

Játékelmélet és hálózati alkalmazásai 2018 MintaZh MO

1. Tekintsük az alábbi mátrix formában adott játékot!

		2. játékos	
		B	J
1. játékos	F	(-1,2)	(1,3)
	L	(1,2)	(0,1)

- Van-e a játékban (tiszta) Nash-egyensúly, és ha igen, mi az (mik azok)? (2p)
- Mi a játék kevert Nash-egyensúlya? (4p)

MO:

- Igen: (F,J), és (L,B).
- Tfh: Az 1. játékos p valséggel játsza F-et, $(1-p)$ valséggel L-t, A 2. játékos q valséggel B-t és $(1-q)$ valséggel J-t

		2. játékos		q-mix
		B	J	
1. játékos	F	(-1,2)	(1,3)	$-1q+1(1-q)$
	L	(1,2)	(0,1)	$1q+0$
p-mix		$2p+2(1-p)$	$3p+1(1-p)$	

p-mix: A 2. játékos kifizetésének várható értéke a tiszta stratégiák esetén ha az 1. játékos p -vel keveri a stratégiáit. q-mix hasonlóan..

$\rightsquigarrow$ válasszuk úgy p -t hogy a 2. játékosnak ne legyen értelme preferálnia egyik tiszta stratégiáját sem:

$$2p + 2(1 - p) = 3p + 1(1 - p) \rightsquigarrow 2 = 2p + 1 \rightsquigarrow p = \frac{1}{2}$$

$\rightsquigarrow$ válasszuk úgy q -t hogy 1-nek ne legyen értelme preferálnia egyik tiszta stratégiáját sem:

$$-2q + 1 = q \rightsquigarrow q = \frac{1}{3}$$

Ellenőrzés: Ha $p = \frac{1}{2}$ $q = \frac{1}{3}$ akkor az 1. játékos kifizetése:

$$-1pq + 1p(1 - q) + 1(1 - p)q + 0(1 - p)(1 - q) = \frac{1}{3}$$

A 2. játékos kifizetése:

$$2pq + 3p(1 - q) + 2(1 - p)q + 1(1 - p)(1 - q) = 2$$

Ha pl $p=0.2 \rightsquigarrow 1$ kifizetése ugyanúgy $\frac{1}{3}$, másrészt ha $p = 1/2$ és q -t változtatom pl. $q=0.4 \rightsquigarrow$ 2. játékos kifizetése ugyanúgy 2

2. Tekintsük az alábbi, 3-szereplős mátrix formában adott játékot!

3. játékos E		2. játékos		3. játékos H		2. játékos	
		B	J			B	J
1. játékos	F	(-1,2,2)	(1,3,1)	1. játékos	F	(1,-3,3)	(1,3,0)
	L	(0,1,2)	(0,1,3)		L	(1,2,2)	(0,1,2)

- Van-e a játékban (tiszta) Nash-egyensúly, és ha igen, mi az (mik azok)? (2p)
- Van-e a játékban erős Nash-egyensúly, és ha igen, mi az (mik azok)? (4p)

MO:

- (F,J,E), (L,B,H) NE
- (F,J,E) SNE, mert immunis a koalíciós deviációkra. (L,B,H) nem SNE, mert ha $\{1, 2\}$ deviál, jobban járnak, egyikük szigorúan.

3. Tekintsük a következő evolúciós játékot

		2. bogár	
		kicsi	nagy
1. bogár	kicsi	(3,3)	(1,4)
	nagy	(4,1)	(2,2)

Evolúciósan stabil-e a 'kicsi' stratégia? (4p)

MO:

Tfh. Egy kis x -re a populáció $(1 - x)$ része a 'kicsi' stratégiát használja és x része a 'nagy'-ot (megérkezik a nagy bogarak egy alacsony egyedszámú 'invader' populációja).

- Egy kis bogár várható kifizetése: $1 - x$ valséggel egy másik kis bogárral találkozik ($\rightarrow 3$), x valséggel egy nagy bogárral ($\rightarrow 1$)

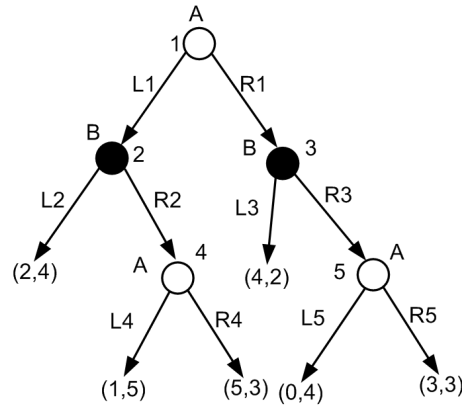
$$3(1 - x) + 1x = 3 - 2x$$

- Egy nagy bogár várható kifizetése: $1 - x$ valséggel egy kis bogárral találkozik ($\rightarrow 4$), x valséggel egy másik nagy bogárral ($\rightarrow 2$)

$$4(1 - x) + 2x = 4 - 2x$$

Kicsi (nem csak kicsi) x -ekre $4 - 2x > 3 - 2x \rightsquigarrow$ a 'kicsi' stratégia nem evolúciósan stabil.

4. Tekintsük a következő extenzív formában adot játékot:



Adja meg a részjáték-tökéletes egyensúlyhoz tartozó stratégiákat (minden játékos döntéseit minden lehetséges döntési pont esetén) (4p)!

MO: Hátratarató indukcióval: A: (R1,R4,R5), B: (L2,R3)

5. Legyen egy 3 játékosból álló kooperatív játékra

$$v(1) = 1 \quad v(2) = 3 \quad v(3) = 0 \quad v(\{1, 2\}) = 3 \quad v(\{1, 3\}) = 3 \quad v(\{2, 3\}) = 1 \quad v(\{1, 2, 3\}) = 5$$

- Mag beli-e az $x = [1, 2, 2]$ elosztás? (2p)
- Üres-e a mag a játék esetén? Ha nem adjon meg mag-beli elosztást (4p)!
- Konvex-e a játék? Miért? (2p)
- Nukleólusza-e a játéknak az $y = [1, 4, 0]$ elosztás? Miért? (2p)

MO:

- Nem ($\{2\}$ blokkolja)
- Üres mert teljesülnie kellene annak hogy $x_1 + x_3 \geq 3, \quad x_2 \geq 3 \rightsquigarrow x_1 + x_2 + x_3 \geq 6$ de az összkifizetés max 5 lehet.
- Nem ($S = \{1\}, \quad T = \{2\}$): $v(S) + v(T) = 1 + 3 = 4 > v(S \cup T) + v(S \cap T) = 3 + 0 = 3$
- Nem, pl x lexmin superior hozzá képest (az excess tekintetében legrosszabbul járó koalíció jobban jár).

6. Mi a nukleólusz előnye illetve hátránya a Shapley-értékkel szemben (2p)?

MO: Mindig a magban van (A Shapley érték csak konvex játékoknál biztosan), viszont általánosságban nehezebben számolható.

7. Határozza meg a Shapley értéket az alábbi költségjátékban (4p):

$c(A)$	5
$c(B)$	4
$c(C)$	3
$c(\{AB\})$	7
$c(\{AC\})$	10
$c(\{BC\})$	9
$c(\{ABC\})$	12

MO:

Sorrend	m_A	m_B	m_C
ABC	5	2	5
ACB	5	2	5
BAC	3	4	5
BCA	3	4	5
CAB	7	2	3
CBA	3	6	3
	$4\frac{1}{3}$	$3\frac{1}{3}$	$4\frac{1}{3}$

8. Tekintsük következő PFF játékot Legyen

Partition	Values
$\{1\}, \{2\}, \{3\}$	0,3,0
$\{1,2\}, \{3\}$	2,1
$\{1,3\}, \{2\}$	2,2
$\{1\}, \{2,3\}$	1,2
$\{1,2,3\}$	4

Írja fel a (pesszimista rekurzív mag alapú) minimal claim function értékét a 3 singleton játékosra (2p)!

MO:

Coalition	Value
$\{1\}$	0
$\{2\}$	2
$\{3\}$	1

9. Oldja meg az alábbi preferenciákkal adott házastárs-problémát, a Gale-Shapley féle késleltetett elfogadási algoritmus lánykérő és fiúkérő verziójával (4p):

Anna (A):	H $\succ$ E $\succ$ F $\succ$ G
Bea (B):	F $\succ$ G $\succ$ H $\succ$ E
Cecil (C):	G $\succ$ F $\succ$ E $\succ$ H
Dominika (D):	F $\succ$ E $\succ$ G $\succ$ H
Elemér (E):	B $\succ$ C $\succ$ A $\succ$ D
Feri (F):	A $\succ$ D $\succ$ B $\succ$ C
Gábor (G):	C $\succ$ B $\succ$ D $\succ$ A
Hugó (H):	B $\succ$ C $\succ$ A $\succ$ D

MO:

	1.	2.	3.	4.
E	B	C	A	A
F	A	A	A	D
G	C	C	C	C
H	B	B	A	B

	1.	2.	3.	4.
A	H	H	H	E
B	F	G	H	H
C	G	G	G	G
D	F	F	F	F

10. Tekintsük a következő preferenciasorrendekkel adott házallokációs problémát (A háza 1, B háza 2, stb)!

A	3	4	5	2	1
B	3	1	2	5	4
C	2	4	5	2	3
D	3	4	2	1	5
E	2	3	1	4	5

Mi lesz az újraelosztási feladat magja (2p) ?

MO: (5,3,2,4,1) - Felső körcsere algoritmussal. Lépések:

- (a) B és C cserél
- (b) D megkapja a sajátját
- (c) A és E cserél

11. Legyen 4 megye lakossága rendre $p_1 = 290$, $p_2 = 450$, $p_3 = 630$, $p_4 = 370$ fő, és legyen az ország parlamentje 15 fős. Ossza fel a 15 képviselői helyet a megyék közt a Hamilton módszer szerint (2p)!

MO: $A = (290 + 450 + 630 + 370) / 15 = 116$ Hamilton:

Arány	Előzetes k.	Eredmény
$\frac{p_1}{A} = 2.5$	2	3
$\frac{p_2}{A} = 3.8793$	3	4
$\frac{p_3}{A} = 5.4310$	5	5
$\frac{p_4}{A} = 3.1897$	3	3

12. Tekintsük a következő profitmátrixot (sorok-eladók (u), oszlopok - vevők (v)):

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

- (a) Az (1-1,2-3,3-2) párosítás esetén stabil-e e az $[u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3] = [2, 2, 3, 4, 1, 0]$ kifizetés-vektor? (2p)
- (b) Stabillá tehető-e ez a párosítás egy másik kifizetésvektorral? Ha igen hogyan? (2p)

MO: Nem, az (1-3) pár blokkolja mert $3 > 2 + 0$.

Ha $[u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3] = [2, 1, 3, 4, 1, 1]$, akkor már stabil.