

Játékelmélet és hálózati alkalmazásai 6.ea

Csercsik Dávid

ITK PPKE

- 1 CSC Core, Balancedness
- 2 Kitüntetett értékek CFF kooperatív játékokban
 - A Shapley-érték
 - A Nukleólusz
- 3 Partartíciós függvény formájú játékok
 - Definíció
 - Stabilitás

CSC Core

P - partíció: Páronként diszjunkt részhalmazok uniója, ami lefedi N -t.

Pl: $n=6$ -ra egy lehetséges partíció: $\{1, 3\}, \{2\}, \{4, 5, 6\}$

(x, P) - kimenetel (outcome)

Lényeg: Nem csak a nagykoalíció esetén létrejövő kifizetésvektorok stabilitását vizsgáljuk, mint eddig.

CSC

$$CSC = (x, P) \left\{ \begin{array}{l} x(S) \leq v(S) \quad \forall S \in \mathcal{P} \\ x(S) \geq v(S) \quad \forall S \subseteq N \end{array} \right\}$$

Első feltétel: A létrejövő koalíciók értékét osztjuk szét a koalíción belül (illetve nem osztunk szét többet).

CSC Core - Example

$v\{\emptyset\} = 0$	$v\{1\} = 2$	$v\{1, 2\} = 4$	$v\{1, 2, 3\} = 6$
	$v\{2\} = 0$	$v\{1, 3\} = 4$	
	$v\{3\} = 1$	$v\{2, 3\} = 5$	

Klasszikus core fogalom: A nagykoalíció értékét akarjuk szétosztani ($x_1 + x_2 + x_3 \leq 6$), úgy hogy mindenki elégedett legyen:
kell:

$x_1 \geq 2$	$x_1 + x_2 \geq 4$	$x_1 + x_2 + x_3 \geq 6$
$x_2 \geq 0$	$x_1 + x_3 \geq 4$	
$x_3 \geq 1$	$x_2 + x_3 \geq 5$	

$$\rightsquigarrow 2(x_1 + x_2 + x_3) \geq 13 \Leftrightarrow x_1 + x_2 + x_3 \leq 6$$

CSC Core - Example 2

Tekintsük másrésről az $\{1\}, \{2, 3\}$ partíciót!

A CSC core értelmében $x_1 \leq 2$, $x_2 + x_3 \leq 5$.

Legyen $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 2$

Ekkor $x(S) \geq v(S) \quad \forall S \subseteq N$ mivel teljesül hogy

$x_1 \geq 2$	$x_1 + x_2 \geq 4$	$x_1 + x_2 + x_3 \geq 6$
$x_2 \geq 0$	$x_1 + x_3 \geq 4$	
$x_3 \geq 1$	$x_2 + x_3 \geq 5$	

Balancedness

Emlékeztető - a mag LP:

$$\begin{aligned} \min_x \quad & \mathbf{e}^N x \\ & \mathbf{e}^S x \geq v(S) \quad S \in \mathcal{N} \\ & x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

(Duál) LP - Linear Program

$$\left\{ \max \sum_{S \neq \emptyset} \lambda_S v(S) \quad \text{st.} \quad \sum \lambda_S \mathbf{e}^S = \mathbf{e}^N \quad \lambda_S \geq 0 \right\}$$

ahol $\mathbf{e}^S \in \{0, 1\}^N$ - koalíciós indikátorvektor.

Balancedness II

IP - Integer Program

$$pv(N) = \{ \max \sum_{s \neq \emptyset} \lambda_s v(S) \quad st. \quad \sum \lambda_s \mathbf{e}^S = \mathbf{e}^N \quad \lambda_s \in \{0, 1\} \}$$

$$x(N) \stackrel{?}{\geq} \max LP \geq \max IP \stackrel{\circ}{=} pv(N) \geq v(N)$$

Az utolsó és a 2. egyenlőtlenség mindig igaz ($\lambda = \mathbf{e}^N$, illetve relaxáció)

Ha az első egyenlőtlenség igaz akkor a játék kiegyensúlyozott. Ekkor $CSC \neq \emptyset$

Kapcsolat a szuperadditivitással: Ha van olyan partíció ahol $x(N) > v(N)$ biztos hogy nem szuperadditív a játék (a 2 szóbanforgó partíció nagykoalícióvá történő összeolvadásánál valamely lépésben sérül a tulajdonság)

Balancedness III

pl. (LP)

A	B	C	D	E	F	v
1	1	1	0	0	0	2
0	0	0	1	1	1	4
1	1	0	0	0	0	2
0	1	1	0	0	0	2
1	0	1	0	0	0	2

Az optimum itt: $\lambda_{\{i,j\}} = 1/2$ ha $i, j \in \{A, B, C\}$ és $\lambda_{\{D,E,F\}} = 1$. Ekkor $\sum_{s \neq \emptyset} \lambda_s v(S) = 3\frac{1}{2} \cdot 2 + 4 = 7$ és teljesül hogy

$$\lambda_{\{A,B\}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_{\{A,C\}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_{\{B,C\}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_{\{D,E,F\}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\rightsquigarrow$ A játék nem kiegyensúlyozott, hiszen pl $\{A\}\{B, C\}\{D, E, F\}$ esetén maximális $x(N)$ (=6) de $6 < 7$.

Shapley-axiómák

Szeretnénk egy ϕ értékelési függvényt ami egy karakterisztikus fv. formájú játék esetében (tíh n játékos van) értékeli a játékosok 'erejét'. $\phi(v) : \mathfrak{V} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ahol $v \in \mathfrak{V}$ egy kar. fv. ($\mathfrak{V}$ a kar fv-k halmaza) Tekintsük a következő axiómákat (ezeket kellene hogy teljesítse):

- Hatékonyság: $\sum_{i \in N} \phi(i) = v(N)$
- Szimmetria: Ha i és j olyanok hogy $v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\})$ ($\forall S$) ($i, j \notin S$), akkor $\phi_i(v) = \phi_j(v)$.
- Dummy: Ha i olyan hogy $v(S \cup \{i\}) = v(S)$ ($\forall S$) ($i \notin S$), akkor $\phi_i(v) = 0$
- Additivitás: Ha u és v karakterisztikus fv-k, akkor legyen $\phi(u + v) = \phi(u) + \phi(v)$ ($u + v$ is kar. fv).

Shapley-érték

Súlyozott szavazási játék

Példa

4 játékos: A, B, C és D. A szavazati súlyaik rendre 5, 3, 3, 1. Csak olyan határozat fogadható el, ahol a támogatók összsúlya legalább 6. Számoljuk ki a szavazási befolyásukat!

Shapley-érték

Motiváció

A játékosok egyenként, véletlenszerű sorrendben érkeznek. Minden játékos megkapja 'fizetségképpen' a hozzájárulását az adott koalícióhoz. A Shapley érték (ϕ) a hozzájárulások várható értéke tekintve az összes lehetséges sorrendet, ahol minden sorrend egyaránt valószínű.

Shapley-érték

Definíció

Minden $i \in N$ és $S \subseteq 2^N$ esetén, ahol $i \notin S$, az i játékos **határhozzájárulása az S koalícióhoz**

$$m_i(S) = v(S \cup \{i\}) - v(S)$$

A Shapley-érték:

$$\phi_i(v) = \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} \frac{|S|!(n - |S| - 1)!}{n!} m_i(S)$$

Megoldás

Shapley-érték

ABCD	BACD	CABD	DABC
ABDC	BADC	CADB	DACB
ACBD	BCAD	CBAD	DBAC
ACDB	BCDA	CBDA	DBCA
ADBC	BDAC	CDAB	DCAB
ADCB	BDCA	CDBA	DCBA

A játékosok $4! = 24$ féle sorrendben érkezhetnek.

Megoldás

Shapley-érték

ABCD	BACD	CABD	DABC
ABDC	BADC	CADB	DACB
ACBD	BCAD	CBAD	DBAC
ACDB	BCDA	CBDA	DBCA
ADBC	BDAC	CDAB	DCAB
ADCB	BDCA	CDBA	DCBA

Az A játékos összesen 10-szer volt kritikus.

Megoldás

Shapley-érték

A B CD	BACD	CABD	DABC
A B DC	BADC	CADB	DACB
ACBD	BCAD	C B AD	DBAC
ACDB	BCDA	C B DA	DBCA
ADBC	BDAC	CDAB	DCAB
ADCB	BDCA	CD B A	DC B A

A B játékos összesen 6-szor volt kritikus. Értelmszerűen a C játékos is ennyiszer.

Megoldás

Shapley-érték

ABCD	BACD	CABD	DABC
ABDC	BADC	CADB	DACB
ACBD	BCAD	CBAD	DBAC
ACDB	BCDA	CBDA	DBCA
A ^D BC	BDAC	CDAB	DCAB
A ^D CB	BDCA	CDBA	DCBA

A D játékos összesen 2-szer volt kritikus.

Megoldás

Shapley-érték

$$A = \frac{10}{24}, \quad B = \frac{6}{24}, \quad C = \frac{6}{24}, \quad D = \frac{2}{24}$$

A Shapley-érték ebben a példában egybeesett a Banzhaf-indexszel, de ez általában nincs így.

Súlyozott szavazási játék (régebbi példa)

A régebbi példa

Az EU tanácsstagok Shapley-értéke

Súlyozott szavazási játék (régebbi példa)

A régebbi példa

Az EU tanácsstagok Shapley-értéke

Ország	Súly	$\phi_i(v)$
Németország	4	0.2333
Olaszország	4	0.2333
Franciaország	4	0.2333
Hollandia	2	0.15
Belgium	2	0.15
Luxemburg	1	0

(vö: ez már eltér a Banzhaf-indextől)

Költségjáték Shapley értéke

$$v(S) = -c(S)$$

pl taxi költségének szétosztása:

A játékosok $3! = 6$ féle sorrendben érkezhetnek.

$c(A)$	80
$c(B)$	56
$c(C)$	70
$c(\{AB\})$	80
$c(\{AC\})$	85
$c(\{BC\})$	72
$c(\{ABC\})$	90

Sorrend	m_A	m_B	m_C
ABC	80	0	10
ACB	80	5	5
BAC	24	56	10
BCA	18	56	16
CAB	15	5	70
CBA	18	2	70
	39.1667	20.667	30.1667

Költségjáték Shapley értéke 2

$$\phi_i(v) = \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} \frac{|S|!(n - |S| - 1)!}{n!} m_i$$

alapján.

Pl:

$$\phi_B(v) = \underbrace{\frac{1!(1!)}{3!}0}_A + \underbrace{\frac{1!(1!)}{3!}2}_C + \underbrace{\frac{0!(2!)}{3!}56}_{\emptyset} + \underbrace{\frac{2!(1!)}{3!}5}_{AC} = 20.667$$

A Nukleólusz I

Profit

Legyen $x \in \mathbb{R}^n$ egy szétosztás, ekkor S koalíció profitja (excess)

$$e(S, x) \stackrel{\circ}{=} x(S) - v(S)$$

A Nukleólusz I

Profit

Legyen $x \in \mathbb{R}^n$ egy szétosztás, ekkor S koalíció profitja (excess)

$$e(S, x) \stackrel{\circ}{=} x(S) - v(S)$$

Profitvektor

Egy adott $x \in \mathbb{R}^n$ elosztásvektorhoz, tartozik egy $\theta(x) \in \mathbb{R}^{2^n-2}$ profitvektor, ami a $2^n - 2$ profitot tartalmazza (az N -hez és a $\emptyset$ -hez tartozó triviális profitokat nem tekintjük). Illetve egy $\theta^*(x)$, melyben a profitok nem-csökkenő sorrendben követik egymást.

A Nukleólusz - példa

$$v(\{1, 2, 3\}) = 42, \quad v(\{1, 2\}) = 20, \quad v(\{1, 3\}) = 30, \\ v(\{2, 3\}) = 40, \quad v(\{i\}) = 0 \quad \forall i \in N$$

$$x = (14, 14, 14) \rightarrow \theta(x) = [8 \quad -2 \quad -12 \quad 14 \quad 14 \quad 14] \rightarrow \\ \rightarrow \theta^*(x) = [-12, -2, 8, 14, 14, 14]$$

(A legrosszabbul járó koalíció $\{2, 3\}$)

A Nukleólusz - példa

$$v(\{1, 2, 3\}) = 42, \quad v(\{1, 2\}) = 20, \quad v(\{1, 3\}) = 30, \\ v(\{2, 3\}) = 40, \quad v(\{i\}) = 0 \quad \forall i \in N$$

$$x = (14, 14, 14) \rightarrow \theta(x) = [8 \quad -2 \quad -12 \quad 14 \quad 14 \quad 14] \rightarrow \\ \rightarrow \theta^*(x) = [-12, -2, 8, 14, 14, 14]$$

(A legrosszabbul járó koalíció $\{2, 3\}$)

Ötlet: Keressük meg azt az elosztást, ahol a legrosszabbul járó a lehető legjobban jár!

A Nukleólusz - példa

$$v(\{1, 2, 3\}) = 42, \quad v(\{1, 2\}) = 20, \quad v(\{1, 3\}) = 30, \\ v(\{2, 3\}) = 40, \quad v(\{i\}) = 0 \quad \forall i \in N$$

$$x = (14, 14, 14) \rightarrow \theta(x) = [8 \quad -2 \quad -12 \quad 14 \quad 14 \quad 14] \rightarrow \\ \rightarrow \theta^*(x) = [-12, -2, 8, 14, 14, 14]$$

(A legrosszabbul járó koalíció $\{2, 3\}$)

Ötlet: Keressük meg azt az elosztást, ahol a legrosszabbul járó a lehető legjobban jár!

$$\text{Nézzük pl. } y = (4, 24, 14) \rightarrow \theta(y) = [8 \quad -12 \quad -2 \quad 4 \quad 24 \quad 14] \rightarrow \\ \rightarrow \theta^*(y) = [-12, -2, 4, 8, 14, 24] \rightsquigarrow \text{Ez rosszabb! A 3-ik helyen álló } 8 > 4 \text{ (előtte egyenlőek), ezért azt fogjuk mondani hogy } x \succ y$$

A Nukleólusz - példa

$$v(\{1, 2, 3\}) = 42, \quad v(\{1, 2\}) = 20, \quad v(\{1, 3\}) = 30, \\ v(\{2, 3\}) = 40, \quad v(\{i\}) = 0 \quad \forall i \in N$$

$$x = (14, 14, 14) \rightarrow \theta(x) = [8 \quad -2 \quad -12 \quad 14 \quad 14 \quad 14] \rightarrow \\ \rightarrow \theta^*(x) = [-12, -2, 8, 14, 14, 14] \\ \text{(A legrosszabbul járó koalíció } \{2, 3\})$$

Ötlet: Keressük meg azt az elosztást, ahol a legrosszabbul járó a lehető legjobban jár!

$$\text{Nézzük pl. } y = (4, 24, 14) \rightarrow \theta(y) = [8 \quad -12 \quad -2 \quad 4 \quad 24 \quad 14] \rightarrow \\ \rightarrow \theta^*(y) = [-12, -2, 4, 8, 14, 24] \rightsquigarrow \text{Ez rosszabb! A 3-ik helyen álló } 8 > 4 \text{ (előtte egyenlőek), ezért azt fogjuk mondani hogy } x \succ y$$

$$z = (4, 14, 24) \rightarrow \theta(z) = [-2 \quad -2 \quad -2 \quad 4 \quad 14 \quad 24] \\ \rightarrow \theta^*(z) = (-2, -2, -2, 4, 14, 24)$$

$$z = NC(N, V)$$

A Nukleólusz II

Nukleolusz

A nukleolusz az az $x \in \mathbb{R}_+^n$ elosztás, ami lexikografikusan maximalizálja $\theta(x)$ -et $I(N, v)$ felett, ahol $I(N, v)$ jelöli az elosztások (imputációk) halmazát.

A Nukleólusz II

Nukleolusz

A nukleolusz az az $x \in \mathbb{R}_+^n$ elosztás, ami lexikografikusan maximalizálja $\theta(x)$ -et $I(N, v)$ felett, ahol $I(N, v)$ jelöli az elosztások (imputációk) halmazát.

Definíció

Legyen $\theta^*(x)$ azon permutációja a $\theta(x)$ vektornak, melyben a vektor elemei növekvő sorrendben követik egymást.

Azt mondjuk hogy $\theta(x)$ is leximin superior $\theta(y)$ -hoz képest ($\theta(x) \succ \theta(y)$) ha $(\exists k)(\theta^*(x)_i = \theta^*(y)_i)(\forall i < k)$ és $(\theta^*(x)_k > \theta^*(y)_k)$

Az (N, V) játék *nukleólusza*:

$$NC(N, V) = \{x \in X(N, V) : \nexists y \in X(N, V), \quad e(y) \succ e(x)\}$$

A nukleolusz meghatározása geometriai úton

A mag geometriája

A kifizetések n -dimenziós terében az $x(N) = v(N)$ hipersíkon keressük a lehetséges megoldásokat. Az $\text{exc}(S, x) = x(S) - v(S)$ többletek nem-negativitása azt jelenti, hogy az $x(S) \geq v(S)$ félterek által határolt konvex poliéderre szorítkozunk.

A nukleolusz meghatározása geometriai úton

Lexikografikus középpont

Kezdjük el az $x(S) = v(S)$ hipersíkokat (a magot határoló oldalakat) egységnyi sebességgel egymás felé tolni. Ha egy hipersíkot már nem tudunk továbbtolni, mert a megoldások halmaza üressé válna, akkor az adott hipersíkot rögzítjük. Ha a megoldások halmaza egy ponttá zsugorodott megállunk. Az így kapott pont a lexikografikus középpont.

Tétel (Maschler, Peleg, Shapley [1979])

A lexikografikus középpont a nukleolusz.

Csődjáték nukleólusza

Csődjáték: $d_1 = 100$, $d_2 = 200$, $d_3 = 300$, $E = 400$

legyen $x = [66.66 \ 133.33 \ 200]$, $y = [50 \ 125 \ 225]$

$v(1)$	0
$v(2)$	0
$v(3)$	100
$v(\{1,2\})$	100
$v(\{1,3\})$	200
$v(\{2,3\})$	300
$v(\{1,2,3\})$	400

profit	x	y
$e(1)$	66	50
$e(2)$	133	125
$e(3)$	100	125
$e(\{1,2\})$	100	75
$e(\{1,3\})$	66	75
$e(\{2,3\})$	33	50

$$v(S) = E - d(N \setminus S)$$

$$\theta^*(x) : [33 \mid 66 \ 66 \mid 100 \ 100 \mid 133] \quad \theta^*(y) : [50 \ 50 \mid 75 \ 75 \mid 125 \ 125]$$

Nukleólusz: A min legyen max.

Megjegyzések

- A nukleólusz kiszámítása nem konstruktív, és nagyon nehéz is lehet (általában megoldatlan probléma, vannak játéktípusok ahol a megoldás ismert - pl csődjáték)
- Ha a mag nemüres, a nukleólusz mindig a magban van.
- Ha a játék nem konvex, a Shapley érték a magon kívül is eshet.

Partition Function Form Games

PFF Játékok

- N : játékosok halmaza - részhalmazai: koalíciók
- $\Pi(S)$: S partícióinak halmaza. egy eleme: $\mathcal{P}_S$
- CFF játék: (N, v) ahol $v : 2^N \rightarrow \mathbb{R}$
- PFF játék: $V : \Pi \rightarrow (2^N \rightarrow \mathbb{R})$ minden partícióhoz rendel egy karakterisztikus függvényt (ami a koalíciók értékét definiálja az adott partíció esetén)
- Externáliák: Egy K játékosalmaz kooperációja/kompetíciója az $N \setminus K$ beli játékosok (koalíciók) kifizetéseit is befolyásolja.
- PFF game: (N, V)

Szuperadditivitás PFF játékokban Ha $\mathcal{P}$ és $\mathcal{Q}$ partíciók, és $(\forall P \in \mathcal{P})(\exists Q \in \mathcal{Q})(P \subseteq Q)$, azt mondjuk hogy $\mathcal{P}$ egy finomítása (refinement) $\mathcal{Q}$ -nak. Szuperadditivitás: $v(P_1, \mathcal{P}) + \dots + v(P_k, \mathcal{P}) \leq v(Q, \mathcal{Q})$

Alapvető mag koncepciók PFF játékok esetén

Az α -mag (Aumann1960) azt feltételezi hogy egy koalíció csak akkor deviál ha magasabb kifizetést kap, függetlenül a deviálás hatására partíciótól. Az ω -mag (Shenoy1979) megengedőbb: Egy koalíció akkor deviál ha a az így lehetségesen kialakuló partíciók bármelyikében nagyobb kifizetést kap.

Ötlet: Engedjük meg a többi játékosnak hogy a fennmaradó (reziduális) játékban egy mag-stabil partíciót alkossanak: $\rightsquigarrow$ **rekurzív mag**

Reziduális játék

Az α -mag (Aumann1960) azt feltételezi hogy egy koalíció csak akkor deviál ha magasabb kifizetést kap, függetlenül a deviálás hatására partíciótól. Az ω -mag (Shenoy1979) megengedőbb: Egy koalíció akkor deviál ha a az így lehetségesen kialakuló partíciók bármelyikében nagyobb kifizetést kap.

Ötlet: Engedjük meg a többi játékosnak hogy a fennmaradó (reziduális) játékban egy mag-stabil partíciót alkossanak: $\rightsquigarrow$ **rekurzív mag** (Kóczy 2007)

Reziduális játék az $R \subsetneq N$ halmaz felett. $\Pi(S)$: S partíciói. Tegyük fel hogy $\overline{R} = N \setminus R$ megalkotta $\overline{\mathcal{P}}_R \in \Pi(\overline{R})$ -t. Ezesetben az $(R, V_{\overline{\mathcal{P}}_R})$ reziduális játék az a PFF játék az R játékosalmazon, melynek a PFF-je:

$$V_{\overline{\mathcal{P}}_R}(C, \mathcal{P}_R) = V(C, \mathcal{P}_R \cup \overline{\mathcal{P}}_R).$$

Rekurzív mag I

(Pesszimista) Rekurzív mag

Egy játékosra a (pesszimista) rekurzív mag (pRM) triviális. Tegyük fel hogy a pRM-et $C_-(N, V)$ definiáltuk minden játékra $|N| < k$ játékos esetén. Egy $\omega = (x, \mathcal{P})$ kifizetésből és $\mathcal{P} \in \Pi(N)$ partícióból álló párt kimenetelnek hívunk. Jelöljük az (N, V) játék kimeneteleinek halmazát $\Omega(N, V)$ -vel. Ekkor egy $|N|$ játékosból álló játékban az $(x, \mathcal{P})$ kimenetel dominált ha létezik egy Q koalíció, mely megalakíthatja a $\mathcal{P}_Q$ partíciót és egy $y_Q \in \mathbb{R}^Q$ elérhető kifizetés vektor, hogy minden $(y_Q, y_{\overline{Q}}, \mathcal{P}_Q \cup \mathcal{P}_{\overline{Q}}) \in \Omega(N, V)$ -re $y_Q > x_Q$ és ha $C_-(\overline{Q}, V_{\mathcal{P}_Q}) \neq \emptyset$ akkor $(y_{\overline{Q}}, \mathcal{P}_{\overline{Q}}) \in C_-(\overline{Q}, V_{\mathcal{P}_Q})$. A pRM $(C_-(N, V) \text{ of } (N, V))$ a nem dominált kimenetek halmaza.

Itt dominanciánál a megalakuló partíciótól függetlenül (a stabilok közül) kell hogy nagyobb legyen a kifizetés.

Rekurzív mag II

(Optimista) Rekurzív mag

Egy játékosra az (optimista) rekurzív mag (oRM) triviális. Tehgük fel hogy a oRM-et $C_-(N, V)$ definiáltuk minden játékra $|N| < k$ játékos esetén. Egy $\omega = (x, \mathcal{P})$ kifizetésből és $\mathcal{P} \in \Pi(N)$ partícióból álló párt kimenetelnek hívunk. Jelöljük az (N, V) játék kimeneteleinek halmazát $\Omega(N, V)$ -vel. Ekkor egy $|N|$ játékosból álló játékban az $(x, \mathcal{P})$ kimenetel dominált ha létezik egy Q koalíció, mely megalakíthatja a $\mathcal{P}_Q$ partíciót és egy $(y, \mathcal{P}_Q \cup \mathcal{P}_{\overline{Q}}) \in \Omega(N, V)$ kimenetel, amire $y_Q > x_Q$ és ha $C_+(\overline{Q}, V_{\mathcal{P}_Q}) \neq \emptyset$ akkor $(y_{\overline{Q}}, \mathcal{P}_{\overline{Q}}) \in C_+(\overline{Q}, V_{\mathcal{P}_Q})$. Az oRM $C_+(N, V)$ of (N, V) a nem dominált kimenetek halmaza.

Rekurzív mag: példa

$V: V(\{i, j\}, \{k\} = 2, 1), V(\{i, j, k\} = 3)$

Partition	Values
$\{1\}, \{2\}, \{3\}$	0,0,0
$\{1,2\}, \{3\}$	2,1
$\{1,3\}, \{2\}$	2,1
$\{2,3\}, \{1\}$	2,1
$\{1,2,3\}$	3

$\rightsquigarrow V:$

Coalition	Value
$\{1\}$	1
$\{2\}$	1
$\{3\}$	1
$\{1,2\}$	2
$\{1,3\}$	2
$\{2,3\}$	2
$\{1,2,3\}$	3

Rekurzív mag: példa II

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5\}, V;$$

$$V(123, 4, 5) = (10, 1, 1),$$

$$V(123, 45) = (0, 5),$$

$$V(12, 3, 4, 5) = (0, 1, 0, 0),$$

$$V(12, 3, 45) = (0, 1, 0),$$

$$V(1, 2, 3, 45) = (0, 0, 1, 0),$$

$$V(12, 345) = (5, 0),$$

$$V(1, 2, 345) = (1, 1, 8),$$

minden más kifizetés 0

minimális követelés függvény: Az $C = \{1\}$ koalíció kiválásának hatására a $(\{2, 3, 4, 5\}, V_{\{1\}})$ reziduális játék egyetlen stabil partíciója a $\tilde{P} = \{\{2\}, \{3, 4, 5\}\} \in \mathcal{P}(\{2, 3, 4, 5\})$. Így, az első játékos értéke $V(\{1\}, \tilde{P} \cup \{1\}) = 1$, vagyis $v^{mc}(1) = 1$.

Rekurzív mag: példa II/2

Hasonlóképpen:

C	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{4\}$	$\{5\}$	$\{1,2\}$	$\{4,5\}$	$\{1,2,3\}$	$\{3,4,5\}$
$v^{mc}(C)$	1	1	1	1	1	0	0	0	0

Ekkor egy rekurzív mag beli elemre igaznak kell lennie hogy minden koalíció legalább az értékének megfelelő kifizetést kap:

$x^1, x^2, x^3, x^4, x^5 \geq 1$. Ez két stabil partícióhoz vezet: $P_1 = \{\{1, 2, 3\}, \{4\}, \{5\}\}$ ahol a teljes kifizetés 12 és $P_2 = \{\{1\}, \{2\}, \{3, 4, 5\}\}$ ahol 10.

Rekurzív mag: példa III

$V(1234) = (8)$, $V(1, 2, 3, 4) = (1, 1, 1, 1)$, $V(ij, k, l) = (0, 4, 4)$, $V(ijk, l) = (6, 1)$,
 $V(ij, kl) = (6, 6)$ ahol $\{i, j, k, l\} = N$.

A $((2, 2, 2, 2), \{N\})$ kimenetelt szigorúan dominálja a $((3, 3, 3, 3), \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\})$, de immunis a koalícionális kiválásokra, hiszen ha pl. az $\{1, 2\}$ kiválik, a $\{3, 4\}$ rögtön szétválik 2 singleton-ra.