

Játékelmélet és hálózati alkalmazásai 8. ea

Csercsik Dávid

ITK PPKE

- 1 Párosítási problémák
 - Alapfogalmak
 - Házastárs probléma
 - Gale-Shapley algoritmus
- 2 Újraelosztási probléma
 - Házallokációs probléma
 - Népszerű elosztások
- 3 Vesecseré program
- 4 Stabil szobatárs probléma

Maximális párosítás és minimális fedés

Adott egy $G(V, E)$ gráf, ahol $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ a pontok halmaza és $E = \{e_1, \dots, e_m\}$ az élek halmaza (és minden él egy pontpár).

Párosítás

Egy $M \subseteq E$ élhalmazt független élhalmaznak, avagy párosításnak nevezünk, ha $\forall (e_i, e_j) \in M$ -re $(e_i \cap e_j) = \emptyset$

Lefogó ponthalmaz

Egy $X \subseteq V$ ponthalmazt lefogó ponthalmaznak nevezünk, ha $\forall e_i \in E$ -re $(e_i \cap X) \neq \emptyset$

Jelölje $\nu(G)$ a gráfban található maximális párosítás méretét, és $\tau(G)$ a lefogó pontok minimális számát.

Maximális párosítás és minimális fedés

Adott egy $G(V, E)$ gráf, ahol $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ a pontok halmaza és $E = \{e_1, \dots, e_m\}$ az élek halmaza (és minden él egy pontpár).

Párosítás

Egy $M \subseteq E$ élhalmazt független élhalmaznak, avagy párosításnak nevezünk, ha $\forall (e_i, e_j) \in M$ -re $(e_i \cap e_j) = \emptyset$

Lefogó ponthalmaz

Egy $X \subseteq V$ ponthalmazt lefogó ponthalmaznak nevezünk, ha $\forall e_i \in E$ -re $(e_i \cap X) \neq \emptyset$

Jelölje $\nu(G)$ a gráfban található maximális párosítás méretét, és $\tau(G)$ a lefogó pontok minimális számát.

Tétel

$$\nu(G) \leq \tau(G) \quad \forall G$$

biz: Egy max. M párosítás lefogásához is kell min. $|M|$ pont.

Tétel - Kőnig Dénes 1931

Minden páros gráfra $\nu(G) = \tau(G)$, vagyis maximális párosítás mérete = lefedő pontok minimális száma

Tétel - Kőnig Dénes 1931

Minden páros gráfra $\nu(G) = \tau(G)$, vagyis maximális párosítás mérete = lefedő pontok minimális száma

Egy $X \subseteq V$ ponthalmazra jelölje $N(X)$ az X ponthalmaz szomszédainak halmazát.

Tétel - Hall

Egy $G(U \cup V, E)$ páros gráfban akkor és csak akkor létezik U -t lefedő párosítás, ha minden $X \subseteq U$ ponthalmazra $|N(X)| \geq |X|$

Tétel - König Dénes 1931

Minden páros gráfra $\nu(G) = \tau(G)$, vagyis maximális párosítás mérete = lefedő pontok minimális száma

Egy $X \subseteq V$ ponthalmazra jelölje $N(X)$ az X ponthalmaz szomszédainak halmazát.

Tétel - Hall

Egy $G(U \cup V, E)$ páros gráfban akkor és csak akkor létezik U -t lefedő párosítás, ha minden $X \subseteq U$ ponthalmazra $|N(X)| \geq |X|$

Egy párosítást teljesnek mondunk, ha a gráf összes pontját lefedi.

Tétel - Frobenius

Egy $G(U \cup V, E)$ páros gráfban akkor és csak akkor létezik teljes párosítás, ha $|U| = |V|$ és minden $X \subseteq U$ ponthalmazra $|N(X)| \geq |X|$

biz: Hall tételből

Tétel - König Dénes 1916

Egy $G(U \cup V, E)$ páros gráfban minden pont fokszáma legyen k (ezt nevezzük k -reguláris páros gráfnak). Ekkor E partícionálható k darab teljes párosításra, vagyis léteznek olyan $M_1, M_2, \dots, M_k$ teljes párosítások, melyekre $M_i \cap M_j = \emptyset \quad \forall i, j \in \{1, \dots, k\} (i \neq j)$ és $\bigcup_{i=1}^k M_i = E$

Biz: A k -regularitás miatt $|N(X)| \geq |X| \rightsquigarrow$ a Frobénius tétel miatt létezik teljes párosítás M_1 . Ezt elvéve a gráfból minden pont fokszáma pontosan 1-el csökken, és az így kapott $k - 1$ -reguláris gráfra a gondolatmenet újra elmondható.

Súlyozott eset

Adott egy $G(V, E)$ gráf, ahol $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ a pontok halmaza és $E = \{e_1, \dots, e_m\}$ az élek halmaza, továbbá egy $w : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ fv (nemnegatív élsúlyok).

Párosítás súlya

Egy M párosítás súlya: $\sum_{e \in M} w(e)$

Fedés

Egy $y : V \rightarrow \mathbb{R}_+$ függvényt fedésnek nevezünk, ha minden $\{v_i, v_j\} \in E$ -re $y(v_i) + y(v_j) \geq w(\{v_i, v_j\})$

Egy y fedés értéke: $\sum_{v \in V} y(v)$

Tétel - Egerváry Jenő 1931

Egy $G(U \cup V, E)$ páros gráfban a maximális párosítás súlya = a minimális fedés értéke

Házasítási probléma I.

Házasítási probléma

Adott n férfi és n nő, akiket össze kell házasítani. Minden férfi és nő felállított egy rangsort a másik nembeliekről (preferenciák). Cél egy olyan teljes párosítás létrehozása, amely mindenkinek megfelel.

Házasítási probléma II.

Definíció

A férfiak halmazát jelölje M , a nőket W , egy adott párosítást pedig a μ betű. Egy (m, w) párt ($m \in M, w \in W$) **blokkoló párnak** nevezünk, ha az m párja a μ párosításban w' , a w párja pedig m' és mindketten preferálják egymást a jelenlegi párjukhoz képest. Egy párosítást **stabilnak** nevezünk, ha nem létezik blokkoló pár.

További jelölések

Legyen $a \in M \cup W$ egy tetszőleges nő, vagy férfi. Az a személy másik nemen vett rendezését $\prec_a$ -val jelöljük, a párját pedig $\mu(a)$ -val.

A Gale-Shapley algoritmus

Késleltetett elfogadási algoritmus (lánykérő változat)

- 1 Minden fiú megkéri a preferencialistáján szereplő első lány kezét.
- 2 A lányok az őket felkérő fiúk közül a legjobban tetszőnek azt mondják 'talán' a többit elutasítják.
- 3 Azok a fiúk, akiket elutasítottak megkérik a listájukon szereplő második lány kezét.
- 4 Ha egy lány a második körben jobb ajánlatot kapott, akkor elküldi az eddig talonban tartott fiút és az újnak mondja azt, hogy talán.
- 5 A második körben elutasított fiúk tovább folytatják a lánykérést... Az algoritmus leáll, ha már minden fiú megállapodott. A lányok ekkor elkötelezik magukat.

Házasítási probléma III.

Tétel [Gale, Shapley 1962]

Tetszőleges $G = (M, W, E)$ páros gráfban létezik stabil párosítás. Ha $|M| = |W| = n$, és E a teljes páros gráf, akkor létezik teljes, vagyis n méretű stabil párosítás.

Bizonyítás

A lánykérő algoritmussal.

Feladat

Név	Preferenciasorrend	Név	Preferenciasorrend
Anna	$G \succ H$	Endre	$D \succ A \succ B \succ C$
Bea	$G \succ F \succ E \succ H$	Ferenc	$D \succ C \succ A \succ B$
Csilla	$G \succ H \succ E \succ F$	Gábor	$D \succ C \succ B \succ A$
Dóri	$H \succ G$	Henrik	$B \succ A \succ C$

Feladat

Alkalmazzuk a lánykérő algoritmust, majd a fordítottját a legénykérő algoritmust! Mit veszünk észre?

Feladat

Lánykérés eredménye

Név	Preferenciasorrend	Név	Preferenciasorrend
Anna	$G \succ H$	Endre	$D \succ A \succ \mathbf{B} \succ C$
Bea	$G \succ F \succ \mathbf{E} \succ H$	Ferenc	$D \succ \mathbf{C} \succ A \succ B$
Csilla	$G \succ H \succ E \succ \mathbf{F}$	Gábor	$\mathbf{D} \succ C \succ B \succ A$
Dóri	$H \succ \mathbf{G}$	Henrik	$B \succ \mathbf{A} \succ C$

Feladat

Legénykérés eredménye

Név	Preferenciasorrend	Név	Preferenciasorrend
Anna	$G \succ \mathbf{H}$	Endre	$D \succ A \succ B \succ \mathbf{C}$
Bea	$G \succ \mathbf{F} \succ E \succ H$	Ferenc	$D \succ C \succ A \succ \mathbf{B}$
Csilla	$G \succ H \succ \mathbf{E} \succ F$	Gábor	$\mathbf{D} \succ C \succ B \succ A$
Dóri	$H \succ \mathbf{G}$	Henrik	$B \succ \mathbf{A} \succ C$

Házasítási probléma V.

Definíció

Azt mondjuk, hogy a μ párosítás a **fiúk szempontjából dominálja** a ν párosítást, ha minden $m \in M$ fiúra $\mu(m) \succeq_m \nu(m)$. Egy μ stabil párosítás fiúoptimális, ha a fiúk szempontjából dominál minden más ν stabil párosítást.

Tétel

A lánykérő algoritmus fiúoptimális stabil párosítást ad, a legénykérő algoritmus pedig lányoptimálisat.

Házasítási probléma VI.

Definíció

Egy mechanizmust **taktikázásbiztosnak** mondunk, ha taktikailag nem manipulálható, azaz mindenkinek megéri az igazi preferenciáit közölni (megint másképpen: az igazmondás domináns stratégia).

Tétel

A lánykérő algoritmus a fiúk szempontjából taktikázásbiztos.

Házasítási probléma változatok

A probléma változatai

Zárójelben a felmerülő nehezségek.

- Egyetemi felvételi (kapacitások, közös kvóták)
- Rezidens felvételi (párok együttes jelentkezése)
- Nem szigorú preferencialisták (több stabilitásfogalom)
- Nem teljes preferencialisták (maximális párosítás megkeresése)

Rezidens felvételi

A probléma leírása

A rezidensek kórházakhoz való beosztása a Gale-Shapley algoritmus szerint történik. Fiatal házasoknak gondot okoz, ha egymástól távol kapnak állást. Ezért felmerült az igény, hogy párok közös jelentkezéseket adhassanak le. Sajnos amint a következő példa mutatja, ekkor már nem feltétlenül létezik stabil párosítás és már a kérdésnek az eldöntése is NP-teljes.

Példa

Jelentkezők:	Éva	Alíz és Bob
1. hely	Queens	(Queens, Memorial)
2. hely	Memorial	

Queens sorrendje: Alíz, Éva

Memorial sorrendje: Éva, Bob

Házallokáció I.

Házallokációs probléma

- Adott n egyén, akiknek mind van egy vagyontárgya, mondjuk egy háza. Nem mindenki elégedett a sajátjával, szívesen elcserélné, ha jobbat kapna helyette.
- Mindenkinek van egy teljes preferenciarendezése a házakról. A cél a házaknak egy olyan újraosztása, amely mindenkinek a megelégedésére szolgál.

Házallokáció II.

Jelölések

- A háztulajdonosok halmazát jelölje N .
- Egy újraelosztás nem más, mint a házaknak egy permutációja. Az elosztások halmazát jelölje A egy konkrét elosztást pedig $\mathbf{a}$. Minden elosztásról feltesszük, hogy $a_i \neq a_j$, ha $i \neq j$, minden $i, j \in N$ -re, azaz egy házat csak egy ember kap meg. Az viszont lehetséges, hogy $a_i = i$, azaz az i . háztulajdonos az újraelosztás során a saját házat kapta meg.
- Minden $S \subseteq N$ koalícióra, jelölje $A(S)$ azon elosztások halmazát, amelyeknél S tagjai egymás között cseréltek házat, azaz $A(S) = \{\mathbf{h} \in A \mid h_i \in S, \forall i \in S\}$.

Házallokáció III.

Definíció

Egy adott $\mathbf{a}$ elosztásra nézve S **blokkoló koalíció**, ha létezik olyan $\mathbf{h} \in A(S)$ elosztás, amellyel S tagjai legalább olyan jól járnak mint $\mathbf{a}$ -val és legalább egy S -beli szigorúan jobban jár.

Jelentése: Ha S kilépne az elosztásból, akkor az S -beliek maguk között el tudnák osztani a házakat úgy, hogy mindenki jobban járna, ezért az $\mathbf{a}$ elosztás nem stabil. Azon elosztások halmazát, amelyekre nézve nem létezik blokkoló koalíció, az újraelosztási feladat **magjának** nevezzük.

Felső körcsere algoritmus (TTC)

Top trading cycles

- 1 Ábrázoljuk az N halmazt egy n csúcsú gráffal.
- 2 Húzzunk be irányított éleket i és j csúcsok között, ha az i -edik egyén preferenciarendezésében a j . ház van legelől.
- 3 Ekkor egy olyan gráfot kapunk, amelyben minden csúcs kifoka 1. Az ilyen gráfokban van legalább egy irányított kör.
- 4 Az irányított kör(ök) mentén cseréljük ki a házakat. Mindenki azt a házat kapja meg, amelybe az irányított él mutat.
- 5 Jelölje N_1 azoknak a tulajdonosoknak a halmazát, akik házat cseréltek. Iteráljuk az itt leírt eljárást az $N - N_1$ halmazon, úgy hogy az N_1 -beli házakat minden preferenciarendezésből töröljük.

Házallokáció IV.

Tétel [Shapley, Scarf, Gale 1974]

Az újraelosztási feladat magja pontosan egy elosztásból áll, abból, amelyet a felső körcsere algoritmus szolgáltat.

Tétel [Roth 1982]

A felső körcsere algoritmus taktikázásbiztos.

Népszerű elosztások

Definíció

A házak egy **a** újraelosztását **népszerűnek** mondjuk, ha nincs olyan **a'** elosztás, amelyet több tulajdonos részesít előnyben mint **a**-t.

Népszerű elosztás nem feltétlenül létezik, lásd pl. az alábbi példát:

1:	h_1	h_2	h_3
2:	h_1	h_2	h_3
3:	h_1	h_2	h_3

pl:

$$(h_1, h_2, h_3) \longrightarrow (h_3, h_1, h_2) \longrightarrow (h_2, h_3, h_1) \longrightarrow (h_1, h_2, h_3)$$

Feladat

Találjunk két különböző méretű népszerű elosztást!

1:	h_1	h_4	
2:	h_2	h_5	
3:	h_3	h_4	h_6
4:	h_1		
5:	h_2		
6:	h_3		

Vesecsere program I.

Veseelégtelenség kezelése

- Dialízis
- Transzplantáció

A családon belüli szervátültetés sokszor lehetetlen a vércsoport, vagy a szövettípus különbözősége miatt. A balesetben elhunyt személyektől származó szerv kevés $\Rightarrow$ sokéves várólista.

Vesecsere program II.

Megoldás

A donorok és betegek megfelelő párosításával, a veséket szó szerint körbeadva, mindenki jól jár. Az eljárás azonban számos kérdést felvet:

- Jogi szabályozás (pl. önkéntesség kérdése)
- Donorok névtelensége
- A műtéteknek egyszerre kell lezajlania, nehogy az egyik donor közben meggondolja magát.

Vesecsere program III.

A cserék hossza

Hosszabb cserék több életet mentenek meg, de a kockázat is sokkal nagyobb. A donorok névtelensége miatt a műtétekre sokszor nem is egy városban kerül sor (szállítási és szervezési nehézségek). Az első hatos (!) cserét 2008 áprilisában hajtották végre az Egyesült Államokban. Máshol pl. Angliában azonban maximum hármas cseréket engednek meg.

Vesezsere program IV.

További szempontok

- Önkéntes vesedonorok hosszú dominószerű cseréket tudnak elindítani.
- Kórházak sokszor visszatartják a 'legkompatibilisebb' betegeiket.
- Ez megoldható úgy, hogy a kórházakat érdekeltté tesszük a cserében, vagy törvényi szabályozás útján (az Egyesült Királyságban pl. kötelező részt venni a programban).

Stabil szobatárs probléma

A probléma leírása

- A kollégiumba szeretnénk $2n$ számú diákot beköltöztetni. Egy szobában ketten férnek el. Minden diáknak van egy szigorú preferenciasorrendje arról, hogy kivel szeretne összeköltözni.
- Lehetséges-e a diákokat stabil módon párosítani?

Megjegyzés

A probléma annyiban tér el a stabil házasságtól, hogy nem páros, hanem teljes gárfon dolgozunk.

Stabil szobatárs probléma

Ahogy a következő példa mutatja ebben az esetben már nem biztos, hogy létezik stabil párosítás!

Egyén	Preferencia		
1:	2	3	4
2:	3	1	4
3:	1	2	4
4:	tetszőleges		

Irving algoritmusa

Első fázis

- Ha x ajánlatot kap egy y személytől
 - a) elutasítja, ha egy általa jobban kedvelt egyén ajánlatát őrzi,
 - b) különben megtartja, és ezzel egyidőben elutasítja a korábban esetleg neki tett (rosszabb) ajánlatot.
- Az egyének a preferencialistájukon lévő sorrendben ajánlatot tesznek a többieknek. Ha valaki ideiglenesen elfogadja az ajánlatukat megállnak. Ha bármikor visszautasítást kapnak folytatják az ajánlattevést, amíg a preferencialistájuk végére nem érnek.

Irving algoritmusa

Példa az első fázisra:

Egyén	Preferencia				
1:	4	6	2	5	3
2:	6	3	5	1	4
3:	4	5	1	6	2
4:	2	6	5	1	3
5:	4	2	3	6	1
6:	5	1	4	2	3

Irving algoritmusa

Példa az első fázisra:

Egyén	Preferencia				
1:	4	6	2	5	3
2:	6	3	5	1	4
3:	4	5	1	6	2
4:	2	6	5	1	3
5:	4	2	3	6	1
6:	5	1	4	2	3

- 1-es ajánlatot tesz a 4-esnek, 4-es megőrzi és a jövőben elutasít minden ennél rosszabb ajánlatot.

Irving algoritmusa

Példa az első fázisra:

Egyén	Preferencia				
1:	4	6	2	5	3
2:	6	3	5	1	4
3:	4	5	1	6	2
4:	2	6	5	1	3
5:	4	2	3	6	1
6:	5	1	4	2	3

- 2-es ajánlatot tesz a 6-osnak, 6-os megőrzi és a jövőben elutasít minden ennél rosszabb ajánlatot.

Irving algoritmusa

Példa az első fázisra:

Egyén	Preferencia				
1:	4	6	2	5	3
2:	6	3	5	1	4
3:	4	5	1	6	2
4:	2	6	5	1	3
5:	4	2	3	6	1
6:	5	1	4	2	3

- 3-as ajánlatot tesz a 4-esnek, 4-es elutasítja, hiszen már van jobb ajánlata.

Irving algoritmus

Példa az első fázisra:

Egyén	Preferencia				
1:	4	6	2	5	3
2:	6	3	5	1	4
3:	4	5	1	6	2
4:	2	6	5	1	3
5:	4	2	3	6	1
6:	5	1	4	2	3

- 3-as ajánlatot tesz az 5-ösnek, 5-ös megőrzi és a jövőben elutasít minden ennél rosszabb ajánlatot.

Irving algoritmusa

Példa az első fázisra:

Egyén	Preferencia				
1:	4	6	2	5	3
2:	6	3	5	1	4
3:	4	5	1	6	2
4:	2	6	5	1	3
5:	4	2	3	6	1
6:	5	1	4	2	3

- 4-es ajánlatot tesz a 2-esnek, 2-es megőrzi és a jövőben elutasít minden ennél rosszabb ajánlatot.

Irving algoritmus

Példa az első fázisra:

Egyén	Preferencia				
1:	4	6	2	5	3
2:	6	3	5	1	4
3:	4	5	1	6	2
4:	2	6	5	1	3
5:	4	2	3	6	1
6:	5	1	4	2	3

- 5-ös ajánlatot tesz a 4-esnek, 4-es megőrzi és elutasítja korábbi (ennél rosszabb) ajánlatát.

Irving algoritmus

Példa az első fázisra:

Egyén	Preferencia				
1:	4	6	2	5	3
2:	6	3	5	1	4
3:	4	5	1	6	2
4:	2	6	5	1	3
5:	4	2	3	6	1
6:	5	1	4	2	3

- 1-es ajánlatot tesz a 6-osnak, 6-os megőrzi és a jövőben elutasít minden ennél rosszabb ajánlatot. (azért nem a 6-os jön, mert mindig azt a legkisebb indexű embert nézzük, akinek nincs függőben lévő ajánlata)

Irving algoritmus

Példa az első fázisra:

Egyén	Preferencia				
1:	4	6	2	5	3
2:	6	3	5	1	4
3:	4	5	1	6	2
4:	2	6	5	1	3
5:	4	2	3	6	1
6:	5	1	4	2	3

- 2-es ajánlatot tesz a 3-asnak, 3-as megőrzi és a jövőben elutasít minden ennél rosszabb ajánlatot.

Irving algoritmus

Példa az első fázisra:

Egyén	Preferencia				
1:	4	6	2	5	3
2:	6	3	5	1	4
3:	4	5	1	6	2
4:	2	6	5	1	3
5:	4	2	3	6	1
6:	5	1	4	2	3

- 6-os ajánlatot tesz az 5-ösnek, 5-ös elutasítja, hiszen már van jobb ajánlata.

Irving algoritmusa

Példa az első fázisra:

Egyén	Preferencia				
1:	4	6	2	5	3
2:	6	3	5	1	4
3:	4	5	1	6	2
4:	2	6	5	1	3
5:	4	2	3	6	1
6:	5	1	4	2	3

- 6-os ajánlatot tesz az 1-esnek, 1-es megőrzi és a jövőben elutasít minden ennél rosszabb ajánlatot. Mivel 1 és 6 párt alkotnak, náluk kihúzzunk minden más lehetőséget.

Irving algoritmusa

Első fázis

Az első fázis kétféleképpen érhet véget:

- ha minden ember kapott valakitől ajánlatot,
- vagy ha egy egyént mindenki elutasít.

A második esetben nem létezik stabil párosítás.

Lemma

Ha az algoritmus során y elutasítja x -et, akkor x és y nem állhatnak párban egyetlen stabil párosításban sem.

Irving algoritmusa

Következmények

Ha az algoritmus során x ajánlatot tesz y -nak, akkor egy stabil párosításban

- x -nek nem lehet jobb partnere y -nál,
- y -nak nem lehet rosszabb partnere x -nél.

Következmények

Ha az első fázis végén van valaki, akit mindenki más elutasított, akkor nem létezik stabil párosítás.

Irving algoritmusa

Következmények

Ha az első fázis úgy fejeződik be, hogy mindenki őriz valakitől ajánlatot, akkor preferencialistákat egyszerűsíteni lehet. Ha y éppen x ajánlatát őrzi, akkor y listájáról potenciális partnerei közül törölhetőek azok,

- akiket x -nél kevésbé kedvel, vagy
- akik őriznek egy ajánlatot olyasvalakitől, akit y -nál jobban kedvelnek.

Irving algoritmusa

Következmények

Ha a fentieket végrehajtjuk, akkor

- y első lesz x listáján, x pedig utolsó y -én.
- általánosságban, ha a szerepel b listáján, akkor b is szerepel a -én.

Lemma

Ha az egyszerűsítés után minden lista csak egy személyt tartalmaz, akkor egy stabil párosítást kaptunk.

Irving algoritmus

Az egyszerűsítés után:

Egyén	Preferencia		
1:	6		
2:	3	5	4
3:	5	2	
4:	2	5	
5:	4	2	3
6:	1		

Irving algoritmus

Legyen $a_1, \dots, a_r$ a diákoknak egy csoportja, amelyre igaz a következő

Egyén	Preferencia		
a_1	b_1	b_2	$\dots$
a_2	b_2	b_3	$\dots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
a_r	b_r	b_1	$\dots$

Irving algoritmusa

Tétel

Legyen $a_1, \dots, a_r$ a fenti feltételeknek eleget tevő diákcsoport. Ekkor

- bármely stabil párosítás esetén a_i és b_i vagy minden i -re partnerek, vagy egyikre sem.
- ha létezik olyan párosítás, amelyben a_i és b_i partnerek minden i -re, akkor olyan is létezik, amelyikben nem.

Irving algoritmus

Második fázis

A tétel következményeképp, ha létezik stabil párosítás, akkor olyan stabil párosítás is van, amelyben b_i minden i -re elutasítja a_i -t. Ekkor a_i ajánlatot tesz b_{i+1} -nek és b_{i+1} listájáról törölhetünk minden a_i -nél rosszabb jelentkezőt. Ezzel egy időben b_{i+1} -et is törölhetjük ezeknek a jelentkezőknek a listájáról.

A második fázist addig ismételjük, amíg minden diák listáján csak egy személy nem szerepel. Ekkor stabil párosításhoz jutottunk. Ha valamelyik diák preferencialistája kiürül, akkor nem létezik stabil párosítás.

Irving algoritmus

A második fázisban 2-es ajánlatot tesz 5-nek, aki emiatt elutasítja a 3-ast. 3-as ajánlatot tesz 2-nek, aki elfogadja (elutasítja 4-et), kialakul egy pár. 4 2-ről átvált 5-re.

Egyén	Preferencia
1:	6
2:	3 5 4
3:	5 2
4:	2 5
5:	4 2 3
6:	1

Irving algoritmusa

Így kialakulnak a végső párosítások: 1–6, 2–3, 4–5.

Egyén	Preferencia
1:	6
2:	3 5 4
3:	5 2
4:	2 5
5:	4 2 3
6:	1

Feladat

Létezik-e stabil párosítás az alábbi példában?

Egyén	Preferencia				
1:	2	6	4	3	5
2:	3	5	1	6	4
3:	1	6	2	5	4
4:	5	2	3	6	1
5:	6	1	3	4	2
6:	4	2	5	1	3

Tan tétele

Tétel

Stabil fél-párosítás mindig létezik.

Tekinsük a következő példát!

Egyén	Preferencia		
A:	B	C	D
B:	C	A	D
C:	A	B	D
D:	tetszőleges		

Anna, Bea, Cettina és Dóri teniszpartnert keres egy órára. Tudjuk, hogy stabil párosítás nem létezik. Ugyanakkor ha Anna, Bea és Cetti fél-fél órát játszanak egymással, Dórit pedig kihagyják, akkor stabil fél-párosítást kapunk!