.8736, 0.9410[$ - a hossza 0.0674
- $[0.9410, 1[$ - a hossza 0.0590

ezek közül az elsőt választja. Ezután C B szeleteit tekinti:

- $[0, 0.0786[$ - a hossza 0.0786
- $[0.0786, 0.3728[$ - a hossza 0.2942
- $[0.3728, 0.7937[$ - a hossza 0.4209

ezek közül az utolsót választja.

A végső elosztás:

- A - $[0.8736, 1[$
- B - $[0, 0.3728[$
- C - $[0.3728, 0.8736[$ (itt pont egybefüggő szelete lett)

5. Tekintsük az alábbi 2 szereplős osztozkodási problémát:

$$v_A(x) = \begin{cases} 2, & \text{ha } x \in [0, \frac{1}{5}], \\ \frac{3}{4}, & \text{ha } x \in]\frac{1}{5}, 1] \end{cases} \quad v_B(x) = 2x \quad \text{ha } x \in [0, 1]$$

Ossza fel a $[0,1]$ intervallumot a surplus eljárás szerint!

MO:

Keressük meg az a és b osztópontokat! A játékosra:

$$\int_0^{\frac{1}{5}} 2 = \frac{2}{5},$$

tehát $\frac{1}{5}$ -től jobbra található (pl x -el).

$$\frac{3}{4}x + \frac{2}{5} = \frac{1}{2} \rightsquigarrow x = \frac{2}{15} \rightsquigarrow a = \frac{1}{5} + \frac{2}{15} = \frac{2}{3}$$

B játékosra: Kell

$$\int_0^b 2x = \frac{1}{2} \rightsquigarrow b^2 = \frac{1}{2} \rightsquigarrow b = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

A surplus eljárás elve alapján

$$\frac{\int_{2/3}^c \frac{3}{4} dx}{\int_{2/3}^{1/\sqrt{2}} \frac{3}{4} dx} = \frac{\int_c^{1/\sqrt{2}} x dx}{\int_{2/3}^{1/\sqrt{2}} x dx}$$

ezt 2. fokú egyenletre rendezve és megoldva (a pozitív gyököt tekintve) $c = 0.6879$ ami valóban a és b közé esik.

6. Mi az Alabama paradoxon?

MO:

Akkor beszélünk Alabama-paradoxonról, amikor a parlament nagyságának növelésével valamelyik megye kevesebb körzetet kap (a megyék népességének változatlansága mellett).

7. Mi a készlet-monotonitás illetve a népesség monotonitás?

MO:

Resource monotonicity: Ha megnő a torta és ugyanazt az eljárást alkalmazzuk, senki se járjon rosszabbul - ha csökken, senki se járjon jobban (tfh a jobb oldala nő). Például a CC nem RM.

Population monotonicity: Ha a játékosok száma nő, és a torta ugyanaz, senki se járjon jobban.