

Játékelmélet és hálózati alkalmazásai 10. ea

Csercsik Dávid

ITK PPKE

1 Forgalomirányítás és POA

- Wardrop model
- Braess-paradoxon

2 Osztzkodáselmélet (cake-cutting)

Wardrop model

Wardrop model

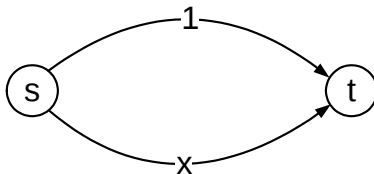
- Adott egy $G(V, E)$ irányított gráf két kitüntetett csúcossal: s, t .
- Egységnyi forgalmat szeretnénk s -ből t -be irányítani.
- Minden $e \in E$ élhez adott egy $l_e(x)$ latenciafüggvény, amely azt mutatja, hogy mennyi időbe telik az e élen x nagyságú forgalmat áteresztetni.
- A forgalom végtelenül kicsi részekre bontható, amit így egy folyamként ábrázolhatunk.
- A végtelenül piciny részeknek, az ún. egyéneknek az az érdeke, hogy a lehető leggyorsabban jussanak el t -be (önző módon optimalizálnak).

Smith, Mt J. "The existence, uniqueness and stability of traffic equilibria." Transportation Research Part B: Methodological 13.4 (1979): 295-304.

Forgalomirányítás

Pigou-gráf

Az ún. Pigou-gráfban az egyének két út között választhatnak. A felső úton az átjutás költsége konstans 1, míg az alsón ez a forgalommal arányos. Könnyű kiszámolni, hogy egységnyi összforgalom esetén az összáttutási idő akkor optimális, ha az egyének fele az alsó, a fele pedig a felső utat választja. Ekkor azonban a felső úton közlekedők később érnek célba $\Rightarrow$ a hálózat egyetlen Nash-egyensúlyi pontja, ha mindenki az alsó utat választja.



Az anarchia ára (PoA)

Koutsoupias, Papdimitriou [2009]

Az anarchia ára a legrosszabb Nash-egyensúly költsége osztva a társadalmilag optimális kimenet költségével.

Pl. a Pigou-gráf esetében: Az optimum: $0.5 \cdot 1 + 0.5 \cdot 0.5 = 0.75$
 $PoA = \frac{4}{3}$. Tehát a koordináció hiánya (illetve az önzőség) miatt 33%-kal kevésbé hatékony forgalom valósul meg. Lineáris latenciafüggvényeket feltételezve megmutatható, hogy ennél nincs rosszabb eset.

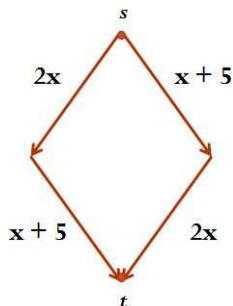
Tim Roughgarden Tim, Éva Tardos. "How bad is selfish routing?." Journal of the ACM (JACM) 49.2 (2002): 236-259.

Koutsoupias, Elias, and Christos Papadimitriou. "Worst-case equilibria." Computer science review 3.2 (2009): 65-69.

Braess-paradoxon

Braess-paradoxon

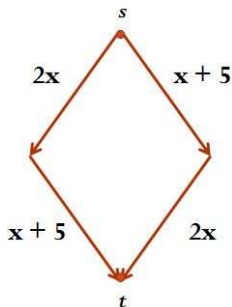
Adott a következő gráf és szeretnénk 4 egységnyi forgalmat s -ből t -be átírányítani.



Braess-paradoxon

Braess-paradoxon

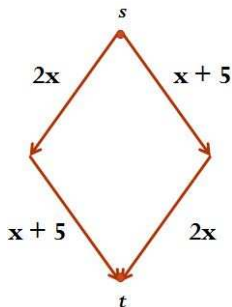
Az összájtutási idő akkor a legkisebb, ha az egyének fele jobbra megy, a fele balra (ez Nash-egyensúlyi pont is).



Braess-paradoxon

Braess-paradoxon

Az összájtutási idő akkor a legkisebb, ha az egyének fele jobbra megy, a fele balra (ez Nash-egyensúlyi pont is).

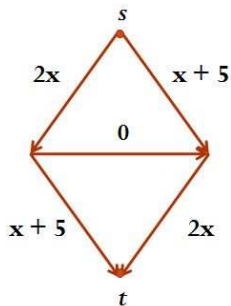


- Egyéni költség:
 $2 \cdot (2) + (2) + 5 = 11$
- Társadalmi költség
 $4 \cdot 11 = 44$

Braess-paradoxon

Braess-paradoxon

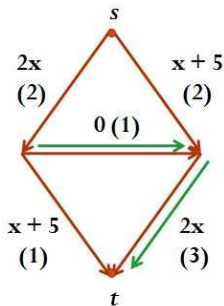
Összekötjük a két közbülső pontot egy 0 költségű úttal.



Braess-paradoxon

Braess-paradoxon

Rövid számolás mutatja, hogy néhány autósnek megéri áttérni a bal oldali útról a jobb oldalra.



Egyéni költségek:

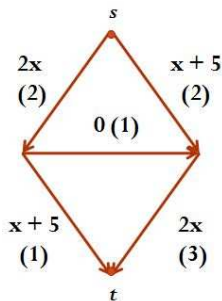
$$11 = 2 \cdot (2) + (2) + 5 >$$

$$2 \cdot (2) + 0 \cdot (1) + 2 \cdot (3) = 10$$

Braess-paradoxon

Braess-paradoxon

Így viszont a jobb oldalon közlekedőknek megnőtt a költsége...

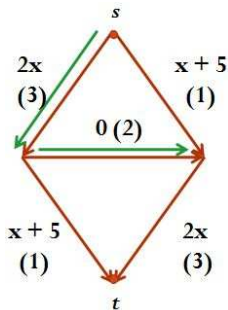


$$11 < (2) + 5 + 2 \cdot (3) = 13$$

Braess-paradoxon

Braess-paradoxon

Ezért néhányan ott is új útvonalat választanak.



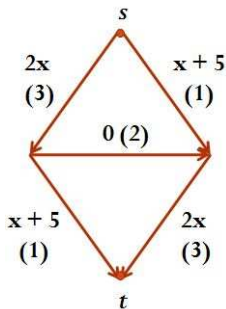
$$13 = (2) + 5 + 2 \cdot (3) >$$

$$2 \cdot (3) + 0 \cdot (2) + 2 \cdot (3) = 12$$

Braess-paradoxon

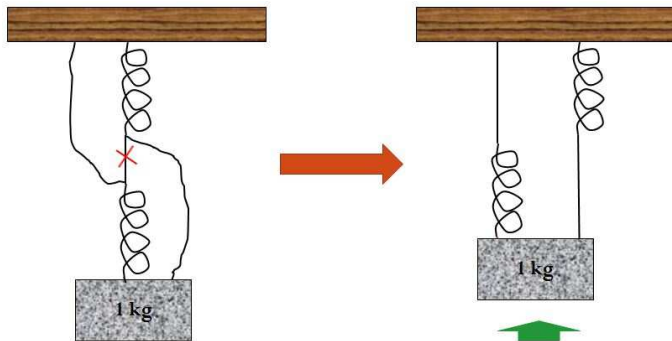
Braess-paradoxon

Most újra egy Nash-egyensúlyi ponthoz érkeztünk, de mindenki később ér célba!



- Egyéni költség:
 $2 \cdot (3) + (1) + 5 = 12$
- Társadalmi költség
 $4 \cdot 12 = 48$

Braess-paradoxon



ábra: A Braess-paradoxon mechanikus ábrázolása

Braess-paradoxon

Példák való életből

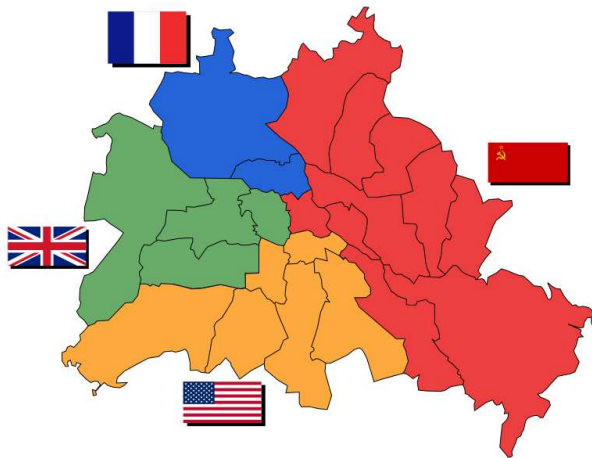
- Föld napja (1990) New York a 42 utca lezárása
<http://www.nytimes.com/1990/12/25/health/what-if-they-closed-42d-street-and-nobody-noticed.html>
- Az úthálózat bővítése Stuttgartban (1969)
- Szöul autópálya lezárása (Cheonggyecheon projekt)

Paradoxon-mentesség

Adott $G(V, E)$ gráf és l_e latenciafüggvények mellett NP-nehéz annak eldöntése, hogy G -nek létezik-e olyan H részgráfja, amelyben a forgalom irányításának összköltsége kevesebb.

Osztozkodáselmélet (cake-cutting)

Potsdami/Yaltai konferencia



Berlin

Osztzkodási (cake cutting) probléma definíciója

Az $(N, \Omega, \mathcal{A}, (\mu_i)_{i \in N})$ négyest osztzkodási problémának nevezzük, ha teljesülnek rá a következő feltételek:

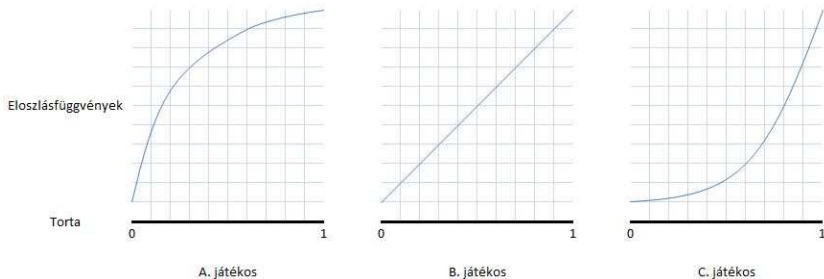
- N az osztzkodásban résztvevő szereplők egy nem üres véges halmaza;
- Ω az egész elosztandó tárgyat (területet) jelöli (továbbiakban torta), amelyet a $[0, 1]$ intervallummal fogunk reprezentálni.
- $\mathcal{A}$ a lehetséges tortaszeletek halmaza, amelyek kielégítik a következőket:
 - i) $\Omega \in \mathcal{A}$, azaz az egész torta egy lehetséges szelet,
 - ii) ha $A, B \in \mathcal{A}$, akkor $A \cup B \in \mathcal{A}$,
 - iii) ha $A, B \in \mathcal{A}$, akkor $A^c \in \mathcal{A}$.

Osztozkodási (cake cutting) probléma definíciója (folyt.)

- μ_i az $i \in N$ személy értékelőfüggvénye, amely a következőket tudja:
 - i) $\mu_i : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ (nem-negatív)
 - ii) ha $A, B \in \mathcal{A}$, $A \cap B = \emptyset$, akkor
$$\mu_i(A \cup B) = \mu_i(A) + \mu_i(B) \text{ (additív)}$$
 - iii) $\mu_i(\Omega) = 1$ (normált)
 - iv) minden $A \in \mathcal{A}$ szeletre és $\lambda \in [0, 1]$ számra létezik A -nak egy B részszelete, amelyre $\mu_i(B) = \lambda \mu_i(A)$.

Példa

A μ_i értékelőfüggvény segítségével definiálhatunk egy F_i eloszlásfüggvényt. Legyen $F_i(x) = \mu_i([0, x])$, ekkor az $[x, y]$ szelet értéke $\mu_i([x, y]) = F_i(y) - F_i(x)$. Az alábbi ábrán $F_A(x) = \sqrt{x}$, $F_B(x) = x$ és $F_C(x) = x^2$ látható.



Elvárt tulajdonságok

Egy osztozkodási eljárás a szereplőket meghatározott szabályok szerint felszólíthatja vágások végrehajtására és tortaszeletek kiértékelésére. Egy ilyen eljárást számos kritérium segítségével jellemezhetjük.

- Igazságos(arányos): Minden résztvevő a saját értékelése szerint legalább a torta $\frac{1}{n}$ -ed értékű részéhez jusson.
- Igazmondásra-ösztönző(taktikázásbiztos): Senkinek ne érje meg hazudni a preferenciáit illetően.
- Irígységmentes: A végső felosztásban mindenki a saját részét tekintse a legértékesebbnek.
- Véges: Az eljárás véges sok lépésen belül véget ér.

Elvárt tulajdonságok (folyt.)

- Pareto hatékonyság: A javasolt elosztáshoz képest nincs olyan másik elosztás, amellyel mindenki legalább olyan jól jár és legalább egy valaki szigorúan jobban.
- Egyenlő: A saját értékítélete szerint mindenki ugyanakkora hányadát kapta a tortának.
- Egybefüggőség: A kapott szeletek egybefüggőek.
- Önműködő: Az eljárás lefolytatásához nincs szükség egy független bíróra.

Megjegyzés: Ha egy eljárás irígységmentes, akkor arányos is.

Cut and Choose

2 játékos esetén

Eljárás: Az egyik játékos megfelezi a tortát, a másik választ egy szeletet.

Előnyök: arányos, irígységmentes, taktikázásbiztos, véges, egybefüggő és önműködő.

Hátrányok: Nem Pareto hatékony és nem feltétlenül jut mindenki egyenlő részhez.

Steinhaus eljárás (1943)

3 játékosra

Eljárás:

- 1-es játékos 3 (szerinte) egyenlő értékű részre vágja a tortát
- 2-es vagy passzol (ha legalább 2 darab $\geq 1/3$) vagy megjelöl 2-t 'rossz'-ként - Ha passzolt, a játékosok a következő sorrendben választanak: 3,2,1 - és vége.
- Ha 2-es nem passzolt, 3-as szintén a passz és a jelölés között választhat. Ha passzolt, a játékosok a következő sorrendben választanak: 2,3,1 - és vége.
- Ha sem 2 sem 3 nem passzolt, 1-nek ki kell választania egy darabot, melyet 2 és 3 is rossznak jelölt. A maradékot 'összegyűrjük', ezután 2 és 3 cut and choose-al dönt

S.J. Brams and A.D. Taylor. An Envy-free Cake Division Protocol. American Mathematical Monthly, 102(1):9-18, 1995.

Steinhaus eljárás II

Tulajdonságok:

- Igazságos (arányos) - ha kockázatkerülő játékosokat feltételezünk, akik a legrosszab esetben kapott kifizetésüket szeretnék maximalizálni.
- Nem irigységmentes: Ha 2 és 3 cut and choose-al dönt, 1 irigy lehet egyikükre.
- Maximum 3 vágást igényel.

Fink eljárás (1964)

Eljárás:

- Két szereplő esetén CC .
- Három szereplő esetén, az első két személy lefolytat maguk közt egy CC -t. Majd mindketten három egyenlő részre osztják a náluk lévő tortaszeletet. A harmadik személy választ a két kupacból egy-egy szeletet.
- n szereplő esetén rekurzívan definiáljuk. Tegyük fel, hogy $n - 1$ személy már arányosan elosztotta a tortát. Kérjük meg most az $n - 1$ személyt, hogy az általuk birtokolt tortaszeletet osszák föl n egyenlő részre. Az n . személy minden résztvevőtől választ egy tortaszeletet.

An application in telecommunication: Cellular networks

- We assume m service providers
- Service provider k has n_k users in the analyzed area
- We do have n base stations (BSs), each of which initially belongs completely to one of the service providers.
- BS $j \in \{1, \dots, n\}$ has a maximum spectrum capacity, denoted by $\overline{w}_j$
- $\overline{w}_j^k$ denotes the amount of spectrum that may be used by SP k from the capacity of BS j ($k \in \{1, \dots, m\}$).

If no resource sharing takes place $\overline{w}_j^k$ equals to $\overline{w}_j$ or 0, depending on whether BS j belongs to SP k or not. However, in any case

$$\sum_k \overline{w}_j^k = \overline{w}_j \quad \forall j \quad (1)$$

Resource sharing and cake cutting I

The amount of spectrum allocated by SP k in BS j to the i -th user of SP k ($i \in \{1, \dots, n_k\}$) - w_{ij}^k . Since every SP may only distribute the amount of spectrum it owns in every BS

$$\sum_i w_{ij}^k \leq \overline{w}_j^k \quad \forall j, k \quad (2)$$

User assignment: c_{ij}^k is a binary variable indicating that the i -th user of SP k is assigned to BS j . As we initially exclude those user-BS pairs which do have a channel gain below a predefined threshold, not every c_{ij}^k is included in the problem formulation. Furthermore, we must formulate this constraint as an inequality, since it is possible that no user of SP k is assigned to a BS j for which $\overline{w}_j^k > 0$. Each user may be assigned to only one BS.

$$\sum_j c_{ij}^k = 1 \quad \forall i, k \quad (3)$$

Resource sharing and cake cutting II

If the i -th user of SP k is not assigned to BS j , BS j can not provide i any spectrum:

$$0 \leq w_{i,j}^k \leq \overline{w}_j c_{i,j}^k \quad \forall i, j, k \quad (4)$$

b_i^k : the bit-rate of user i of SP k . We assume that every user has a desired bit-rate $\overline{b}_i^k$, which limits its data consumption. Similarly, we define a minimal spectrum for each user denoted by $\underline{b}_i^k$.

$$\underline{b}_i^k \leq b_i^k \leq \overline{b}_i^k \quad \forall i, k \quad (5)$$

We assume that the available bit-rate is also limited by the total spectrum assigned to user i , and this constraint is linear in the allocated spectrum

$$b_i^k \leq \sum_j g_{ij}^k w_{i,j}^k \quad \forall i, k \quad (6)$$

Resource sharing and cake cutting III

The objective is to maximize the total bit-rate or equivalently

$$\min f = - \sum_{i,k} b_i^k \quad (7)$$

The variables of the problem are

$$x = \begin{pmatrix} c \\ \overline{w} \\ w \\ b \end{pmatrix} \quad \overline{w} = \begin{pmatrix} \overline{w}_1^1 \\ \overline{w}_1^2 \\ \vdots \\ \overline{w}_1^k \\ \overline{w}_2^1 \\ \vdots \\ \overline{w}_n^k \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} b_1^1 \\ b_1^2 \\ \vdots \\ b_m^1 \\ b_1^2 \\ b_2^2 \\ \vdots \\ b_{n_m}^m \end{pmatrix} \quad (8)$$

Resource sharing and cake cutting IV

- Reference for resource sharing optimum: In this case we add no additional constraints. This will imply that the $\bar{w}_j$ values are also variables of the problem, and are determined by the solver to reach a globally optimal total bit-rate.
- Reference case with no resource sharing: In this case we add additional constraints which do fix the variables $\bar{w}_j^k$ to $\bar{w}_j$ or 0, depending on whether BS j belongs to SP k or not.
- Analysis of a resource sharing scenario: In this case we use a prior method to determine the $\bar{w}_j^k$ values, and add the resulting values in the form of constraints to the problem.

Resource sharing and cake cutting V: Evaluation of BSs by the SPs

1

$$E_j^k = \sum_j g_{ij}^k \quad (i, j) \notin EXP \quad (9)$$

where EXP denotes the set of prior excluded BS-user pairs. T

2

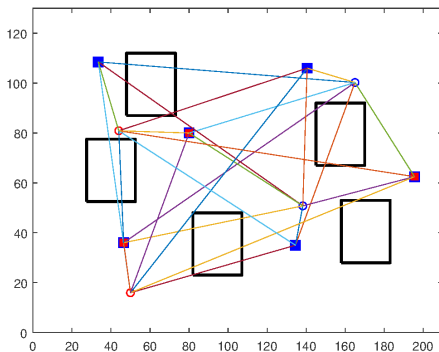
$$E_j^k = \frac{|n_j^k|}{1 + |\tilde{n}_j^k|} \quad (10)$$

where n_j^k denotes the number of users by SP k , who may be assigned to BS j , and $|\tilde{n}_j^k|$ denotes the number from among them who do have a better alternative. User i of SP k has a better alternative in the context of BS j , if there exists a BS j' to which i may be also assigned, and $g_{i,j}^k < g_{i,j'}^k$.

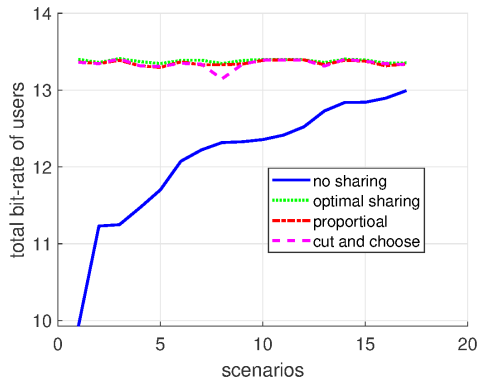
Resource sharing and cake cutting VI: Simulation

$$g_{ij}^k = \frac{1}{1 - \exp((100 - d_{\text{eff}})/15)} \quad (11)$$

where d_{eff} is the effective distance from the corresponding BS. The effective distance may be calculated as $d_{\text{eff}} = d + c_f d_f$



Resource sharing and cake cutting VII: Results I



The efficiency of the cake cutting-based method increases with the number of users and with the complexity of the environment.