

Játékelmélet és hálózati alkalmazásai 7.ea

Csercsik Dávid

Election special

ITK PPKE

- 1 Választókörzetek kialakítása
 - Körzetkiosztási szabályok és módszerek

Választóközetek kialakítása

A probléma

A legtöbb demokratikus országban a parlamenti képviselők egy részét közvetlenül választják az emberek. Magyarországon az új választási törvény értelmében 106 képviselőt választanak ilyen módon. Ennek érdekében az országot választóközetekre kell bontani, úgy hogy minden körzetből egy képviselő juthat be.

Választóközetek kialakítása

Nehézség

- Ügyelni kell arra, hogy a választóközetek között ne legyenek nagy méretkülönbségek. Ideális esetben minden körzetre ugyanannyi választó jut.
- Előfordulhat, hogy földrajzi, vagy kulturális okokból egyes régiókat nem lehet szétválasztani vagy összevonni.
- Figyelembe kell venni az adminisztratív határokat is.
- (Politikai vonatkozások: gerrymandaring)

Gerrymandaring

A választókerület-manipuláció:

- saját szavazatok maximalizálása: az ellenfél szavazatainak szétoztása több választókerületben úgy, hogy mindenhol vagy a legtöbb helyen kisebbségben maradjanak
- az ellenfél szavazatainak csökkentése: pont ellenkezőleg, egy választókerületbe sűrítjük őket, ahol ugyan többségben lesznek, de ezen az áron a többi kerületben meg kisebbségbe kerülnek.

A két módszert tipikusan kombinálják, a lényeg az, hogy a favorizált fél nagyobb képviselőhöz jusson, mint az eredeti állapotban.

Választóközrzetek kialakítása

Gerry-salamander



ábra: Elbridge Gerry választóközrrete

Gerrymandaring II

Elve a szavazatpazarlási effektuson nyugszik. Az ellenfél szavazatainak az általuk amúgy is nyerendő körzetbe zsúfolásával (felesleges plusz szavazatok) és a többiek elosztásával elvesztendő körzetekbe (növekvő számú vesztes szavazat), az ellenfél elvesztegetett szavazatainak száma maximalizálható.

Hatás: az érintett területeken, különösen a 'besűrített' választókerületekben csökken a verseny. Mivel a jelöltek nagy fölényrel nyernek és a helyük biztonságos, nincs értelme nagy kampányt folytatni sem. 2002-ben például az Egyesült Államokban a Képviselőház 435 mandátuma közül csak 57-ben volt igazi verseny, ahol a befutó kevesebb, mint 10 százalékpont fölényrel nyert. Ugyanezek miatt a választási részvétel is csökken, mivel nincs igazán tétje a szavazásnak. A kampányok nem célozzák a részvétel növelését.

Történelmi bevezető

Amerikai Alkotmány I. cikkely 2. bekezdés

"Representatives and direct taxes shall be apportioned among the several States which may be included within this Union, according to their respective numbers,..." (1792)

"A képviselőket és a közvetlen adókat az Unió részét alkotó államok között számarányuknak megfelelően kell elosztani,..."

Jelölések

- Legyen n a megyék száma, amelyek lakossága rendre $p_1, p_2, \dots, p_n$.
- Jelölje $H \in \mathbb{N}$ a parlament nagyságát.
- Olyan $a_1, a_2, \dots, a_n$ pozitív egészeket keresünk, amelyekre igaz, hogy $a_1 + a_2 + \dots + a_n = H$. Az a_i szám azt jelöli, hogy az i -edik megye hány képviselői helyet kapott.
- Legyen tovább P az össznépesség, és jelölje A egy átlagos körzet nagyságát, azaz $A = \frac{P}{H}$.

Definíció

Egy M körzetkiosztó módszer olyan függvény, amely minden $(\mathbf{p}, H)$ körzetkiosztási problémához egy $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ vektort rendel.

Körzetkiosztási szabályok és módszerek

Egzakt kvóta

A legigazságosabb elosztás természetesen az arányos elosztás. Minden olyan esetben, amikor a $\frac{p_i}{A}$ számok egészek minden $i \in \{1, \dots, n\}$ -re, egy körzetkiosztó módszer $\frac{p_i}{A}$ -t kell, hogy kiosszon az i -edik körzetnek. Ekkor azt mondjuk, hogy a körzetkiosztó módszer egzakt kvóta szerinti.

Pl. legyen $p_1 = 100$ és $p_2 = 200$, valamint legyen $H = 3$. Ekkor $M(\mathbf{p}, H) = (1, 2)$, ha M egzakt kvóta szerinti.

Körzetkiosztási szabályok és módszerek

Hare-kvóta

Sajnos a gyakorlatban soha nem lehet az egzakt kvóták szerint kiosztani a körzeteket. Ésszerű kiterjesztése a szabálynak, hogy senki nem kaphat $\frac{p_i}{A}$ alsóegészrészénél kevesebb és felsőegészrészénél több körzetet. Azokat a körzetkiosztó módszereket, amelyek teljesítik ezt a követelményt Hare-kvóta szerintinek mondjuk.

Pl. legyen $p_1 = 120$ és $p_2 = 280$, valamint legyen $H = 4$. Ekkor egy átlagos körzet mérete 100 fő. Mivel $\frac{p_2}{A} = 2.8$, ezért egy Hare-kvóta szerinti körzetkiosztó módszer a 2. megyének kettő vagy három körzetet ad (az első megye ezzel összhangban 2 vagy 1 körzetet kap).

Körzetkiosztási szabályok és módszerek

Jefferson módszer

Ha az átlagkörzettel osztunk és vesszük az így kapott számok alsóegészrészét, tehát $\lfloor \frac{p_i}{A} \rfloor$ -t minden $i \in \{1, \dots, n\}$ -re, akkor biztosan nem osztottunk ki túl sok körzetet. Válasszunk A helyett egy olyan λ osztót, ami a lehető legközelebb van A -hoz és pont H körzetet oszt szét, azaz

$$\sum_{i=1}^n \left\lfloor \frac{p_i}{\lambda} \right\rfloor = H.$$

Körzetkiosztási szabályok és módszerek

Példa a Jefferson módszerre

15 ösztöndíjas helyet szeretnénk szétosztani három szak között. Történelemre 231-en járnak, szociológiára 505-en, pszichológiára pedig 355-en. Átlag $72\frac{1}{3}$ hallgatóra jut egy ösztöndíj.

Szak	Kvóta	Alsóegészrész
Töri	$231/72.33 = 3.185$	3
Szoc	$505/72.33 = 6.921$	6
Pszicho	$355/72.33 = 4.895$	4
Összesen		13

Körzetkiosztási szabályok és módszerek

Példa a Jefferson módszerre

15 ösztöndíjas helyet szeretnénk szétosztani három szak között. Történelemre 231-en járnak, szociológiára 505-en, pszichológiára pedig 355-en. Átlag $72\frac{1}{3}$ hallgatóra jut egy ösztöndíj.

Szak	Kvóta	Alsóegészrész
Töri	$231/72 = 3.208$	3
Szoc	$505/72 = 6.970$	6
Pszicho	$355/72 = 4.93$	4
Összesen		13

Körzetkiosztási szabályok és módszerek

Példa a Jefferson módszerre

15 ösztöndíjas helyet szeretnénk szétosztani három szak között. Történelemre 231-en járnak, szociológiára 505-en, pszichológiára pedig 355-en. Átlag $72\frac{1}{3}$ hallgatóra jut egy ösztöndíj.

Szak	Kvóta	Alsóegészrész
Töri	$231/71 = 3.254$	3
Szoc	$505/71 = 7.070$	7
Pszicho	$355/71 = 5.000$	5
Összesen		15

Körzetkiosztási szabályok és módszerek

D'Hondt módszer

A 19. századi holland matematikus javasolta a következő módszert. Először osszuk ki mindenkinek egy körzetet (kezdhetjük 0-ról is), majd nézzük meg, hogy a $\frac{p_i}{a_i+1}$ számok közül melyik a legnagyobb és ennek adjunk még egyet. Folytassuk az eljárást amíg $\sum_i a_i$ egyenlő nem lesz H -val. Pl. legyen $p_1 = 630$, $p_2 = 480$, $p_3 = 290$ és $H = 7$.

	$\frac{p_i}{a_i+1}$	Körzet
1. megye	$630/2 = 315$	1
2. megye	$480/2 = 240$	1
3. megye	$290/2 = 145$	1
Összesen		3

Körzetkiosztási szabályok és módszerek

D'Hondt módszer

A 19. századi holland matematikus javasolta a következő módszert. Először osszuk ki mindenkinek egy körzetet (kezdhetjük 0-ról is), majd nézzük meg, hogy a $\frac{p_i}{a_i+1}$ számok közül melyik a legnagyobb és ennek adjunk még egyet. Folytassuk az eljárást amíg $\sum_i a_i$ egyenlő nem lesz H -val. Pl. legyen $p_1 = 630$, $p_2 = 480$, $p_3 = 290$ és $H = 7$.

	$\frac{p_i}{a_i+1}$	Körzet
1. megye	$630/3 = 210$	2
2. megye	$480/2 = 240$	1
3. megye	$290/2 = 145$	1
Összesen		4

Körzetkiosztási szabályok és módszerek

D'Hondt módszer

A 19. századi holland matematikus javasolta a következő módszert. Először osszuk ki mindenkinek egy körzetet (kezdhetjük 0-ról is), majd nézzük meg, hogy a $\frac{p_i}{a_i+1}$ számok közül melyik a legnagyobb és ennek adjunk még egyet. Folytassuk az eljárást amíg $\sum_i a_i$ egyenlő nem lesz H -val. Pl. legyen $p_1 = 630$, $p_2 = 480$, $p_3 = 290$ és $H = 7$.

	$\frac{p_i}{a_i+1}$	Körzet
1. megye	$630/3 = 210$	2
2. megye	$480/3 = 160$	2
3. megye	$290/2 = 145$	1
Összesen		5

Körzetkiosztási szabályok és módszerek

D'Hondt módszer

A 19. századi holland matematikus javasolta a következő módszert. Először osszunk ki mindenkinek egy körzetet (kezdhetjük 0-ról is), majd nézzük meg, hogy a $\frac{p_i}{a_i+1}$ számok közül melyik a legnagyobb és ennek adjunk még egyet. Folytassuk az eljárást amíg $\sum_i a_i$ egyenlő nem lesz H -val. Pl. legyen $p_1 = 630$, $p_2 = 480$, $p_3 = 290$ és $H = 7$.

	$\frac{p_i}{a_i+1}$	Körzet
1. megye	$630/4 = 157.5$	3
2. megye	$480/3 = 160$	2
3. megye	$290/2 = 145$	1
Összesen		6

Körzetkiosztási szabályok és módszerek

D'Hondt módszer

A 19. századi holland matematikus javasolta a következő módszert. Először osszunk ki mindenkinek egy körzetet (kezdhetjük 0-ról is), majd nézzük meg, hogy a $\frac{p_i}{a_i+1}$ számok közül melyik a legnagyobb és ennek adjunk még egyet. Folytassuk az eljárást amíg $\sum_i a_i$ egyenlő nem lesz H -val. Pl. legyen $p_1 = 630$, $p_2 = 480$, $p_3 = 290$ és $H = 7$.

	$\frac{p_i}{a_i+1}$	Körzet
1. megye	$630/4 = 157.5$	3
2. megye	$480/4 = 120$	3
3. megye	$290/2 = 145$	1
Összesen		7

Körzetkiosztási szabályok és módszerek

Megjegyzések

- A D'Hondt módszert használták pl. a területi listákon a mandátumok elosztására is.
- A Jefferson és a D'Hondt módszer matematikailag ekvivalensek egymással, azaz mindig azonos eredményre jutnak.
- A Jefferson/D'Hondt módszerek nem Hare-kvóta szerintiek.

Körzetkiosztási szabályok és módszerek

Hamilton-módszer

Először minden megyének kiosztunk $\lfloor \frac{p_i}{A} \rfloor$ körzetet, majd nem-növekvő sorba rendezzük a megyéket a $d_i = \frac{p_i}{A} - \lfloor \frac{p_i}{A} \rfloor$ értékek szerint. Ha még d számú képviselői hely nem lett kiosztva, akkor a sorban az első d megyének adunk egy-egy körzetet. Tehát az előző példa esetében ($p_1 = 630, p_2 = 480, p_3 = 290, H = 7 \rightsquigarrow A = 1400/7 = 200$) a Hamilton-módszer először kioszt

Arány	Előzetes kvóta	Eredmény
$\frac{p_1}{A} = 3.15$	3	3
$\frac{p_2}{A} = 2.4$	2	2
$\frac{p_3}{A} = 1.45$	1	2

Az eljárásból adódik, hogy a Hamilton-módszer mindig Hare-kvóta szerinti.

Körzetkiosztási szabályok és módszerek

Alabama-paradoxon

Akkor beszélünk Alabama-paradoxonról, amikor a parlament nagyságának növelésével valamelyik megye kevesebb körzetet kap (a megyék népességének változatlansága mellett).

Monotonitás

Egy M körzetkiosztási módszert (ház-)monotonnak mondunk ha minden $H' \geq H$ -ra fönnáll, hogy $M(\mathbf{p}, H') \geq M(\mathbf{p}, H)$ (koordinátánként), azaz a parlament méretének növelésével, egy megye sem kap kevesebb körzetet.

Körzetkiosztási szabályok és módszerek

Egyenlő arányok módszere (EP - equal proportions)

Először osszuk ki mindenkinek egy körzetet, majd nézzük meg, hogy a $\frac{p_i}{(a_i(a_i+1))^{\frac{1}{2}}}$ számok közül melyik a legnagyobb és ennek adjunk még egyet. Folytassuk az eljárást amíg $\sum_i a_i$ egyenlő nem lesz H -val.

Körzetkiosztási szabályok és módszerek

Egyenlő arányok módszerének tulajdonságai

- Az USA-ban a képviselői helyek kiosztása jelenleg az EP módszer alapján történik.
- Az EP és a Jefferson módszerek rokonok. Az ilyen típusú körzetkiosztó eljárásokat osztó-módszernek, vagy Huntington-módszernek is hívják.
- Minden osztó-módszer ház-monoton.
- Az EP nem Hare-kvóta szerinti.

Feladat

Feladat

Három szak között 7 ösztöndíjas helyet kell szétosztani a szakok nagyságának függvényében. A három szak hallgatóinak a száma rendre: 120, 42 és 68. Osszuk ki a helyeket a D'Hondt és a Hamilton módszer szerint is!

Körzetkiosztási szabályok és módszerek

Népességi paradoxon (population monotonicity)

A népességi paradoxon akkor lép fel, ha egy társánál dinamikusabban növekvő megye képviselői helyet veszít (a többi feltétel változatlansága mellett).

Történelmi háttér

1900 és 1910 között Virginia népessége 19 767 fővel nőtt míg Maine állam csak 4648 fővel. Virginia népessége így 60%-kal gyorsabb ütemben gyarapodott, mégis a Hamilton-módszer szerint egy képviselői helyet veszített Maine-nel szemben

Körzetkiosztási szabályok és módszerek

Népességi paradoxon

Az alábbi példában 50 képviselői helyet osztunk szét a Hamilton-módszer segítségével öt megye A, B, C, D, E között, amelyeknek az össznépessége 900 fő. $A = 900/50 = 18$

Megye	Népesség	$\frac{p_i}{A}$	Eredmény
A	150	8.33	8
B	78	4.33	4
C	173	9.61	10
D	204	11.33	11
E	295	16.39	17
Összesen	900		50

Körzetkiosztási szabályok és módszerek

Népességi paradoxon

Tegyük fel, hogy a C és az E megye népessége megnövekszik.

$A = 909/50 = 18.18$ Figyeljük meg, hogy az E megye képviselői helyet veszít B -vel szemben, pedig B népessége semmit nem nőtt!

Megye	Népesség	Kvóta	Eredmény
A	150	8.25	8
B	78	4.29	5
C	181	9.96	10
D	204	11.22	11
E	296	16.28	16
Összesen	909		50

Körzetkiosztási szabályok és módszerek

Új megye paradoxon

Ez a paradoxon akkor lép fel, ha egy új megye csatlakozik a már meglévőkhöz és bár a körzetek számát megnövelik az új megyének járó képviselői helyek számával, előfordulhat, hogy egy megye kevesebb körzetet kap mint korábban.

Történelmi háttér

1907-ben Oklahoma csatlakozott az Unióhoz, ezért a képviselői helyek számát megnövelték az Oklahomának járó 5 hellyel. A Hamilton-módszerrel újraszámolt kiosztásban New York veszített egy helyet Maine államban szemben, holott egyik állam népessége sem változott.

Körzetkiosztási szabályok és módszerek

Példa új megye paradoxonra

Megye	Népesség	Kvóta	Eredmény
A	1 045	10.45	10
B	8 955	89.55	(89) 90
???	???	???	???
Összesen	10 000		100

Körzetkiosztási szabályok és módszerek

Példa új megye paradoxonra

Megye	Népesség	Kvóta	Eredmény
A	1 045	10.425	(10) 11
B	8 955	89.337	89
C	525	5.237	5
Összesen	10 525		105

Körzetkiosztási szabályok és módszerek

A kvóta és a paradoxonok

Balinski és Young 1975-ös cikkükben bebizonyították, hogy nincs tökéletes körzetkiosztó módszer. Tehát nincs olyan eljárás, amely egyszerre lenne mentes az Alabama- és a népességi paradoxontól és lenne Hare-kvóta szerinti (ez egyik legalább sérül). A Jefferson és az egyenlő arányok módszere paradoxon-mentesek, de sértik a kvótát. A Hamilton-módszer Hare-kvóta szerinti, viszont nem mentes a paradoxonoktól. Balinski és Young által javasolt eljárás az ún. kvóta-módszer Hare-kvóta szerinti és Alabama-paradoxon mentes, de a népességi paradoxon ott is fellép.

Velencei bizottság

- Teljes név: European Commission for Democracy through Law (1990)
- Azért jött létre, hogy segítsen az új demokráciáknak az alkotmányát és választási törvényét megszövegezni.
- Választási törvény ajánlás: The Code of Good Practice in Electoral Matters (2002)
- Az EU megfigyelők következetesen a fenti ajánlást használták a 2011-es albán és észt választási törvény értékelésekor.

Választóközetek kialakítása

Elrettentő példa

Az 1999-es Grúziai választási törvény nem szabályozta, hogyan kell kialakítani a választási körzeteket. A Lent'ekhi körzet 3 600 fős volt, a Kutaisi pedig 138 000 fős. A Lent'ekhi szavazóknak tehát több, mint 30-szor akkora befolyása volt mint a Kutaisi-ban lakóknak. Egy ilyen aránytalanság az egész választás legitimitását megkérdőjelezi.

A Velencei Bizottság ajánlása

Ajánlás I.

"Equality in voting power, where the elections are not being held in one single constituency, requires constituency boundaries to be drawn in such a way that seats in the lower chambers representing the people are distributed equally among the constituencies, in accordance with a specific apportionment criterion ...

Ajánlás II.

" Constituency boundaries may also be determined on the basis of geographical criteria and the administrative or indeed historic boundary lines, which often depend on geography ...

constituency=választókerület

A Velencei Bizottság ajánlása (folyt.)

Ajánlás III.

"The maximum admissible departure from the distribution criterion adopted depends on the individual situation, although it should seldom exceed 10% and never 15%, except in really exceptional circumstances (a demographically weak administrative unit of the same importance as others with at least one lower-chamber representative, or concentration of a specific national minority)."

A maximális különbség tulajdonság

Definíció

- (Emlékeztető) $A = \frac{P}{H}$ egy átlagos körzet nagysága.
- Jelölje δ_i , hogy az i -edik megye körzetei hány százalékkal térnek el az átlagostól,
- valamint legyen d_i ennek abszolút értéke. Képlettel

$$\delta_i = \frac{\frac{p_i}{a_i} - A}{A} \quad \text{and} \quad d_i = |\delta_i|.$$

A maximális különbség tulajdonság

Egy adott $(\mathbf{p}, H)$ körzetkiosztási problémához legyen α a legkisebb max. különbség, amit el lehet érni, azaz

$$\alpha = \min_{\mathbf{a}} \max_{i \in \{1, \dots, n\}} \{d_i\}$$

Definíció

Egy M körzetkiosztó módszer teljesíti az MD -tulajdonságot ha

$$\left| \frac{\frac{p_i}{M(\mathbf{p}, H)_i} - A}{A} \right| \leq \alpha \text{ igaz minden } i \in \{1, \dots, n\}.$$

Összehasonlítás

A VB ajánlása és a Hare-kvóta szellemisége hasonló.

A Velencei Bizottság ajánlása

- A Hare-kvóta azt mondja meg, hogy egy megyének minimum és maximum hány körzetet kéne kapnia. Ha a megoldás eltér ettől, akkor az nem mondható igazságosnak a szóban forgó megye szempontjából.
- A Velencei Bizottság ajánlása a szavazót helyezi a középpontba. Ha a szavazóközetek méretei nagyon eltérnek egymástól, akkor a szavazói befolyások között is nagy lesz a különbség.

Az MD-tulajdonság a gyakorlatban

A maximális differencia (α) tulajdonságai

Figyeljük meg, hogy α nem monoton csökkenő a körzetek számában. Pl. legyen $p_1 = 100, p_2 = 200$ és $H = 3$. Ekkor lehetőségünk van a körzeteket szétosztani az egzakt kvóta szerint, tehát $\alpha = 0$. Ugyanakkor H -t eggyel megnövelve d_1 és d_2 is elromlik.

Az MD-tulajdonság a gyakorlatban

További jelölések

Jelölje l_i és u_i az i -edik megye alsó és felső kvótáját azaz $\lfloor \frac{p_i}{A} \rfloor$ -t és $\lceil \frac{p_i}{A} \rceil$ -t. Legyen

$$\beta_i = \min \left(\left| \frac{\frac{p_i}{l_i} - A}{A} \right|, \left| \frac{\frac{p_i}{u_i} - A}{A} \right| \right), \quad \beta = \max_{i \in N} \beta_i$$

Az MD-tulajdonság a gyakorlatban

Megfigyelés

A d_i érték akkor a legkisebb, ha az i -edik megye az alsó vagy felső kvótáját kapja. A β_i érték a két differencia közül a kisebbik, tehát az i -edik megye által elérhető legjobb körzetkiosztáshoz tartozó differencia. A β nem más mint az összes megye β_i értéke közül a legnagyobb, így egy természetes alsó korlátot jelent α értékére nézve.

$$\beta \leq \alpha$$

A lexmin eljárás

A Velencei Bizottság ajánlása

Az ajánlás szellemében érdemes egy olyan módszert keresni, amely az átlagtól való eltérést minimalizálja. Ez nem feltétlenül vezet egyértelmű kiosztásra, tehát pontosítani kell az eljáráson (a nemkívánatos politikai játszmákat elkerülendő). Lexmin-módszernek nevezzük azt az egyértelmű körzetkiosztó módszert, amely lexikografikusan minimalizálja a körzetek átlagtól való eltérését.

A lexmin módszer tulajdonságai

A lexmin-módszer és minden olyan eljárás, ami figyelembe veszi a VB ajánlását nem Hare-kvóta szerinti és nem mentes sem az Alabama- sem a népességi paradoxontól.

A lexmin eljárás

A lexmin algoritmus

- 1 Először minden megyének kiosztunk l_i , vagy u_i körzetet, attól függően, hogy β_i érték melyik esetében vétetik fel.
- 2 Ha több körzetet osztottunk szét, akkor elveszünk egy körzetet úgy, hogy az átlagtól való eltérés a legkevesbé sérüljön. Addig folytatjuk ezt, amíg a körzetszám H -val nem lesz egyenlő.
- 3 Ha kevesebb körzetet osztottunk szét, akkor hozzáadunk körzetet úgy, hogy az átlagtól való eltérés a legkevesbé sérüljön. Addig folytatjuk ezt, amíg a körzetszám H -val nem lesz egyenlő.

A lexmin eljárás

Példa a lexmin algoritmusra

Legyen $p_1 = 26, p_2 = 27, p_3 = 28, p_4 = 29, p_5 = 91$ és $H = 20$. Ekkor egy átlagos körzet népessége, $A = 10.05$ és a $\delta_i(x)$ a $\frac{p_i - A}{A}$ törtet jelöli.

Megye	Népesség	Kvóta	$\delta_i(l_i)$	$\delta_i(u_i)$	Előzetes
1. megye	26	2.58	0.293	-0.137	3
2. megye	27	2.68	0.343	-0.104	3
3. megye	28	2.78	0.393	-0.071	3
4. megye	29	2.88	0.442	-0.038	3
5. megye	91	9.05	0.006	-0.094	9
Összesen	201				21

(pl $0.293 = (26/2 - 10.05)/10.05$)

A lexmin eljárás

Példa a lexmin algoritmusra

Legyen $p_1 = 26, p_2 = 27, p_3 = 28, p_4 = 29, p_5 = 91$ és $H = 20$. Ekkor egy átlagos körzet népessége, $A = 10.05$ és a $\delta_i(x)$ a $\frac{p_i - A}{x}$ törtet jelöli.

Megye	Népesség	Kvóta	$\delta_i(a_i)$	Eredmény
1. megye	26	2.58	-0.137	3
2. megye	27	2.68	-0.104	3
3. megye	28	2.78	-0.071	3
4. megye	29	2.88	-0.038	3
5. megye	91	9.05	0.131	8
Összesen	201			20

Az MD-tulajdonság a gyakorlatban

Oszthatóság

A gyakorlat azt mutatja, hogy nagyobb körzetszám, ceteris paribus kisebb maximális differenciát eredményez. Ez azért van, mert kis H értékekre túl nagy lesz egy átlagos körzet mérete és kisméretű megyék esetében - amelyek csak néhányszor akkorák mint egy átlagkörzet - oszthatósági problémák léphetnek fel. Speciálisan egy megyére a β_i értéke akkor a legnagyobb, ha l_i -re és u_i re is ugyanolyan távol van A -tól. Formálisan

$$\frac{\frac{p_i}{l_i} - A}{A} = \frac{A - \frac{p_i}{u_i}}{A}.$$

Az MD-tulajdonság a gyakorlatban

Oszthatóság

Az $u_i = l_i + 1$ összefüggést felhasználva kapjuk hogy $d_i = \frac{1}{2l_i+1}$. Így meg lehet határozni a problémás méretű megyéket.

$l_i - u_i$	p_i	β_i
1 – 2	$\frac{4}{3}A$	0.333
2 – 3	$\frac{12}{5}A$	0.200
3 – 4	$\frac{24}{7}A$	0.143
4 – 5	$\frac{40}{9}A$	0.111
5 – 6	$\frac{60}{11}A$	0.091

Az MD-tulajdonság a gyakorlatban

Oszthatóság

Más szavakkal, ha létezik egy megye, amelynek népessége megegyezik az átlagkörzet méretének $\frac{4}{3}$ -ával, akkor függtelenül attól, hogy annak a megyének egy vagy két körzetet osztunk ki az átlagtól való eltérése $\frac{1}{3}$ lesz. Ez nyilván alsó korlát α -ra nézve is. Ezt lényegében csak úgy lehet elkerülni, hogy H -t olyan nagynak választjuk, hogy minden megyére sok ($3+$) körzet jut.

Az MD-tulajdonság a gyakorlatban

Oszthatóság

Legyen i a legkisebb megye és legyen

$$\gamma \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \frac{1}{2l_i+1} & \text{if } l_i \neq 0, \\ \infty & \text{if } l_i = 0. \end{cases}$$

Figyeljük meg, hogy γ felső korlát β -ra, ugyanakkor α és γ között nincs semmilyen nyilvánvaló kapcsolat. Ha pl. lehetőség van a körzeteket egzakt kvóta szerint szétosztani, akkor $\alpha = 0$, de γ bármilyen nagy lehet. A másik oldalról legyen $p_1, p_2 = 200$ és $p_3 = 600$, valamint $H = 7$. Ekkor $\gamma = \frac{1}{3}$, de $\alpha \geq 0.4$.

Új magyar választási törvény (2012)

- A törvény eredeti tervezete szerint két választókörzet közötti méretkülönbség nem haladhatja meg a 10%-ot (extrém esetben 15%-ot).
- Ha a megyehatárokon nem nyúlhatnak át a körzetek lehetetlen 106 körzetet kiosztani, úgy hogy a különbség 30% alatt legyen.
- A végül elfogadott törvény már nem a körzetek közti méretkülönbséget vizsgálja, hanem azt nézi, hogy az egyes körzetek népessége mennyire tér el az átlagtól.
- Mivel a 10 – 15%-os tartományon belül még ilyen kiosztás sem létezik, megemelték a határokat 15 – 20%-ra.

Körzetkiosztás az új választási törvény szerint

Megye	Voters	Körzetek		Eltérés (%)	
		tv.	lexmin	tv	lexmin
Budapest	1 407 470	18	17	1.00	6.95
Baranya	325 943	4	4	5.26	5.26
Bács-Kiskun	438 352	6	6	-5.63	-5.63
Békés	308 471	4	4	-0.38	-0.38
Borsod-Abaúj-Zemplén	567 910	7	7	4.80	4.80
Csongrád	345 945	4	5	11.72	-10.63
Fejér	351 237	5	5	-9.26	-9.26

táblázat: Körzetkiosztás az új választási törvény és a lexmin eljárás szerint

Körzetkiosztás az új választási törvény szerint (folyt.)

Megye	Voters	Körzetek		Eltérés (%)	
		tv.	lexmin	tv	lexmin
Győr-Moson-Sopron	364 894	5	5	-5.73	-5.73
Hajdú-Bihar	439 618	6	6	-5.35	-5.35
Heves	257 490	3	3	10.87	10.87
Jász-Nagykun-Szolnok	324 869	4	4	4.91	4.91
Komárom-Esztergom	255 396	3	3	9.97	9.97
Nógrád	170 463	2	2	10.10	10.10
Pest	973 668	12	12	4.81	4.81

táblázat: Körzetkiosztás az új választási törvény és a lexmin eljárás szerint

Körzetkiosztás az új választási törvény szerint (folyt.)

Megye	Voters	Körzetek		Eltérés (%)	
		tv.	lexmin	tv	lexmin
Somogy	268 844	4	4	-13.18	-13.18
Szabolcs-Szatmár-Bereg	450 556	6	6	-3.00	-3.00
Tolna	196 751	3	3	-15.28	-15.28
Vas	215 773	3	3	-7.09	-7.09
Veszprém	300 081	4	4	-3.09	-3.09
Zala	242 236	3	3	4.30	4.30
Total	8 205 967	106	106		

táblázat: Körzetkiosztás az új választási törvény és a lexmin eljárás szerint

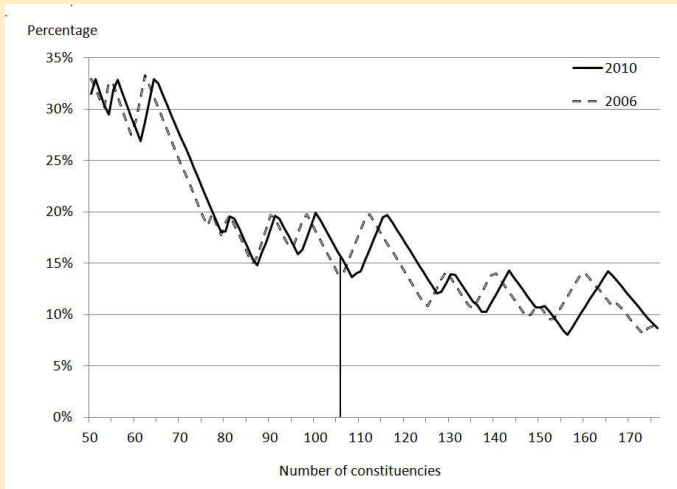
Körzetkiosztás az új választási törvény szerint

Megjegyzések

Csongrád megyéhez a törvény 4 körzetet rendel, így egy átlagos körzet mérete Csongrádban 86 486 fő. Tolnában ugyanakkor egy átlagos körzet mérete 65 583 fő. Így Tolna megye szavazói 31.87%-kal több befolyással rendelkeznek, mint Csongrád megye lakosai. Ha azt is figyelembe vesszük, hogy egy megyén belül is ingadoznak a körzetek méretei, az eltérés még nagyobb lesz.

Maximális differencia különböző parlament méretek esetén

Max. eltérés a körzetek számának függvényében



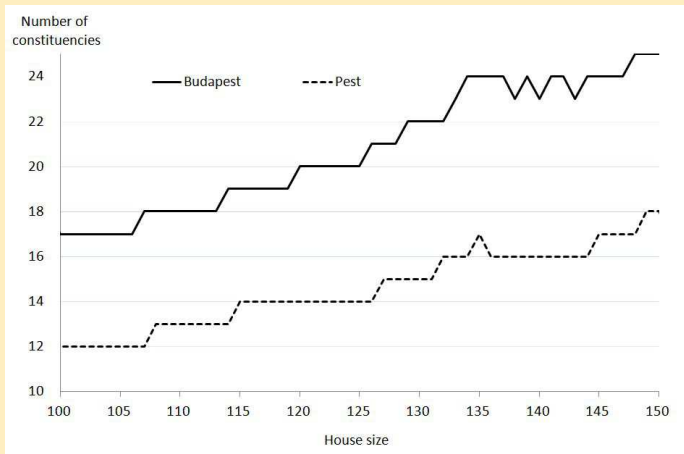
Maximális differencia különböző parlament méretek esetén

Megjegyzések

- Az $[50, 400]$ tartományban két eset kivételével (87 és 88 körzet esetén) $\alpha = \beta$ teljesült.
- Ez azt mutatja, hogy ha be akarjuk tartani a VB ajánlását, akkor a legkisebb megyének is legalább 3 körzetet kell kapnia.
- Demográfiai változások következtében, α -nak a lokális minimumhelye eltolódott 106 körzetről 108 körzetre. Előfordulhat, hogy néhány év elteltével a 106 körzetszá α -nak a lokális maximuma lesz. Erre megoldást jelenthet, ha a körzetszámot nem fixáljuk, hanem egy intervallumból választjuk.

Alabama-paradoxon a lexmin eljárással

Az Alabama-paradoxon előfordulása Budapest és Pest megye esetében



Alabama-paradoxon a lexmin eljárással

Megjegyzések

- A nagy méretű megyék pufferként működnek, ahová a felesleges körzeteket le lehet rakni, vagy ahonnan körzeteket kölcsön lehet venni, anélkül, hogy a max. differencia sérülne.
- Az Alabama-paradoxon csak a két legnagyobb megyében fordul elő, ill. magasabb körzetszámok esetén a harmadik legnagyobb Borsod-Abaúj-Zemplén megyében.

A maximális differencia csökkentése

Régiók szerinti felosztás

Régió	Szavazók	#Körzetek		Max. elt. (%)	
		tv.	lexmin	tv.	lexmin
É-Magyaró.	995 863	12	13	10.87	1.05
É-Alföld	1 215 043	16	16	5.35	1.90
D-Alföld	1 092 768	14	14	11.72	0.83
Közép-Magyaró.	2 381 138	30	30	4.81	2.53
Közép-Dunántúl	906 714	12	12	9.97	2.40
Nyugat-Dunántúl	822 903	11	11	7.09	3.37
Dél-Dunántúl	791 538	11	10	15.28	2.25
Összesen	8 205 967	106	106		

A maximális differencia csökkentése

Megjegyzések

Észak-Magyarország Borsod-Abaúj-Zemplén, Heves és Nógrád megyéből áll. A törvény alapján 7,3 és 2 körzet jutna rájuk, összesen 12. Heves megye esetében a legnagyobb az átlagtól való eltérés: 10.87%.

Ugyanakkor, ha ezt a három régiót egy adminisztratív egységként kezeljük, akkor 13 körzet jut rájuk, egy körzet nagysága 76 605 fő lesz, ami csak 3.37%-ban tér el az átlagos körzetnagyságtól.

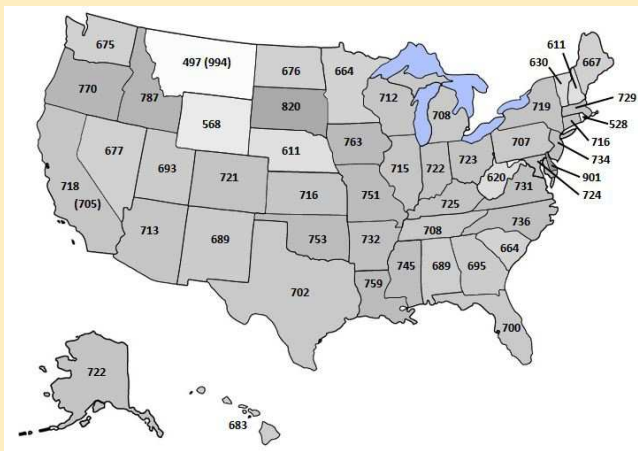
Összefoglalás

Konklúzió

- Fontos lenne törvényben rögzíteni a körzetkiosztó eljárást (a politikai manipulációkat mellőzendő).
- Hogy a törvényben rögzített 15 – 20%-os határt a jövőben is biztosan tartani lehessen, érdemes lenne
 - a parlament méretét megnövelni,
 - vagy a megyék helyett a régiók által kijelölt adminisztrációs határokat figyelembe venni,
 - vagy a körzetek számát egy intervallumból választani.
- A 20%-os határ betartása mellett a szavazók közötti befolyás-különbség akár 50%-os is lehet.

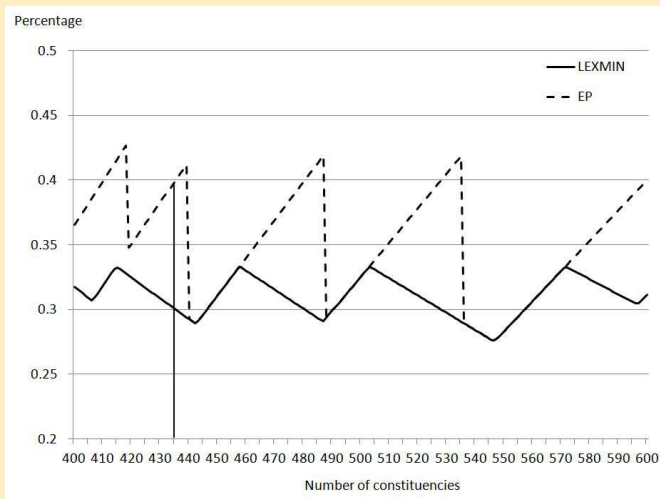
Választóközrzetek az USA-ban

Az USA választóközrzetek mérete (ezer fő)



Választóközetek az USA-ban

A maximális eltérés alakulása az Amerikai képvislőház esetében



Választóközrtek az USA-ban

A Velencei Bizottság ajánlása

Ez a 10 – 15%-os limit biztosítja azt, hogy a szavazók befolyása között ne legyen túl nagy ingadozás. Az új választási törvény értelmében egy körzet népessége sem térhet el 15 – 20%-kal jobban az átlagtól. Ugyanakkor már egy 20%-os limit esetében is akár 50%-kal is eltérhet a szavazói befolyás. Jelenleg az USA-ban Rhode Island szavazói 88%-kal több befolyással bírnak, mint Montana szavazói.

Választóközetek az USA-ban

Megjegyzések

- Ahogy arra számítani lehetett a lexmin algoritmus esetében a maximális eltérés sosem lépi át a 33.33%-ot, az EP esetében viszont nincs ilyen határ.
- Figyelembe véve, hogy 50 állam között kell szétosztani a képviselői helyeket, a képviselőház jelenlegi mérete kicsinek mondható (7 olyan állam is van amely csak egy körzetet kap). Rhode Island és Montana szavazóinak befolyása között 88% eltérés van!
- Ahhoz, hogy az átlagtól való eltérést 20% alá csökkentsük meg kéne duplázni a képviselőház méretét.

Irodalom

- Péter Biró, Balázs Sziklai, and László Á. Kóczy. 'Választóközetek igazságosan?' Közgazdasági Szemle 59.11 (2012): 1165.
- Péter Biró, László Á. Kóczy, and Balázs Sziklai. 'Fair apportionment in the view of the Venice Commission's recommendation' Mathematical Social Sciences 77 (2015): 32-41.