

# Játékelmélet és hálózati alkalmazásai 2019 MintaZh MO

1. Tekintsük az alábbi mátrix formában adott játékot!

|            |   | 2. játékos |        |       |
|------------|---|------------|--------|-------|
|            |   | B          | K      | J     |
| 1. játékos | F | (-1,2)     | (1,3)  | (2,1) |
|            | K | (1,0)      | (-1,5) | (2,2) |
|            | L | (1,1)      | (3,-1) | (1,1) |

Van-e a játékban (tiszta) Nash-egyensúly, és ha igen, mi az (mik azok)? (2p)

**MO:**

(L,B) NE

2. Tekintsük az alábbi mátrix formában adott játékot!

|            |   | 2. játékos |       |
|------------|---|------------|-------|
|            |   | B          | J     |
| 1. játékos | F | (-1,2)     | (1,1) |
|            | L | (1,0)      | (0,2) |

Mi a játék kevert Nash-egyensúlya? (3p)

**MO:**

Tiszta NE nincs.

Tfh: Az 1. játékos  $p$  valséggel játsza F-et,  $(1-p)$  valséggel L-t, A 2. játékos  $q$  valséggel B-t és  $(1-q)$  valséggel J-t

|            |   | 2. játékos |             | q-mix        |
|------------|---|------------|-------------|--------------|
|            |   | B          | J           |              |
| 1. játékos | F | (-1,2)     | (1,1)       | $-1q+1(1-q)$ |
|            | L | (1,0)      | (0,2)       | $1q+0$       |
| p-mix      |   | $2p$       | $1p+2(1-p)$ |              |

p-mix: A 2. játékos kifizetésének várható értéke a tiszta stratégiák esetén ha az 1. játékos  $p$ -vel keveri a stratégiáit. q-mix hasonlóan..

$\rightsquigarrow$  válasszuk úgy  $p$ -t hogy a 2. játékosnak ne legyen értelme preferálnia egyik tiszta stratégiáját sem:

$$2p = p + 2(1 - p) \rightsquigarrow 3p = 2 \rightsquigarrow p = \frac{2}{3}$$

$\rightsquigarrow$  válasszuk úgy  $q$ -t hogy 1-nek ne legyen értelme preferálnia egyik tiszta stratégiáját sem:

$$-2q + 1 = q \rightsquigarrow q = \frac{1}{3}$$

Ellenőrzés: Ha  $p = \frac{2}{3}$   $q = \frac{1}{3}$  akkor az 1. játékos kifizetése:

$$-1pq + 1p(1 - q) + 1(1 - p)q + 0(1 - p)(1 - q) = \frac{1}{3}$$

A 2. játékos kifizetése:

$$2pq + 1p(1 - q) + 0(1 - p)q + 2(1 - p)(1 - q) = \frac{4}{3}$$

Ha pl  $q = \frac{1}{3}$ , és pl.  $p=0.2 \rightsquigarrow 1$  kifizetése ugyanúgy  $\frac{1}{3}$ ,  
 másrészt ha  $p = 2/3$  és  $q$ -t változtatok pl.  $q=0.4 \rightsquigarrow 2$ . játékos kifizetése ugyanúgy  $\frac{4}{3}$

3. Tekintsük az alábbi, 3-szereplős mátrix formában adott játékot!

| 3. játékos E |   | 2. játékos |         | 3. játékos H |   | 2. játékos |         |
|--------------|---|------------|---------|--------------|---|------------|---------|
|              |   | B          | J       |              |   | B          | J       |
| 1. játékos   | F | (-1,2,2)   | (1,3,1) | 1. játékos   | F | (1,-3,3)   | (1,3,0) |
|              | L | (0,1,2)    | (0,1,3) |              | L | (1,2,2)    | (0,1,2) |

Van-e a játékban erős Nash-egyensúly, és ha igen, mi az (mik azok)? (3p)

**MO:**

- (F,J,E), (L,B,H) NE
- (F,J,E) SNE, mert immunis a koalíciós deviációkra. (L,B,H) nem SNE, mert ha  $\{1, 2\}$  deviál, jobban járnak, egyikük (2) szigorúan.

4. Tekintsük a következő evolúciós játékot

|          |       | 2. bogár |       |
|----------|-------|----------|-------|
|          |       | kicsi    | nagy  |
| 1. bogár | kicsi | (3,3)    | (1,4) |
|          | nagy  | (4,1)    | (2,2) |

Evolúciósan stabil-e a 'kicsi' stratégia? (3p)

**MO:**

Tfh. Egy kis  $x$ -re a populáció  $(1 - x)$  része a 'kicsi' stratégiát használja és  $x$  része a 'nagy'-ot (megérkezik a nagy bogarak egy alacsony egyedszámú 'invader' populációja).

- Egy kis bogár várható kifizetése:  $1 - x$  valószínűséggel egy másik kis bogárral találkozik ( $\rightarrow 3$ ),  $x$  valószínűséggel egy nagy bogárral ( $\rightarrow 1$ )

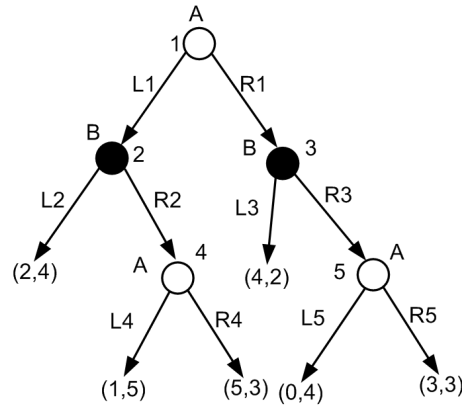
$$3(1 - x) + 1x = 3 - 2x$$

- Egy nagy bogár várható kifizetése:  $1 - x$  valószínűséggel egy kis bogárral találkozik ( $\rightarrow 4$ ),  $x$  valószínűséggel egy másik nagy bogárral ( $\rightarrow 2$ )

$$4(1 - x) + 2x = 4 - 2x$$

Kicsi (nem csak kicsi)  $x$ -ekre  $4 - 2x > 3 - 2x \rightsquigarrow$  a 'kicsi' stratégia nem evolúciósan stabil.

5. Tekintsük a következő extenzív formában adot játékot:



Adja meg a részjáték-tökéletes egyensúlyhoz tartozó stratégiákat (minden játékos döntéseit minden lehetséges döntési pont esetén) (3p)!

**MO:** Hátratarató indukcióval: A: (R1,R4,R5), B: (L2,R3)

6. Legyen egy 3 játékosból álló kooperatív játékra

$$v(1) = 1 \quad v(2) = 3 \quad v(3) = 0 \quad v(\{1, 2\}) = 3 \quad v(\{1, 3\}) = 3 \quad v(\{2, 3\}) = 1 \quad v(\{1, 2, 3\}) = 5$$

- Mag bel-e az  $x = [1, 2, 2]$  elosztás? (1p)
- Üres-e a mag a játék esetén? Ha nem, adjon meg mag-beli elosztást (2p)!
- Üres-e a CSC mag a játék esetén? Ha nem, adjon meg CSC mag-beli kimenetelt (2p)!
- Konvex-e a játék? Miért? (2p)
- Nukleólus-e a játéknak az  $y = [1, 4, 0]$  elosztás? Miért? (2p)

**MO:**

- Nem ( $\{2\}$  blokkolja)
- Üres mert teljesülnie kellene annak hogy  $x_1 + x_3 \geq 3, \quad x_2 \geq 3 \rightsquigarrow x_1 + x_2 + x_3 \geq 6$  de az összkifizetés max 5 lehet.
- Nem üres:  $P = \{\{1, 3\}, \{2\}\}, x = [1, 3, 2]$
- Nem ( $S = \{1\}, T = \{2\}$ ):  $v(S) + v(T) = 1 + 3 = 4 > v(S \cup T) + v(S \cap T) = 3 + 0 = 3$
- Nem, pl  $x$  lexmin superior hozzá képest (az excess tekintetében legrosszabbul járó koalíció jobban jár:  
 $\Theta(y) = [0, 1, 0, 2, -2, 3] \rightsquigarrow \Theta^*(y) = [-2, 0, 0, 1, 2, 3]$   
 $\Theta(x) = [0, -1, 2, 0, 0, 3] \rightsquigarrow \Theta^*(x) = [-1, 0, 0, 0, 2, 3].$

7. Határozza meg a Shapley értéket az alábbi költségjátékban (3p):

|              |    |
|--------------|----|
| $c(A)$       | 5  |
| $c(B)$       | 4  |
| $c(C)$       | 3  |
| $c(\{AB\})$  | 7  |
| $c(\{AC\})$  | 10 |
| $c(\{BC\})$  | 9  |
| $c(\{ABC\})$ | 12 |

MO:

| Sorrend | $m_A$          | $m_B$          | $m_C$          |
|---------|----------------|----------------|----------------|
| ABC     | 5              | 2              | 5              |
| ACB     | 5              | 2              | 5              |
| BAC     | 3              | 4              | 5              |
| BCA     | 3              | 4              | 5              |
| CAB     | 7              | 2              | 3              |
| CBA     | 3              | 6              | 3              |
|         | $4\frac{1}{3}$ | $3\frac{1}{3}$ | $4\frac{1}{3}$ |

8. Tekintsük a következő csődproblémát:

|     | $c_1$ | $c_2$ | $c_3$ |
|-----|-------|-------|-------|
| E/C | 150   | 200   | 350   |
| 500 | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ |

VSZ-konzisztens-e az  $x = [100, 150, 250]$  elosztás (2p)?

MO:

- 1,2: Az összes kapott vagyon 250.  
1 ad 100-at 2-nek, 2 ad 50-et 1-nek, a maradékot (100) elosztják egyenlően: 50-50  
 $\rightsquigarrow$  100-150  $\rightsquigarrow$  eddig ok.
- 1,3: Az összes kapott vagyon 350.  
1 ad 200-at 3-nak, a maradékot (150) elosztják egyenlően: 75-75  $\rightsquigarrow$  75-275  $\rightsquigarrow$  nem VSZ-konzisztens.

9. Tekintsük következő PFF játékot Legyen

| Partition             | Values |
|-----------------------|--------|
| $\{1\}, \{2\}, \{3\}$ | 0,3,0  |
| $\{1,2\}, \{3\}$      | 2,1    |
| $\{1,3\}, \{2\}$      | 2,2    |
| $\{1\}, \{2,3\}$      | 1,2    |
| $\{1,2,3\}$           | 4      |

Írja fel a (pesszimista rekurzív mag alapú) minimal claim function értékét a 3 singleton játékosra (2p)!

**MO:**

| Coalition | Value |
|-----------|-------|
| $\{1\}$   | 0     |
| $\{2\}$   | 2     |
| $\{3\}$   | 1     |

10. Oldja meg az alábbi preferenciákkal adott házastárs-problémát, a Gale-Shapley féle késleltetett elfogadási algoritmus lánykérő és fiúkérő verziójával (3p):

|               |                             |
|---------------|-----------------------------|
| Anna (A):     | $H \succ E \succ F \succ G$ |
| Bea (B):      | $F \succ G \succ H \succ E$ |
| Cecil (C):    | $G \succ F \succ E \succ H$ |
| Dominika (D): | $F \succ E \succ G \succ H$ |
| Elemér (E):   | $B \succ C \succ A \succ D$ |
| Feri (F):     | $A \succ D \succ B \succ C$ |
| Gábor (G):    | $C \succ B \succ D \succ A$ |
| Hugó (H):     | $B \succ C \succ A \succ D$ |

**MO:**

|   | 1.           | 2.           | 3.           | 4. |
|---|--------------|--------------|--------------|----|
| E | <del>B</del> | <del>C</del> | A            | A  |
| F | A            | A            | <del>A</del> | D  |
| G | C            | C            | C            | C  |
| H | B            | B            | A            | B  |

|   | 1.           | 2.           | 3.           | 4. |
|---|--------------|--------------|--------------|----|
| A | H            | H            | <del>H</del> | E  |
| B | <del>F</del> | <del>C</del> | H            | H  |
| C | G            | G            | G            | G  |
| D | F            | F            | F            | F  |

11. Mutasson példát olyan nemkooperatív játékra, ahol több (tiszta) NE létezik (2p)!

**MO:** pl. Nemek harca vagy közlegelők problémája.

12. Nemkooperatív játékokban mikor mondjuk hogy az  $s_i$  stratégia szigorúan dominálja a  $t_i$  stratégiát (2p)?

**MO:** Legyen  $G = \{S_1, \dots, S_n; f_1, \dots, f_n\}$ -ben  $s_i$  és  $t_i \in S_i$  az  $i$  játékos két stratégiája.  $s_i$  szigorúan dominálja  $t_i$ -t ha

$$f_i(s_i, \mathbf{s}_{-i}) > f_i(t_i, \mathbf{s}_{-i}) \quad \forall \mathbf{s}_{-i} \in S_{-i}$$

13. Nemkooperatív játékokban mit nevezünk legjobbválasz-leképezésnek (2p)?

**MO:** Az  $i$  játékos *legjobbválasz-leképezése*

$$B_i(\mathbf{s}) = \{t_i \in S_i \mid f_i(t_i, \mathbf{s}_{-i}) \geq f_i(r_i, \mathbf{s}_{-i}), \quad \forall r_i \in S_i\}$$

14. Mi a nukleólusz előnye illetve hátránya a Shapley-értékkel szemben (2p)?

**MO:** Mindig a magban van (A Shapley érték csak konvex játékoknál van biztosan a magban), viszont általánosságban nehezebben számolható.

15. Milyen térben értelmezzük a magot, és milyen geometriai tulajdonságai vannak, ha nem üres (2p)?

**MO:** A kifizetések terében - egy konvex polihedron, melyet az egyéni és csoportos racionalitási feltételekhez tartozó egyenlőtlenségeknek megfelelő hipersíkok határolnak.