

Játékelmélet és hálózati alkalmazásai

Csercsik Dávid

A mag a hozzárendelési játékokban

ITK PPKE

2018. április 23.

Tartalom

- Kétoldalú párosítási piacok
- A stabil kimenetel fogalma és jellemzése
- Stabil kimenetek létezése Egerváry (1931) tétele alapján
- A hozzárendelési LP feladat és duálja
- Stabil kimenetek létezése Shapley és Shubik (1972) tétele alapján
- A stabil kimenetek halmazának tulajdonságai (speciális csúcspontok)
- Többtermékes aukciók és a hozzárendelési piacok stabil kimenetelei
- Árverési példák
- Blöffölés

Hozzárendelési piacok

Kétoldalú párosítási piac:

- a szereplők két csoportba sorolhatók (eladók - vevők)
- a „fő” termékek oszthatatlanok, de megkülönböztethetők (házak) (ha egyformák, Böhm-Bawerk (1891) lóvásár)
- mindegyik eladó kínálata és mindegyik vevő kereslete egységnyi
- van „pénz” (tetszőlegesen osztható és a szereplők között átvihető)
- az egyéni hasznosságok átválthatók (pénzben kifejezhetők)

Kimenetel:

- a házak egy allokációja (egy eladótól egy vevőnek, vagy önmagának)
- pénzbeli kifizetések a szereplők között (megkötés nélkül)

A modell

Hozzárendelési piac:

- eladók halmaza I , vevők halmaza J
- az $i \in I$ eladó r_i -re értékeli a házát, ez alatt nem adja el
(általánosabban: r_{ij} -re értékeli a $j \in J$ -vel való párosítást, pl. munkás - cég)
- a $j \in J$ vevő t_{ij} -re értékeli az $i \in I$ házát, e fölött nem veszi meg



Profit mátrix: $A = [a_{ij} \geq 0]_{i \in I, j \in J}$ ahol $a_{ij} = (t_{ij} - r_i)^+$

A modell

Hozzárendelési piac:

- eladók halmaza I , vevők halmaza J
- az $i \in I$ eladó r_i -re értékeli a házát, ez alatt nem adja el
(általánosabban: r_{ij} -re értékeli a $j \in J$ -vel való párosítást, pl. munkás - cég)
- a $j \in J$ vevő t_{ij} -re értékeli az $i \in I$ házát, e fölött nem veszi meg



Profit mátrix: $A = [a_{ij} \geq 0]_{i \in I, j \in J}$ ahol $a_{ij} = (t_{ij} - r_i)^+$

Példa: 2 eladó - 3 vevő

		$t_{.1}$	$t_{.2}$	$t_{.3}$		
piac	$r_1 = 10$	17	14	12	$\Rightarrow$	profitok $A =$
	$r_2 = 11$	15	14	10		

7	4	2
4	3	0

Megjegyzés

Végző soron a játékot az A mátrix definiálja. További motivációként felmerülhet labdarúgócsapatok barátságos mérkőzéseinek párosítása (különböző mérkőzésekért a TV-csatornák különböző közvetítési jogdíjat fizetnek, melyeken a csapatoknak meg kell osztoznuk)

A piac kimenetelei

Egy **lehetséges kimenetel**nek két összetevője van:

- egy **hozzárendelés** / **párosítás** $X = [x_{ij}]_{i \in I, j \in J}$

$$\sum_{j \in J} x_{ij} \leq 1 \quad \text{minden } i \in I\text{-re: Mindenki max 1-szer adhatja el a házat}$$

$$\sum_{i \in I} x_{ij} \leq 1 \quad \text{minden } j \in J\text{-re: Mindenki max 1 házat vehet}$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \text{minden } i \in I, j \in J\text{-re}$$

(sorösszeg és oszlopösszeg = 1)

- egy **elérhető haszonvektor** $(\dots u_i \dots; \dots v_j \dots)_{i \in I, j \in J}$

$$\sum_{i \in I} u_i + \sum_{j \in J} v_j \leq \sum_{i \in I, j \in J} a_{ij} x_{ij}$$

(haszon = a kimenetel pénzbeli értéke - a kezdet pénzbeli értéke)

Példa: lehetséges kimenetel

Példa: 2 eladó - 3 vevő

profitok $A = \begin{bmatrix} 7 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

kimenetel $(X, (u; v))$

hozzárendelés $X = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

		$v_1 = 2$	$v_2 = 2$	$v_3 = 0$
haszonvektor	$u_1 = 2$	.	4	.
	$u_2 = 2$	4	.	.

ez a kimenetel lehetséges, mert a haszonvektor elérhető: $2 + 2 + 2 + 2 + 0 \leq 4 + 4$

Stabil kimenetel

Egy $(X, (u; v))$ lehetséges kimenetel **stabil**, ha

- $u_i \geq 0$, $v_j \geq 0$ minden $i \in I$ -re, $j \in J$ -re
- $u_i + v_j \geq a_{ij}$ minden $i \in I, j \in J$ -re

(egyénileg elfogadható)

(páronként elfogadható)

Stabil kimenetel

Egy $(X, (u; v))$ lehetséges kimenetel **stabil**, ha

- $u_i \geq 0$, $v_j \geq 0$ minden $i \in I$ -re, $j \in J$ -re
- $u_i + v_j \geq a_{ij}$ minden $i \in I, j \in J$ -re

(egyénileg elfogadható)

(páronként elfogadható)

Példa: 2 eladó - 3 vevő

profitok $A = \begin{bmatrix} 7 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

az előbbi lehetséges kimenetel		$v_1 = 2$	$v_2 = 2$	$v_3 = 0$
	$u_1 = 2$	7	4	2
	$u_2 = 2$	4	3	0

nem stabil, mert ugyan egyénileg elfogadható, de $u_1 + v_1 = 2 + 2 = 4 < (a_{11} = 7)$
(az első vevő és az első eladó blokkoló párt alkot)

Stabil kimenetek jellemzése

Állítás

Egy $(X, (u; v))$ lehetséges kimenetel stabil $\iff$

- $u_i = 0$ minden nem párosított i eladóra $(\sum_{j \in J} x_{ij} < 1)$
- $v_j = 0$ minden nem párosított j vevőre $(\sum_{i \in I} x_{ij} < 1)$
- $u_i + v_j = a_{ij}$ minden egymáshoz rendelt i, j párra $(x_{ij} = 1 > 0)$
- $u_i \geq 0, v_j \geq 0$ minden párosított i -re, j -re
- $u_i + v_j \geq a_{ij}$ minden nem párosított i, j -re $(x_{ij} = 0)$

$(\Leftarrow)$ nyilván

$(\Rightarrow)$

	.	.	$v_3 \geq 0$
.	.	$u_1 + v_2 \geq a_{12}$	.
.	$u_2 + v_1 \geq a_{21}$	.	.

$$a_{12} + a_{21} + 0 \leq (u_1 + v_2) + (u_2 + v_1) + v_3 \leq a_{12} + a_{21}$$

tehát a hozzárendelésbeli mindegyik $\geq$ -nek $=$ -ként kell teljesülnie

Példa: stabil kimenetel

Példa: 2 eladó - 3 vevő

Az előbbi hozzárendelés nem bővíthető stabil kimenetellé

	$v_1 \geq 0$	$v_2 \geq 0$	$v_3 = 0$
$u_1 \geq 0$	$u_1 + v_1 \geq 7$	$u_1 + v_2 = 4$	$u_1 + v_3 \geq 2$
$u_2 \geq 0$	$u_2 + v_1 = 4$	$u_2 + v_2 \geq 3$	$u_2 + v_3 \geq 0$

mert az $\{(1, 1), (2, 2)\}$ hozzárendelésbeli párok stabilitásához kell

$$(u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) \geq 7 + 3 > 4 + 4 = (u_1 + v_2) + (u_2 + v_1)$$

Ugyanakkor, van stabil kimenetel, például

	$v_1 = 5$	$v_2 = 3$	$v_3 = 0$
$u_1 = 2$	$2 + 5 = 7$	$2 + 3 \geq 4$	$2 + 0 \geq 2$
$u_2 = 0$	$0 + 5 \geq 4$	$0 + 3 = 3$	$0 + 0 \geq 0$

Stabil kimenetek jellemzése / 2

Állítás

Ha $(X, (u; v))$ egy stabil kimenetel, akkor

- X maximalizálja a $\sum_{ij} a_{ij}x_{ij}$ összértéket a párosítások halmazán
- $(u; v)$ minimalizálja a $\sum_i u_i + \sum_j v_j$ összhasznót az elfogadható haszonvektorok halmazán

Biz.: Pl. ha $\{(1, 1), (2, 2)\}$ az $(u; v)$ -vel egy stabil kimenetel, akkor

	$v_1 \geq 0$	$v_2 \geq 0$	$v_3 = 0$
$u_1 \geq 0$	$u_1 + v_1 = a_{11}$	$u_1 + v_2 \geq a_{12}$	$u_1 + v_3 \geq a_{13}$
$u_2 \geq 0$	$u_2 + v_1 \geq a_{21}$	$u_2 + v_2 = a_{22}$	$u_2 + v_3 \geq a_{23}$

így pl. a $\{(1, 2), (2, 1)\}$ párosításra, ill. az $(u'; v')$ elfogadható vektorra

$$a_{12} + a_{21} + 0 \leq (u_1 + v_2) + (u_2 + v_1) + v_3 = (u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) + v_3 = a_{11} + a_{22}$$

$$u_1 + v_1 + u_2 + v_2 + v_3 = a_{11} + a_{22} + 0 \leq u'_1 + v'_1 + u'_2 + v'_2 + v'_3$$

tehát $\{(1, 1), (2, 2)\}$ maximális értékű, ill. $(u; v)$ minimális összhasznú

Vannak-e stabil kimenetek?

[?] Van-e tetszőleges hozzárendelési piacnak stabil kimenetele?

Van-e mindig olyan X maximális értékű párosítás ÉS olyan $(u; v)$ minimális összhasznú elfogadható haszonvektor, amikre $\sum_{ij} a_{ij}x_{ij} \geq \sum_i u_i + \sum_j v_j$, vagyis az $(X, (u; v))$ egy lehetséges kimenetel? (mert ekkor nyilván stabil is)

[??] Igaz-e az előbbi állítás megfordítása?

Ha X egy tetsz. maximális értékű párosítás ÉS $(u; v)$ egy tetsz. minimális összhasznú elfogadható haszonvektor, akkor $(X, (u; v))$ lehetséges kimenetel-e?

Vannak-e stabil kimenetek?

[?] Van-e tetszőleges hozzárendelési piacnak stabil kimenetele?

Van-e mindig olyan X maximális értékű párosítás ÉS olyan $(u; v)$ minimális összhasznú elfogadható haszonvektor, amikre $\sum_{ij} a_{ij}x_{ij} \geq \sum_i u_i + \sum_j v_j$, vagyis az $(X, (u; v))$ egy lehetséges kimenetel? (mert ekkor nyilván stabil is)

[??] Igaz-e az előbbi állítás megfordítása?

Ha X egy tetsz. maximális értékű párosítás ÉS $(u; v)$ egy tetsz. minimális összhasznú elfogadható haszonvektor, akkor $(X, (u; v))$ lehetséges kimenetel-e?

Nyilván bármely $A = [a_{ij} \geq 0]$ mátrixra,
bármely X párosításra és $(u; v)$ elfogadható haszonvektorra

$$\sum_{ij} a_{ij}x_{ij} \leq \sum_i u_i + \sum_j v_j,$$

tehát

$$\max_{X \text{ párosítás}} \sum_{ij} a_{ij}x_{ij} \leq \min_{(u;v) \text{ elfogadható}} \sum_i u_i + \sum_j v_j.$$

Stabil kimenetek létezése / 1

Tétel (Egerváry, 1931)

Bármely nemnegatív $A = [a_{ij}]$ mátrixra,

$$\max_{x \text{ párosítás}} \sum_{ij} a_{ij} x_{ij} = \min_{(u;v) \text{ elfogadható}} \sum_i u_i + \sum_j v_j$$

Biz. Egy hatékonyan végrehajtható primál - duál algoritmus segítségével, ami megad egy optimális megoldást mindkét feladatra. Szubrutinként használja Kőnig (1931) alternáló utas algoritmusát (maximális elemszámú párosítás megtalálására). (Nem azonos Kuhn (1955) magyar módszerével.) (Ld. Frank A. (2002) Sigma)

Stabil kimenetek létezése / 1

Tétel (Egerváry, 1931)

Bármely nemnegatív $A = [a_{ij}]$ mátrixra,

$$\max_x \sum_{ij} a_{ij} x_{ij} = \min_{(u,v)} \sum_i u_i + \sum_j v_j$$

párosítás *elfogadható*

Biz. Egy hatékonyan végrehajtható primál - duál algoritmus segítségével, ami megad egy optimális megoldást mindkét feladatra. Szubrutinként használja König (1931) alternáló utas algoritmusát (maximális elemszámú párosítás megtalálására). (Nem azonos Kuhn (1955) magyar módszerével.) (Ld. Frank A. (2002) Szigma)

Következmény

Bármely hozzárendelési piacnak van stabil kimenetele, sőt egy stabil kimenetel a piaci adatokból hatékonyan kiszámítható.

[?] A stabil kimenetek halmazának mik a tulajdonságai? Leírható-e?

A hozzárendelési LP

Adott $A = [a_{ij}]_{i \in I, j \in J}$ nemnegatív mátrix.

Egy maximális értékű párosítás meghatározható a **hozzárendelési LP**-vel:

$$\begin{aligned} \sum_{(i,j) \in I \times J} a_{ij} x_{ij} &\rightarrow \max \\ \sum_{j \in J} x_{ij} &\leq 1 && \text{minden } i \in I\text{-re} \\ \sum_{i \in I} x_{ij} &\leq 1 && \text{minden } j \in J\text{-re} \\ x_{ij} &\geq 0 && \text{minden } i \in I, j \in J\text{-re} \end{aligned}$$

A **duál LP**:

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} u_i + \sum_{j \in J} v_j &\rightarrow \min \\ u_i + v_j &\geq a_{ij} && \text{minden } i \in I, j \in J\text{-re} \\ u_i, v_j &\geq 0 && \text{minden } i \in I, j \in J\text{-re} \end{aligned}$$

Stabilitási eredmények / 2

Tétel (Shapley és Shubik, 1972)

Bármely hozzárendelési piacon a stabil kimenetekkel elérhető haszonvektorok halmaza

- *= a hozzárendelési LP **duál optimális** megoldásainak D halmaza (nem üres)*
- *= egy X optimális hozzárendeléssel komplementens (u, v) -k halmaza:*
- *tartalmaz egy **eladó-optimális** $(\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n)$ haszonvektort*
ahol $\bar{u}_i = \max\{u_i : (u, v) \in D\}$ és $\bar{v}_j = \min\{v_j : (u, v) \in D\}$
*és egy **vevő-optimális** $(\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_n)$ haszonvektort*
ahol $\underline{u}_i = \min\{u_i : (u, v) \in D\}$ és $\bar{v}_j = \max\{v_j : (u, v) \in D\}$
- *= a piachoz tartozó hozzárendelési **játék magja** (azaz a bármely koalíció által elfogadható elérhető haszonvektorok halmaza)*
- *= a **versenyegyensúlyi árak**nál elérhető haszonvektorok halmaza (az egyéni hasznukat maximalizáló szereplők választásai éppen a társadalmilag optimális hozzárendelést eredményezik)*

Példa: 2 eladó - 3 vevő

		t_1	t_2	t_3									
piac	$r_1 = 10$	17	14	12	$\Rightarrow$	páronkénti profitok	<table><tr><td>7</td><td>4</td><td>2</td></tr><tr><td>4</td><td>3</td><td>0</td></tr></table>	7	4	2	4	3	0
	7	4	2										
4	3	0											
$r_2 = 11$	15	14	10										

stabil kimenetek

	$v_1 \geq 0$	$v_2 \geq 0$	$v_3 = 0$	
$0 \leq u_1$	$u_1 + v_1 = 7$	$u_1 + v_2 \geq 4$	$u_1 + v_3 \geq 2$	
$0 \leq u_2$	$u_2 + v_1 \geq 4$	$u_2 + v_2 = 3$	$u_2 + v_3 \geq 0$	

Példa: 2 eladó - 3 vevő

		t_1	t_2	t_3									
piac	$r_1 = 10$	17	14	12	$\Rightarrow$	páronkénti profitok	<table><tr><td>7</td><td>4</td><td>2</td></tr><tr><td>4</td><td>3</td><td>0</td></tr></table>	7	4	2	4	3	0
	7	4	2										
4	3	0											
$r_2 = 11$	15	14	10										

stabil kimenetek		$v_1 \geq 0$	$v_2 \geq 0$	$v_3 = 0$	
	$0 \leq u_1$	$u_1 + v_1 = 7$	$u_1 + v_2 \geq 4$	$u_1 + v_3 \geq 2$	
	$0 \leq u_2$	$u_2 + v_1 \geq 4$	$u_2 + v_2 = 3$	$u_2 + v_3 \geq 0$	

- vevők haszna

$$v_1 = 7 - u_1 \quad v_2 = 3 - u_2 \quad v_3 = 0$$

- eladók haszna

	$u_1 \leq 7$	$u_2 \leq 3$	.
$0 \leq u_1$	.	$u_1 - u_2 \geq 1$	$u_1 \geq 2$
$0 \leq u_2$	$u_2 - u_1 \geq -3$	.	$u_2 \geq 0$

Példa: 2 eladó - 3 vevő

		t_1	t_2	t_3									
piac	$r_1 = 10$	17	14	12	$\Rightarrow$	páronkénti profitok	<table><tr><td>7</td><td>4</td><td>2</td></tr><tr><td>4</td><td>3</td><td>0</td></tr></table>	7	4	2	4	3	0
	7	4	2										
4	3	0											
$r_2 = 11$	15	14	10										

stabil kimenetek		$v_1 \geq 0$	$v_2 \geq 0$	$v_3 = 0$	
	$0 \leq u_1$	$u_1 + v_1 = 7$	$u_1 + v_2 \geq 4$	$u_1 + v_3 \geq 2$	
	$0 \leq u_2$	$u_2 + v_1 \geq 4$	$u_2 + v_2 = 3$	$u_2 + v_3 \geq 0$	

• vevők haszna $v_1 = 7 - u_1$ $v_2 = 3 - u_2$ $v_3 = 0$

• eladók haszna		$u_1 \leq 7$	$u_2 \leq 3$	.
	$0 \leq u_1$	.	$u_1 - u_2 \geq 1$	$u_1 \geq 2$
	$0 \leq u_2$	$u_2 - u_1 \geq -3$	.	$u_2 \geq 0$

kimenetel $\rightarrow$ árak $p_1 = r_1 + u_1 = t_{11} - v_1$, $p_2 = r_2 + u_2 = t_{22} - v_2$

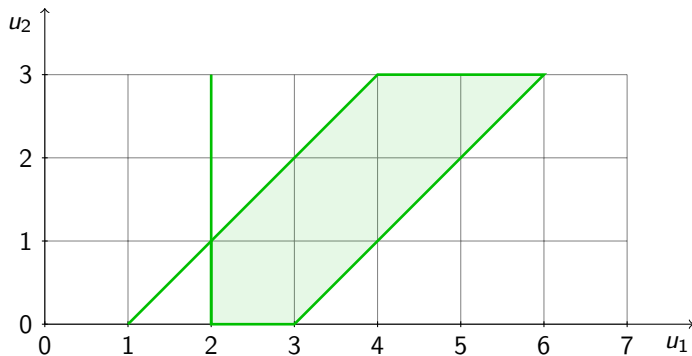
ezek versenyegyensúlyi árak

mert pl. 1. vevő: $t_{11} - p_1 = v_1 \geq a_{21} - u_2 \geq t_{21} - r_2 - u_2 = t_{21} - p_2$

és pl. 3. vevő: $0 = v_3 \geq a_{13} - u_1 \geq t_{13} - r_1 - u_1 = t_{13} - p_1$

Duál optimális megoldások

<table><tr><td>7</td><td>4</td><td>2</td></tr><tr><td>4</td><td>3</td><td>0</td></tr></table>	7	4	2	4	3	0	$\Rightarrow$	<table><tr><td></td><td>$u_1 \leq 7$</td><td>$u_2 \leq 3$</td><td>.</td></tr><tr><td>$u_1 \geq 0$</td><td>.</td><td>$u_1 - u_2 \geq 1$</td><td>$u_1 \geq 2$</td></tr><tr><td>$u_2 \geq 0$</td><td>$u_2 - u_1 \geq -3$</td><td>.</td><td>$u_2 \geq 0$</td></tr></table>		$u_1 \leq 7$	$u_2 \leq 3$	.	$u_1 \geq 0$	.	$u_1 - u_2 \geq 1$	$u_1 \geq 2$	$u_2 \geq 0$	$u_2 - u_1 \geq -3$	.	$u_2 \geq 0$
7	4	2																		
4	3	0																		
	$u_1 \leq 7$	$u_2 \leq 3$	.																	
$u_1 \geq 0$	.	$u_1 - u_2 \geq 1$	$u_1 \geq 2$																	
$u_2 \geq 0$	$u_2 - u_1 \geq -3$	.	$u_2 \geq 0$																	



Az eladóknak: a legrosszabb (2, 0), a legjobb (6, 3)

A minimális versenyegyensúlyi árak: $p_1 = 10 + 2$, $p_2 = 11 + 0$

Példa: 3 eladó - 3 vevő

		t_1	t_2	t_3											
piac	$r_1 = 20$	27	21	24	$\Rightarrow$	profitok									
	$r_2 = 21$	29	27	28											
	$r_3 = 22$	27	20	25											
						<table><tr><td>7</td><td>1</td><td>4</td></tr><tr><td>8</td><td>6</td><td>7</td></tr><tr><td>5</td><td>0</td><td>3</td></tr></table>	7	1	4	8	6	7	5	0	3
7	1	4													
8	6	7													
5	0	3													

stabil kimenetel

	$v_1 \geq 0$	$v_2 \geq 0$	$v_3 \geq 0$
$0 \leq u_1$	$u_1 + v_1 = 7$	$u_1 + v_2 \geq 1$	$u_1 + v_3 \geq 4$
$0 \leq u_2$	$u_2 + v_1 \geq 8$	$u_2 + v_2 = 6$	$u_2 + v_3 \geq 7$
$0 \leq u_3$	$u_3 + v_1 \geq 5$	$u_3 + v_2 \geq 0$	$u_3 + v_3 = 3$

vevők haszna
eladók haszna

$$v_1 = 7 - u_1 \quad v_2 = 6 - u_2 \quad v_3 = 3 - u_3$$

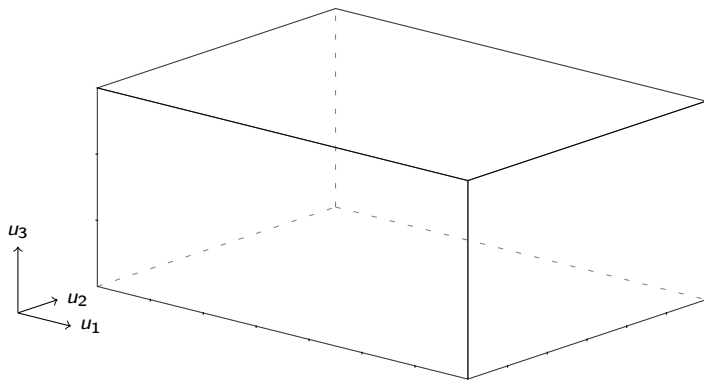
	$u_1 \leq 7$	$u_2 \leq 6$	$u_3 \leq 3$
$0 \leq u_1$	.	$u_1 - u_2 \geq -5$	$u_1 - u_3 \geq +1$
$0 \leq u_2$	$u_2 - u_1 \geq +1$	.	$u_2 - u_3 \geq +4$
$0 \leq u_3$	$u_3 - u_1 \geq -2$	$u_3 - u_2 \geq -6$	.

Duál optimális megoldások

7	1	4
8	6	7
5	0	3

$\Rightarrow$

$0 \leq u_1 \leq 7$	$0 \leq u_2 \leq 6$	$0 \leq u_3 \leq 3$
.	$u_1 - u_2 \geq -5$	$u_1 - u_3 \geq +1$
$u_2 - u_1 \geq +1$	.	$u_2 - u_3 \geq +4$
$u_3 - u_1 \geq -2$	$u_3 - u_2 \geq -6$	.

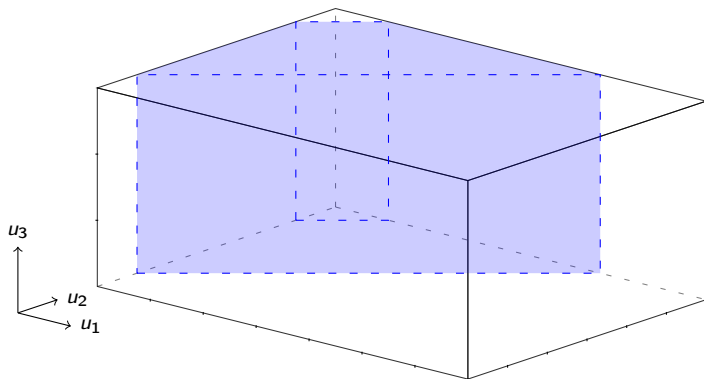


Duál optimális megoldások

7	1	4
8	6	7
5	0	3

$\Rightarrow$

$0 \leq u_1 \leq 7$	$0 \leq u_2 \leq 6$	$0 \leq u_3 \leq 3$
.	$u_1 - u_2 \geq -5$	$u_1 - u_3 \geq +1$
$u_2 - u_1 \geq +1$	.	$u_2 - u_3 \geq +4$
$u_3 - u_1 \geq -2$	$u_3 - u_2 \geq -6$	.

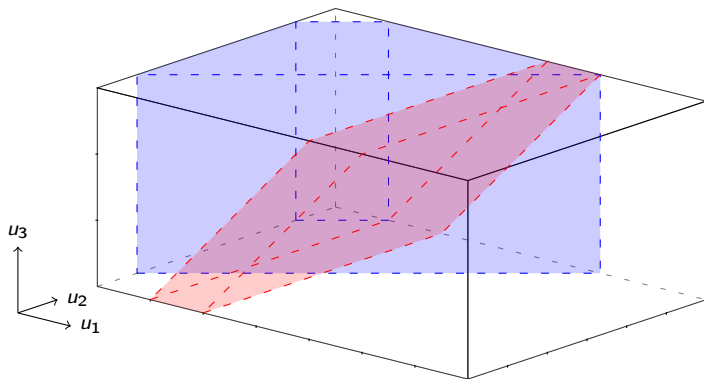


Duál optimális megoldások

7	1	4
8	6	7
5	0	3

$\Rightarrow$

$0 \leq u_1 \leq 7$	$0 \leq u_2 \leq 6$	$0 \leq u_3 \leq 3$
.	$u_1 - u_2 \geq -5$	$u_1 - u_3 \geq +1$
$u_2 - u_1 \geq +1$	.	$u_2 - u_3 \geq +4$
$u_3 - u_1 \geq -2$	$u_3 - u_2 \geq -6$	.

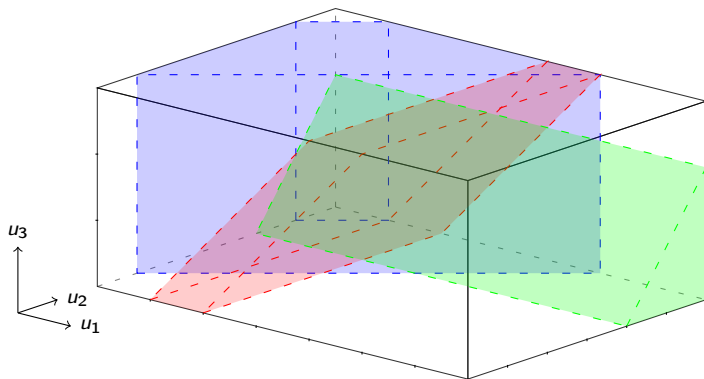


Duál optimális megoldások

7	1	4
8	6	7
5	0	3

$\Rightarrow$

$0 \leq u_1 \leq 7$	$0 \leq u_2 \leq 6$	$0 \leq u_3 \leq 3$
.	$u_1 - u_2 \geq -5$	$u_1 - u_3 \geq +1$
$u_2 - u_1 \geq +1$	.	$u_2 - u_3 \geq +4$
$u_3 - u_1 \geq -2$	$u_3 - u_2 \geq -6$	.

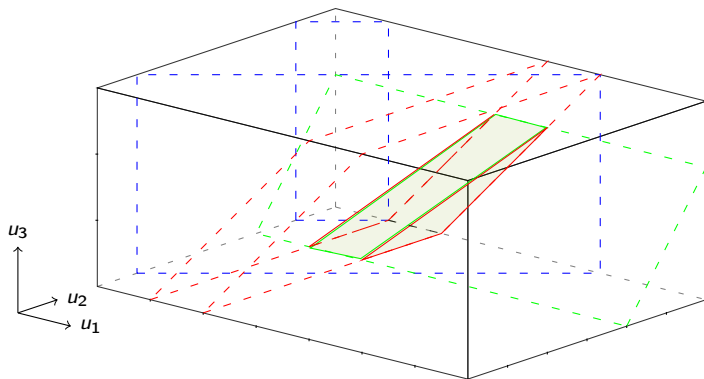


Duál optimális megoldások

7	1	4
8	6	7
5	0	3

$\Rightarrow$

$0 \leq u_1 \leq 7$	$0 \leq u_2 \leq 6$	$0 \leq u_3 \leq 3$
.	$u_1 - u_2 \geq -5$	$u_1 - u_3 \geq +1$
$u_2 - u_1 \geq +1$	.	$u_2 - u_3 \geq +4$
$u_3 - u_1 \geq -2$	$u_3 - u_2 \geq -6$	.

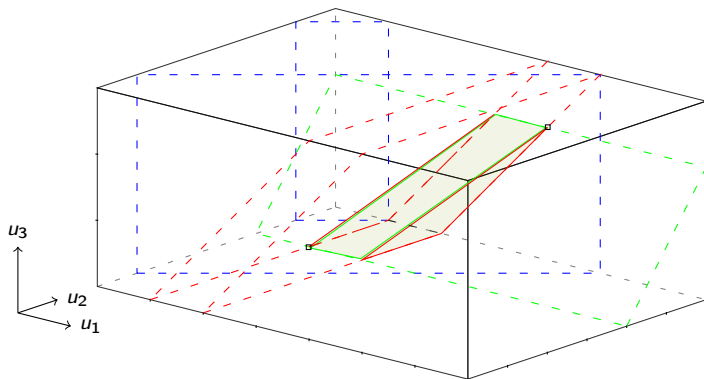


Duál optimális megoldások

7	1	4
8	6	7
5	0	3

$\Rightarrow$

$0 \leq u_1 \leq 7$	$0 \leq u_2 \leq 6$	$0 \leq u_3 \leq 3$
.	$u_1 - u_2 \geq -5$	$u_1 - u_3 \geq +1$
$u_2 - u_1 \geq +1$	.	$u_2 - u_3 \geq +4$
$u_3 - u_1 \geq -2$	$u_3 - u_2 \geq -6$	.



Az eladóknak: a legrosszabb $(1, 4, 0)$, a legjobb $(4, 6, 2)$.

Piaci mechanizmusok

Tétel (Demange, 1982; Leonard, 1983)

*A minimális versenyegyensúlyi árakat meghatározó mechanizmusokban az igazmondás **minden vevőnek** domináns stratégia.*

Tétel (Demange, Gale, Sotomayor, 1986)

A minimális versenyegyensúlyi árak elérhetők emelkedő aukcióval is.

Árverési játékok I - Eladó egy dollár

Shubik 1971

Eladó egy dollár. A kikiáltási ár 1 cent. Min licit: 1 cent, max licit 10 cent.

Aki az utolsó legmagasabb árat ajánlotta fizet amennyit mondott, és viheti a dollárt. De nem csak ő fizet hanem aki az utolsó előtti ajánlatot adta az is.

Átlagos végső ár: 340 cent $\rightsquigarrow$ átlagos bevétel kb 7 dollár $\rightsquigarrow$ átlagos haszon kb 6 dollár.

3 döntő pillanat:

- Beindul-e a játék?
- 50 cent
- 100 cent

Too much invested to quit vagy Concorde csapda

Vickery aukció

Titkos licit: A résztvevők a többiek licitjének ismerete nélkül adják le a licitet. A legmagasabb ajánlat nyer, de a fizetendő ár a második legmagasabb.

Alapvetően érdemes annyit licitálni amennyi a tárgy tényleges hasznossága.

Összejátszás érzékenység: Ha a résztvevők megosztják az információikat egymással, csökkenthetik az árat, és ugyanaz nyeri az árverést

Nem feltétlenül maximalizálja az eladó profitját.

Csomag aukciós problémák: Pl: frekvenciasávok adott megyékben

Póker modell

- 1 Minden menet elején X 10-et Y 30-at tesz be
- 2 X dob egyet egy kockával úgy hogy Y ne lássa
- 3 X megnézni: vagy feladja (Y viszi a 40-et) vagy ráhív (+50)
- 4 Y feladja vagy tartja. Ha tartja (X-60, Y-80)
- 5 Ha senki nem adta fel, X akkor nyer, ha 6-ost dobott

Ha X sosem blöfföl hosszú távon veszít.

Póker modell II

Stratégia: X - Ha 6-ost dob mindig ráhív, ha nem akkor $1/9$ -ed valószínűséggel blöfföl:
Mi történik 54 menetből?

- Ha Y minden kihívást elfogad: 54 menetből X várhatóan 9-szer dob 6-ost. Ekkor nyer $9 \cdot 80 = 720$ -at. A maradék 45 menetből 5x fog blöffölni: $5 \cdot (-60) = -300$. A maradék menetet feladja: $40 \cdot (-10) = -400 \rightsquigarrow +20$ -ban végez X.
- Ha Y minden kihívást elutasít: X a 9 db hatossal 270-et nyer. A 45 maradék menetből az 5 blöffel nyer $5 \cdot 30 = 150$ -et. A maradék 40 menetet ilyenkor is feladja: $-400 \rightsquigarrow +20$ -ban végez X.

Póker modell III

Y: Ha $4/9$ -ed valószínűséggel fogadja el a kihívást

- Ha X mindig ráhív: Ekkor X az 54 menetből a várha 9 db 6-os dobásával 4-szer 80-at nyer (mert Y 4 kihívást fogad el), a maradék 5 alkalommal pedig 30-at. Ez Y-ra nézve $= 4 \cdot (-80) + 5 \cdot (-30) = -470$. A mindig blöffölő X a maradék 45 eset $5/9$ -edében, 25-ször nyer 30-at, ez Y-ra -750. A maradék 20 esetben Y nyer 60-at $\rightsquigarrow -20$.
- Ha X sohasem hív rá, ha nem 6-ost dobott akkor 9 db 6-osával nyer 470-et, a maradék 45 esetben pedig veszít 10-et. $\rightsquigarrow$ Y-ra -20.