

Játékelmélet és hálózati alkalmazásai 5. ea

Csercsik Dávid

ITK PPKE

- 1 Kooperatív játékok
 - A karakterisztikus függvény definíciója
 - TU CFF játékok tulajdonságai
 - A mag
- 2 Csőd-Probléma
- 3 Költségjátékok
 - Definíció
 - Repülőtér játék

Kooperatív játékelmélet

Átruházható hasznosságú (TU) játékok

- Adott n játékos, akik összefoghatnak egymással.
- Az a játékoscsoport, amely együtt cselekszik ún. koalíciót alkot.
- Különböző koalíciók különböző hasznossági szintet érhetnek el.
- A koalíciók hasznossága egymással összehasonlítható.

Koalíció alakítás

Példa

a, b, c és d játszanak

⇒ 16 féle képpen alakíthatnak koalíciót.

Koalíció alakítás

Példa

a, b, c és d játszanak

⇒ 16 féle képpen alakíthatnak koalíciót.

Lehetséges koalíciók

üres halmaz $\{\emptyset\}$	$\{a\}$	$\{a, b\}$	$\{a, b, c\}$	nagykoalíció $\{a, b, c, d\}$
	$\{b\}$	$\{a, c\}$		
	$\{c\}$	$\{a, d\}$		
	$\{d\}$	$\{b, c\}$		
		$\{b, d\}$		
		$\{c, d\}$	$\{a, b, d\}$	
			$\{a, c, d\}$	
			$\{b, c, d\}$	

Koalíció alakítás

Példa

a, b, c és d játszanak

⇒ 16 féle képpen alakíthatnak koalíciót.

Lehetséges koalíciók

üres halmaz $\{\emptyset\}$	$\{a\}$	$\{a, b\}$	$\{a, b, c\}$ $\{a, b, d\}$ $\{a, c, d\}$ $\{b, c, d\}$	nagykoalíció $\{a, b, c, d\}$
	$\{b\}$	$\{a, c\}$		
	$\{c\}$	$\{a, d\}$		
	$\{d\}$	$\{b, c\}$		
		$\{b, d\}$		
		$\{c, d\}$		

Megfigyelés

Egy n -fős játékban 2^n a lehetséges koalíciók száma.

Átruházható hasznosságú játékok definíciója

Matematikai megközelítés

Egy kooperatív játék karakterisztikus függvény formában egy rendezett pár (N, v) amely áll

- egy játékoshalmazból $N = \{1, 2, \dots, n\}$
- és egy karakterisztikus függvényből $v : 2^N \rightarrow \mathbb{R}$ ahol $v(\emptyset) = 0$.

Átruházható hasznosságú játékok definíciója

Matematikai megközelítés

Egy kooperatív játék karakterisztikus függvény formában egy rendezett pár (N, v) amely áll

- egy játékoshalmazból $N = \{1, 2, \dots, n\}$
- és egy karakterisztikus függvényből $v : 2^N \rightarrow \mathbb{R}$ ahol $v(\emptyset) = 0$.

Koalíciók

A $v(S)$ számon az S koalíció értékét értjük. Ezt az S koalíció minden külső segítség nélkül el tudja érni. A $v(N)$ szám mutatja tehát a játékosok által elérhető összhasznosságot. Ez a 'torta' amit a résztvevők között igazságságosan szét kell osztani.

Egyszerű szavazási játék

Példa

Legyen N egy parlament képviselőinek a halmaza.

Egyszerű szavazási játék

Példa

Legyen N egy parlament képviselőinek a halmaza.

Többségi szavazás

Legyen $S \subseteq N$ egy képviselőcsoport ekkor
 $v(S) = 1$ ha $|S| > \frac{|N|}{2}$ máskülönben $v(S) = 0$

Kérdés

Mekkora 'hatalommal' bír egy képviselő?

Súlyozott szavazási játék

Példa

A Miniszterek Tanácsa az EU egyik legfontosabb döntési szerve. Az 1958-72 periódusban a következő szavazási rendszer volt érvényben:

Súlyozott szavazási játék

Példa

A Miniszterek Tanácsa az EU egyik legfontosabb döntési szerve. Az 1958-72 periódusban a következő szavazási rendszer volt érvényben:

Ország	Súly
Németország	4
Olaszország	4
Franciaország	4
Hollandia	2
Belgium	2
Luxemburg	1
Kvóta	12

Súlyozott szavazási játék

Banzhaf-index

Egy koalíció akkor döntőképes, ha a súlya legalább 12. A Banzhaf index kiszámolásához felírjuk az összes lehetséges koalíciót, majd megvizsgáljuk, hogy egy játékos kilépésével döntőképes marad-e. Egy játékos befolyását úgy kapjuk meg, hogy megszámloljuk, hogy hányszor volt kritikus, majd elosztjuk azzal, hogy az összes játékos összesen hányszor volt kritikus.

Súlyozott szavazási játék

Banzhaf-index

A döntőképes koalíciók (piros színben a kritikus játékosok):

Koalíció	Összsúly	Koalíció	Összsúly
NOHB	12	NOFH	14
NFHB	12	NOFB	14
OFHB	12	NOFL	13
NOHBL	13	NOFHB	16
NFHBL	13	NOFHL	15
OFHBL	13	NOFBL	15
NOF	12	NOFHBL	17

Súlyozott szavazási játék

Banzhaf-index

Összesen 42 alkalommal volt kritikus egy játékos, ebből Németország 10-szer. Azaz Németország befolyása $\frac{10}{42} = 0.238$. A kapott Banzhaf-indexeket a következő táblázat összegzi.

Ország	Súly	β_i
Németország	4	0.238
Olaszország	4	0.238
Franciaország	4	0.238
Hollandia	2	0.142
Belgium	2	0.142
Luxemburg	1	0

bővítés → módosítás, majd Liszaboni szerződés.

Stratégiailag ekvivalens játékok

A játékosok hasznosság-mérési skálájának kezdőpontja és skálaegysége is tetszőleges. Ha az U fv. reprezentálja egy játékos preferenciáit, akkor az $\alpha U + \beta$ is alkalmas a reprezentációra.

Definíció

Az (N, v) játék stratégiailag ekvivalens az (N, w) játékkal ha léteznek olyan $\alpha > 0$ és $\beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{R}$ számok, hogy $w(S) = \alpha v(S) + \sum_{i \in S} \beta_i$
 $\forall S \in \mathcal{N}$

TU CFF játékok tulajdonságai

Az (N, v) játék

Definíció

- *Additív*, ha $v(S) = \sum_{i \in S} v(\{i\}) \quad \forall S \in \mathcal{N}$
- *Szuperadditív*, ha $v(S) + v(T) \leq v(S \cup T)$ áll fenn $\forall$ olyan $S, T \in \mathcal{N}$ -re, amelyre $S \cap T = \emptyset$

TU CFF játékok tulajdonságai

Az (N, v) játék

Definíció

- *Additív*, ha $v(S) = \sum_{i \in S} v(\{i\}) \quad \forall S \in \mathcal{N}$
- *Szuperadditív*, ha $v(S) + v(T) \leq v(S \cup T)$ áll fenn $\forall$ olyan $S, T \in \mathcal{N}$ -re, amelyre $S \cap T = \emptyset$

Definíció

- *Monoton*, ha $S \subseteq T \Rightarrow v(S) \leq v(T) \quad \forall S, T \in \mathcal{N}$
- *0-monoton*, ha $S \subseteq T \Rightarrow v(S) + \sum_{i \in T \setminus S} v(\{i\}) \leq v(T) \quad \forall S, T \in \mathcal{N}$
- *Szimmetrikus*, ha $|S| = |T| \Rightarrow v(S) = v(T) \quad \forall S, T \in \mathcal{N}$
- *Egyszerű*, ha $v(N) = 1$ és $v(S) \in \{0, 1\} \quad \forall S \in \mathcal{N}$

TU CFF játékok tulajdonságai II

Az (N, v) játék

Definíció

- *Konvex*, ha $v(S) + v(T) \leq v(S \cup T) + v(S \cap T) \forall S, T \in \mathcal{N}$

TU CFF játékok tulajdonságai II

Az (N, v) játék

Definíció

- *Konvex*, ha $v(S) + v(T) \leq v(S \cup T) + v(S \cap T) \forall S, T \in \mathcal{N}$

Állítások:

- 1 A konvex játékok halmaza zárt a stratégiai ekvivalenciára nézve (egy játék konv. $\rightsquigarrow$ minden vele strat ekv. játék is konv.).
- 2 v pontosan akkor konvex, ha

$$v(Q \cup \{i\}) - v(Q) \leq v(R \cup \{i\}) - v(R)$$

teljesül minden $i \in N$ -re és $Q \subseteq R \subseteq N \setminus \{i\}$ -re.

(ha a részkoalícióhoz vesszük hozzá i -t, nem növeli meg jobban az értékét, mint ha a teljeshez vennénk)

- 3 v additív $\Rightarrow v$ konvex $\Rightarrow v$ szuperadditív, de az implikációk nem megfordíthatóak

Bizonyítás

Állítás 2 bizonyítása

$\Rightarrow$ irány

$$S := Q \cup \{i\}$$

$$T := R$$

$$S \cup T := R \cup \{i\} \text{ (mert } Q \subseteq R)$$

$$S \cap T := Q$$

$$\text{Tudjuk hogy } v(S) + v(T) \leq v(S \cup T) + v(S \cap T) \rightsquigarrow$$

$$V(Q \cup \{i\}) + V(R) \leq V(R \cup \{i\}) + v(Q)$$

Bizonyítás II

Állítás 2 bizonyítása

$\Leftarrow$ irány

Legyen $S \setminus T = \{i_1, i_2, \dots, i_s\}$, ekkor

$$v((S \cap T) \cup i_1) - v(S \cap T) \leq v(T \cup i_1) - v(T)$$

$$v((S \cap T) \cup i_1 \cup i_2) - v((S \cap T) \cup i_1) \leq v(T \cup i_1 \cup i_2) - v(T \cup i_1)$$

$$\vdots$$

$$v(S) - v((S \cap T) \cup i_1 \cup \dots \cup i_{s-1}) \leq v(S \cup T) - v(T \cup i_1 \cup \dots \cup i_{s-1})$$

egyenlőtlenségeket összeadva kapjuk az kívánt összefüggést.

Konvexitás: Példa

Legyen egy 3 játékosból álló kooperatív játékra

$$v(i) = 3 \quad \forall i \quad v(\{1, 2\}) = 5 \quad v(\{1, 3\}) = 9 \quad v(\{2, 3\}) = 7 \quad v(\{1, 2, 3\}) = 12$$

- Konvex-e a játék? Miért? (2p)
- Szuperadditív-e a játék? Miért? (1p)

MO:

Konvexitás: Példa

Legyen egy 3 játékosból álló kooperatív játékra

$$v(i) = 3 \quad \forall i \quad v(\{1, 2\}) = 5 \quad v(\{1, 3\}) = 9 \quad v(\{2, 3\}) = 7 \quad v(\{1, 2, 3\}) = 12$$

- Konvex-e a játék? Miért? (2p)
- Szuperadditív-e a játék? Miért? (1p)

MO:

- Nem ($S = \{1, 3\}$, $T = \{2, 3\}$):
$$v(S) + v(T) = 9 + 7 = 16 > v(S \cup T) + v(S \cap T) = 12 + 3 = 15$$

Konvexitás: Példa

Legyen egy 3 játékosból álló kooperatív játékra

$$v(i) = 3 \quad \forall i \quad v(\{1, 2\}) = 5 \quad v(\{1, 3\}) = 9 \quad v(\{2, 3\}) = 7 \quad v(\{1, 2, 3\}) = 12$$

- Konvex-e a játék? Miért? (2p)
- Szuperadditív-e a játék? Miért? (1p)

MO:

- Nem ($S = \{1, 3\}$, $T = \{2, 3\}$):
 $v(S) + v(T) = 9 + 7 = 16 > v(S \cup T) + v(S \cap T) = 12 + 3 = 15$
- Nem, $v(\{1\}) + v(\{2\}) = 6 > 5 = v(\{1, 2\})$

Kifizetések

Azt mondjuk hogy az (N, v) játékban az $x = (x_1, \dots, x_n)$ kifizetés-vektor

- *elérhető* az S koalíció számára, ha $\sum_{i \in S} x_i \leq v(S)$
- *elfogadható* az S koalíció számára, ha $\sum_{i \in S} x_i \geq v(S)$
- *előnyösebb* S számára mint az $y = (y_1, \dots, y_n)$ kifizetés vektor, ha minden tagja számára határozottan jobb, azaz $x_i > y_i \quad \forall i \in S$
- *Az S koalíción keresztül dominálja* az $y = (y_1, \dots, y_n)$ kifizetés vektort, ha S számára x elérhető, és előnyösebb mint y (jelölés: $x \succ_S y$)
- *Nem dominált az S koalíción keresztül*, ha nincs olyan az S számára elérhető z kifizetés vektor, amire $z \succ_S x$
- *dominálja az $y = (y_1, \dots, y_n)$ kifizetés vektort* ha $\exists S \ x \succ_S S y$ (jelölés: $x \succ y$)
- *nem dominált* ha egyetlen S koalíción keresztül sem dominált.

Kifizetések II

Állítások

- Az $x \in \mathbb{R}^n$ kifizetés-vektor pontosan akkor elfogadható az S koalíció számára, ha x S -en keresztül nem dominált.
- $\forall S \in \mathcal{N}$ esetén a $\succ_S$ egy szigorú parciális rendezés (azaz aszimmetrikus és tranzitív) a kifizetés-vektorok $\mathbb{R}^n$ halmazán
- A $\succ$ reláció mindig irreflexív, de még egy szupaeradditív játékban sem feltétlenül aszimmetrikus vagy tranzitív.

Kifizetések III

Azt mondjuk hogy az (N, v) játékban az $x = (x_1, \dots, x_n)$ kifizetés-vektor

- *szétosztás* ha $\sum_{i \in N} x_i = v(N)$ (N számára elfogadható és elérhető)
- *elosztás* ha $\sum_{i \in N} x_i = v(N)$ és $x_i \geq v(\{i\}) \quad \forall i \in N$ (individual rationality)
- *mag-elosztás* Ha $\sum_{i \in N} x_i = v(N)$ és $\sum_{i \in S} x_i \geq v(S) \quad \forall S \in \mathcal{N}$ (group rationality)

A mag (The Core) - példa

Egyéni és csoportos racionalitás:

$$\sum_{i \in S} x_i \geq v(S) \quad \forall S \in \mathcal{N}$$

pl. ($v(1) = v(2) = v(3) = 0$):

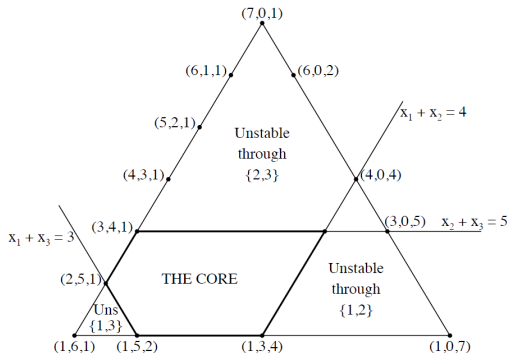
$x(1) \geq 0$	$x(12) \geq v(12)$	$x(123) \geq v(123)$
$x(2) \geq 0$	$x(13) \geq v(13)$	
$x(23) \geq 0$	$x(23) \geq v(23)$	

Ha pl. $v(12) = 90$, $v(13) = 80$, $v(23) = 70$, $v(123) = 135$, a mag (az (123) koalícióra nézve) a kifizetések terében egy háromszög az alábbi csúcsokkal: (65,55,15), (65,25,45), (35,55,45).

A mag (The Core) - 2. példa

$v\{\emptyset\} = 0$	$v\{1\} = 1$ $v\{2\} = 0$ $v\{3\} = 1$	$v\{1, 2\} = 4$ $v\{1, 3\} = 3$ $v\{2, 3\} = 5$	$v\{1, 2, 3\} = 8$
----------------------	--	---	--------------------

$x_1 + x_2 + x_3 = 8$ (hiper)sík.



A mag LP

Definíció

Az $\mathbf{e} \in \{0, 1\}^N$ vektorra azt mondjuk hogy az $S \subseteq N$ koalíció *tagsági vektora*, ha $i \in S$ esetén $e_i^S = 1$ $i \notin S$ esetén pedig $e_i^S = 0$

Adott (N, v) játék esetén tekintsük a következő LP-t:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \quad & \mathbf{e}^N \mathbf{x} \\ & \mathbf{e}^S \mathbf{x} \geq v(S) \quad S \in \mathcal{N} \\ & \mathbf{x} \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

A mag (ha nem üres) mindig egy hipersíkokkal határolt poliéder a kifizetések terében. $\rightsquigarrow$ LP-vel (egyszerűen) eldönthető, üres-e a mag.

A Csőd-Probléma

Alaphelyzet

Egy cég csődbe megy és a hitelezők szeretnék érvényesíteni a követeléseiket. Az általuk követelt összeg meghaladja a cég hátramaradt vagyonát.

Kézenfekvő Kérdés

Hogyan osszuk szét a vagyont a hitelezők között?

Kézenfekvő Válasz?

A válasz azon múlik, mit értünk igazságos szétosztás alatt.

A Csőd-Probléma Matematikai Megközelítése

Definíció

- 1 Legyen $N = \{1, 2, \dots, n\}$ a hitelezők halmaza.
- 2 A **csőd-probléma** egy rendezett pár (c, E) ,
- 3 ahol $E \in \mathbb{R}_+$ a szétosztásra kerülő vagyon
- 4 valamint $c \in \mathbb{R}_+^n$ a követelésvektor, amely teljesíti a $\sum_{i=1}^n c_i > E$ feltételt.

A Csőd-Probléma Matematikai Megközelítése

Definíció

- ❶ Legyen $N = \{1, 2, \dots, n\}$ a hitelezők halmaza.
- ❷ A **csőd-probléma** egy rendezett pár (c, E) ,
- ❸ ahol $E \in \mathbb{R}_+$ a szétosztásra kerülő vagyon
- ❹ valamint $c \in \mathbb{R}_+^n$ a követelésvektor, amely teljesíti a $\sum_i^n c_i > E$ feltételt.

Definíció

A csőd-probléma megoldása egy olyan kifizetésvektor, amelyre $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n$ és ahol $x_i \leq c_i$ minden $i \in N$ -re és amelyre igaz, hogy $\sum_i^n x_i = E$.

A Csőd-játék definíciója

Definíció

A (c, E) csőd-problémához tartozó karakterisztikus függvény

$$v_{(c,E)}(S) = \max\{E - c(N \setminus S), 0\}$$

Értelmezés

A karakterisztikus függvény azt mutatja mekkora összeg marad meg a vagyonból, miután az összes többi hitelező igényét kielégítették, tehát ha a koalíció szempontjából a legrosszabb forgatókönyv valósul meg. Ezt az összeget a koalíció minden pereskedés nélkül megkaphatja, úgymond jár neki.

Rejtvény a Talmudban

Más Szavakkal

Meghal egy ember, és $c_1, c_2, \dots, c_n$ adósságot hagy maga után. Ezeknek az összege meghaladja a hátramaradt vagyont. Hogyan osszuk szét a vagyont a hitelezők között?

Példa a Talmudból

	c_1	c_2	c_3
E/C	100	200	300
100	100/3	100/3	100/3
200	50	75	75
300	50	100	150

A Vitatott Szövet

A híres Mishna

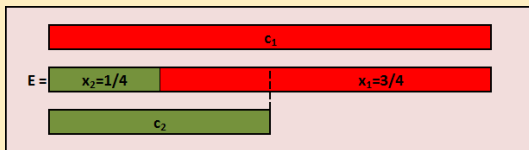
"Ket kereskedő vitatkozik egy szövet tulajdonjogán: az egyik az egészet követeli, a másik a felére tart igényt. Ekkor az első jussa $\frac{3}{4}$, a másiké $\frac{1}{4}$ "

A Vitatott Szövet elv

Mindkét kereskedő odaadja a másiknak a szövetből azt a részt, amelyre nem tart igényt, a maradékot pedig elosztják egyenlően.

A Vitatott Szövet

A felosztás



Definíció

Legyen (c, E) egy csőd-probléma. Egy x megoldást **VSZ-konzisztensnek** mondunk, ha minden $i \neq j$ -re a c_i, c_j követelések között az $x(i) + x(j)$ vagyónrész a Vitatott Szövet elv szerinti felosztása pont $(x(i), x(j))$.

Költségjátékok

Definíció

Legyen N a játékosok halmaza, $c : 2^N \rightarrow \mathbb{R}$ pedig egy költségfüggvény, amely minden játékoskoalícióhoz hozzárendeli a kiszolgálási költségét. Az (N, c) párt **költségjátéknak** hívjuk.

Megjegyzés

A költségjáték nem 'igazi' kooperatív játék, hiszen c nem karakterisztikus függvény. Egy kis átalakítással azonban azzá tehető. Legyen

$$v(S) = \sum_{i \in S} c(i) - c(S)$$

minden $S \subseteq N$ -re. Ekkor az (N, v) párt **megtakarítási játéknak** hívjuk.

Megtakarítási játék

Tulajdonságok

Legyen (N, c) egy költségjáték és (N, v) a hozzá tartozó megtakarítási játék. Ekkor (N, c) szubadditív, azaz

$$(S, T \subseteq N \text{ és } S \cap T = \emptyset) \Rightarrow c(S) + c(T) \geq c(S \cup T)$$

ha (N, v) szuperadditív. Valamint (N, c) konkáv, azaz

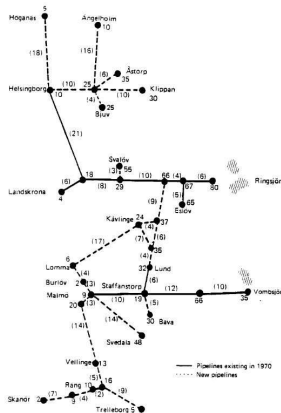
$$c(S) + c(T) \geq c(S \cup T) + c(S \cap T) \text{ minden } S, T \subseteq N\text{-re}$$

ha (N, v) konvex.

Megjegyzések

- A költségjátékok (általában) nemnegatív, monoton és szubadditív játékok.
- A megtakarítási játéknak csak elméleti jelentősége van, a legtöbb esetben egyszerűbb (N, c) -ét vizsgálni.
- Éppen ezért a költségjáték magjáról beszélünk, holott valójában az az anti-magja (és (N, v) magja lenne).
- Hasonlóan néha konkáv költségjátékokra azt mondjuk, hogy konvex.
- Egy koalíció többlete (azaz profitja) az a megtakarítás lesz, amennyivel kevesebbet kell fizetnie, ahhoz, hogy minden tagját kiszolgálják: $\text{exc}(S, x) = c(S) - x(S)$.

Vízvezetékhalózat kiépítése Svédországban



Adott néhány város, amelyek mind csatlakozni szeretnének egy vízforráshoz. Kérdés, hogyan osszák el a vízvezetékhalózat megépítésének költségét?

Repülőter-játék

Alaphelyzet

Adott n repülőgép társaság, amely összefog, hogy megépítsen egy kifutópályát. Az i -edik társaság gépeinek $\sum_{j=1}^i s_j$ hosszú kifutópályára van szüksége, ahol s_j számok mind nem-negatívak. Hogyan osszuk szét igazságosan a kifutópálya megépítésének költségét a repülőgép társaságok között?

Megjegyzés

Hasonló költségjáték lép fel carpooling esetén is, feltéve ha minden újabb beszálló útba esik a legtávolabb lakónak.

Repülőtér-játék

Definíció

Egy $c \in \mathcal{G}^N$ költségjátékot repülőtér játéknak nevezünk, ha minden $S \subseteq N$ -re

$$c(S) = \max_{i \in S} c(i).$$

