

Játékelmélet és hálózati alkalmazásai 2018 Zh MO

1. Tekintsük az alábbi mátrix formában adott játékot!

		2. játékos		
		B	K	J
1. játékos	F	(2,-2)	(-2,3)	(-1,3)
	K	(2,2)	(0,0)	(1,3)
	L	(3,1)	(-1,0)	(2,-1)

- Van-e a játékban (tiszt) Nash-egyensúly, és ha igen, mi az (mik azok)? (2p)

MO: Szigorúan dominált stratégiák kiküszöbölésével: P1: L dominálja F-et, P2: B dominálja K-t P1: L dominálja K-t, P2: B dominálja J-t $\rightsquigarrow$ (L,B)

2. Tekintsük az alábbi mátrix formában adott játékot!

		2. játékos	
		B	J
1. játékos	F	(4,-2)	(-1,3)
	L	(3,2)	(-2,0)

- Mi a játék kevert Nash-egyensúlya? (4p)

MO:

- Tfh: Az 1. játékos p valószínűséggel játsza F-et, $(1-p)$ valószínűséggel L-t, A 2. játékos q valószínűséggel B-t és $(1-q)$ valószínűséggel J-t

(F, J) NE, és $(p, q) = (1, 0)$ MNE, mert

az 1. játékos várható kifizetése:

$$pq(4) + p(1-q)(-1) + (1-p)q(3) + (1-p)(1-q)(-2) = 4pq - p + pq + 3q - 3pq - 2 + 2p + 2q - 2pq = p + 5q - 2$$

1-nek nem éri meg eltérni $p = 1$ -től.

a 2. játékos várható kifizetése:

$$pq(-2) + p(1-q)(3) + (1-p)q(2) + (1-p)(1-q)(0) = -2pq + 3p - 3pq + 2q - 2pq = 3p + 2q - 7pq$$

2-nek nem éri meg eltérni $q = 0$ -tól, ha $p = 1$.

3. Tekintsük az alábbi, 3-szereplős mátrix formában adott játékot!

3. játékos E		2. játékos		3. játékos H		2. játékos	
		B	J			B	J
1. játékos	F	(1,0,-2)	(3,1,0)	1. játékos	F	(2,-3,1)	(0,0,1)
	L	(2,1,0)	(1,0,-2)		L	(3,-1,2)	(-1,1,2)

- Van-e a játékban (tiszta) Nash-egyensúly, és ha igen, mi az (mik azok)? (2p)
- Van-e a játékban erős Nash-egyensúly, és ha igen, mi az (mik azok)? (4p)

MO:

- (F,J,H) NE, és SNE is egyben.

4. Tekintsük a következő evolúciós játékot

		2. bogár	
		kicsi	nagy
1. bogár	kicsi	(2, 2)	(1, 3/2)
	nagy	(3/2, 1)	(1, 1)

Evolúciósan stabil-e a 'kicsi' stratégia? (4p)

MO:

Tfh. Egy kis x -re a populáció $(1 - x)$ része a 'kicsi' stratégiát használja és x része a 'nagy'-ot (megérkezik a nagy bogarak egy alacsony egyedszámú 'invader' populációja).

- Egy kis bogár várható kifizetése: $1 - x$ valséggel egy másik kis bogárral találkozik ($\rightarrow 2$), x valséggel egy nagy bogárral ($\rightarrow 1$)

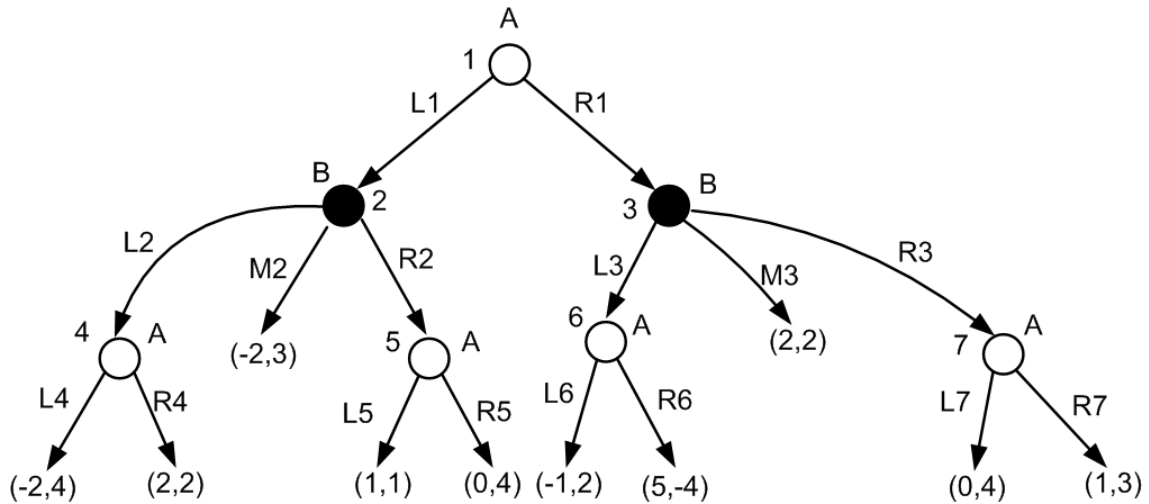
$$2(1 - x) + 1x = 2 - x$$

- Egy nagy bogár várható kifizetése: $1 - x$ valséggel egy kis bogárral találkozik ($\rightarrow 1.5$), x valséggel egy másik nagy bogárral ($\rightarrow 1$)

$$1.5(1 - x) + x = 1.5 - 0.5x$$

Kicsi x -ekre $2 - x > 1.5 - 0.5x \rightsquigarrow$ a 'kicsi' stratégia evolúciósan stabil.

5. Tekintsük a következő extenzív formában adot játékot:



Adja meg a részjáték-tökéletes egyensúlyhoz tartozó stratégiákat (minden játékos döntéseit minden lehetséges döntési pont esetén) (4p)!

MO: Hátratarató indukcióval: A: (R1,R4,L5,R6,R7), B: (M2,R3)

6. Legyen egy 3 játékosból álló kooperatív játékra

$$v(1) = 2 \quad v(2) = 1 \quad v(3) = 2 \quad v(\{1, 2\}) = 3 \quad v(\{1, 3\}) = 3 \quad v(\{2, 3\}) = 4 \quad v(\{1, 2, 3\}) = 6$$

- Mag belli-e az $x = [2, 2, 2]$ elosztás? (2p)
- Konvex-e a játék? Miért? (2p)
- Nukleólusza-e a játéknak az $x = [2, 2, 2]$ elosztás? Miért? (4p)

MO:

- Igen
- Nem ($S = \{2\}$, $T = \{3\}$): $v(S) + v(T) = 2 + 3 = 5 > v(S \cup T) + v(S \cap T) = 4 + 0 = 4$
- legyen $y = [2, 1.5, 2.5]$
Ekkor ($\Theta = [E(\{1\}) \ E(\{2\}) \ E(\{3\}) \ E(\{1, 2\}) \ E(\{1, 3\}) \ E(\{2, 3\})]$)

	Θ	Θ^*
x	[0, 1, 0, 1, 1, 0]	[0, 0, 0, 1, 1, 1]
y	[0, 0.5, 0.5, 0.5, 1.5, 0]	[0, 0, 0.5, 0.5, 0.5, 1.5]

Tehát y lexmin superior x -re nézve, ezért x nem nukleólusz.

7. Határozza meg a Shapley értéket az alábbi költségjátékban (3p):

$c(A)$	3
$c(B)$	4
$c(C)$	3
$c(\{AB\})$	10
$c(\{AC\})$	6
$c(\{BC\})$	9
$c(\{ABC\})$	13

MO:

Sorrend	m_A	m_B	m_C
ABC	3	7	3
ACB	3	7	3
BAC	6	4	3
BCA	4	4	5
CAB	3	7	3
CBA	4	6	3
	$\frac{23}{6} = 3.833$	$\frac{35}{6} = 5.833$	$\frac{20}{6} = 3.33$

8. Tekintsük a következő PFF játékot

Partition	Values
$\{1\}, \{2\}, \{3\}$	2,0,4
$\{1,2\}, \{3\}$	3,1
$\{1,3\}, \{2\}$	1,3
$\{1\}, \{2,3\}$	3,2
$\{1,2,3\}$	5

Írja fel a (pesszimista rekurzív mag alapú) minimal claim function értékét a 3 singleton játékosra (3p)!

MO:

Coalition	Value
$\{1\}$	2
$\{2\}$	0
$\{3\}$	1

9. Oldja meg az alábbi preferenciákkal adott házastárs-problémát, a Gale-Shapley féle késleltetett elfogadási algoritmus lánykérő verziójával (4p):

Anna (A):	$E \succ H \succ F \succ G$
Bea (B):	$G \succ E \succ H \succ F$
Cecil (C):	$F \succ G \succ E \succ H$
Dominika (D):	$F \succ G \succ E \succ H$
Elemér (E):	$B \succ C \succ A \succ D$
Feri (F):	$A \succ B \succ D \succ C$
Gábor (G):	$C \succ B \succ D \succ A$
Hugó (H):	$B \succ C \succ A \succ D$

MO:

	1.	2.	3.	4.	5.
E	B	B	B	B	B
F	A	A	A	B	D
G	C	C	C	C	C
H	B	C	A	A	A

10. Tekintsük a következő preferenciasorrendekkel adott házallokációs problémát (A háza 1, B háza 2, stb)!

A	5	3	4	2	1
B	3	1	2	4	5
C	1	2	3	5	4
D	5	3	2	4	1
E	3	4	2	1	5

Mi lesz az újraelosztási feladat magja (2p) ?

MO: (5,2,1,4,3) - Felső körcsere algoritmussal. Lépések:

- (a) A-E-C csere
- (b) B megkapja a sajátját
- (c) D megkapja a sajátját

11. Mit nevezünk népszerű elosztásnak (2p) ? **MO:** Egy a elosztást népszerűnek nevezünk, ha nem létezik olyan a' elosztás, amit több tulajdonos részesít előnyben, mint a -t.

12. Legyen 4 megye lakossága rendre $p_1 = 176$, $p_2 = 360$, $p_3 = 450$, $p_4 = 220$ fő, és legyen az ország parlamentje 10 fős.

- Ossza fel a 10 képviselői helyet a megyék közt a D'Hondt módszer szerint (2p)!
- Hare-kvóta szerinti-e az (1,3,3,3) elosztás (2p)?
- Mit nevezünk Alabama-paradoxonnak (2p)?

MO:

- D'Hondt:

a:	(1,1,1,1)	(1,1,2,1)	(1,2,2,1)	(1,2,3,1)	(1,3,3,1)	(1,3,4,1)	(1,3,4,2)
$\frac{p_1}{a_1+1}$	88	88	88	88	88	88	
$\frac{p_2}{a_1+1}$	180	180	120	120	90	90	
$\frac{p_3}{a_1+1}$	225	150	150	112.5	112.5	90	
$\frac{p_4}{a_1+1}$	110	110	110	110	110	110	

- Hare kvóta: $A = 1206/10 = 120.6 \rightsquigarrow A$ 4-ik megyére $220/120.6 = 1.82 \rightsquigarrow$ Nem.
- Amikor a parlament nagyságának növelésével valamelyik megye kevesebb körzetet kap (a megyék népességének változatlansága mellett).

13. Tekintsük a következő profitmátrixot (sorok-eladók (u), oszlopok - vevők (v)):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Adjon meg egy lehetséges stabil kimenetelt a játék eseten (párosítás + hasznovektor)(4p)!

MO: Eladó-vevő párosítás (1-2,2-3,3-1), stabil hasznovektor pl: $[1, 2, 1 \quad 1, 3, 3]$ vagy pl $[1, 3, 2, 0, 4, 2]$ vagy pl $[0, 1, 0, 2, 4, 4]$