

Játékelmélet és hálózati alkalmazásai 4. ea

Csercsik Dávid

ITK PPKE

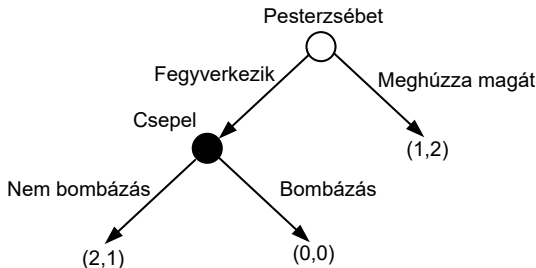
- 1 Játékok extenzív formában
- 2 Részjáték-tökéletes egyensúly
- 3 Stackelberg-játék
- 4 SPNE bináris napirendű szavazási játékokban

- Pesterzsébet és Csepel állandó ellenségeskedésben áll. Csepelnek a múltban sikerült atomfegyvert fejlesztenie, hogy elrettentse Pesterzsébetet a támadástól. Pesterzsébet elszántan fejleszti saját atomfegyverét, de Csepel megfenyegeti, hogy ha folytatja a nukleáris programját, akkor lebombázza (kirobbantva ezzel egy végzetes és költséges regionális konfliktust) Folytatja-e vajon Pesterzsébet a fegyverkezést? Lebombázza-e Csepel Pesterzsébetet, vagy nem váltja be a fenyegetést?

- Pesterzsébet és Csepel állandó ellenségeskedésben áll. Csepelnek a múltban sikerült atomfegyvert fejlesztenie, hogy elrettentse Pesterzsébetet a támadástól. Pesterzsébet elszántan fejleszti saját atomfegyverét, de Csepel megfenyegeti, hogy ha folytatja a nukleáris programját, akkor lebombázza (kirobbantva ezzel egy végzetes és költséges regionális konfliktust) Folytatja-e vajon Pesterzsébet a fegyverkezést? Lebombázza-e Csepel Pesterzsébetet, vagy nem váltja be a fenyegetést?
- Mindenki azonnal hozza ide nekem a pénztárcájában lévő összes pénzt, különben megbuktatom a zh-n!

Extenzív forma I

Eddig olyan játékokat vizsgáltunk, ahol a játékosok egyidejűleg és véglegesen választottak stratégiát (tisztát vagy kevertet). Az extenzív vagy dinamikus játékokban a játékosok egymás után cselekednek.



Koncepciók

- Az üres történet ($\emptyset$): A játék kezdete

Koncepciók

- Az üres történet ($\emptyset$): A játék kezdete
- Terminális (végső) történet (terminal history): Cselekmények (cselekedetek, akciók) sorozata, ami meghatározza mi történhet a játék kezdetétől egy olyan cselekményig, ami a játék végét jelenti.

Koncepciók

- Az üres történet ($\emptyset$): A játék kezdete
- Terminális (végső) történet (terminal history): Cselekmények (cselekedetek, akciók) sorozata, ami meghatározza mi történhet a játék kezdetétől egy olyan cselekményig, ami a játék végét jelenti.
- Az $a^1, a^2, \dots, a^k$ cselekmények résztörténete vagy története (subhistory) - h : Egy $a^1, a^2, \dots, a^m$ (cselekmény) sorozat, ahol $1 \leq m \leq k$.

Koncepciók

- Az üres történet ($\emptyset$): A játék kezdete
- Terminális (végső) történet (terminal history): Cselekmények (cselekedetek, akciók) sorozata, ami meghatározza mi történhet a játék kezdetétől egy olyan cselekményig, ami a játék végét jelenti.
- Az $a^1, a^2, \dots, a^k$ cselekmények résztörténete vagy története (subhistory) - h : Egy $a^1, a^2, \dots, a^m$ (cselekmény) sorozat, ahol $1 \leq m \leq k$.
- Valódi résztörténet (proper subhistory): Olyan résztörténet ami nem egyenlő az egész történettel ($m < k$)

Koncepciók

- Az üres történet ($\emptyset$): A játék kezdete
- Terminális (végső) történet (terminal history): Cselekmények (cselekedetek, akciók) sorozata, ami meghatározza mi történhet a játék kezdetétől egy olyan cselekményig, ami a játék végét jelenti.
- Az $a^1, a^2, \dots, a^k$ cselekmények résztörténete vagy története (subhistory) - h : Egy $a^1, a^2, \dots, a^m$ (cselekmény) sorozat, ahol $1 \leq m \leq k$.
- Valódi résztörténet (proper subhistory): Olyan résztörténet ami nem egyenlő az egész történettel ($m < k$)
- Tehát a fenti játékban terminális történetek: (fegyverkezik, bombázás), (fegyverkezik, nem bombázás), (meghúzza magát)

Koncepciók

- Az üres történet ($\emptyset$): A játék kezdete
- Terminális (végső) történet (terminal history): Cselekmények (cselekedetek, akciók) sorozata, ami meghatározza mi történhet a játék kezdetétől egy olyan cselekményig, ami a játék végét jelenti.
- Az $a^1, a^2, \dots, a^k$ cselekmények résztörténete vagy története (subhistory) - h : Egy $a^1, a^2, \dots, a^m$ (cselekmény) sorozat, ahol $1 \leq m \leq k$.
- Valódi résztörténet (proper subhistory): Olyan résztörténet ami nem egyenlő az egész történettel ($m < k$)
- Tehát a fenti játékban terminális történetek: (fegyverkezik, bombázás), (fegyverkezik, nem bombázás), (meghúzza magát)
- A (fegyverkezik, bombáz) cselekmények résztörténetei: (fegyverkezik, bombázás), (fegyverkezik), $\emptyset$

Definíció

Definíció

Tökéletes információ: Ha minden játékos tökéletesen ismeri a történetet, addig a pontig amikor neki kell cselekednie (tudja hogyan döntöttek a többiek).

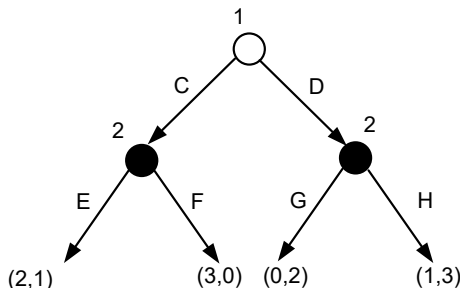
Definíció

Egy tökéletes információs játék extenzív formában a következőkből áll:

- A játékosok egy halmaza
- Egy cselekménysorozat-halmaz (terminális történetek), melyek lehetségesen előállhatnak a játék kezdetétől egy cselekényig ami a játék végét jelenti.
- Egy P játékos-függvény, ami minden olyan cselekménysorozathoz egy játékost rendel, ami egy terminális történet valódi résztörténete. Pl:
 $P(\emptyset) = \text{Pesterzsébet}$, $P(\text{fegyverkezik}) = \text{Csepel}$
- Preferenciák a terminális történetek felett (minden játékos számára) - a kifizetési fv természetesen megad egy preferenciát.

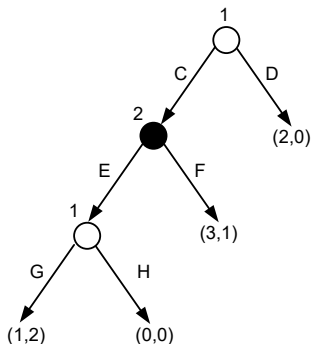
Stratégia

- Egy extenzív formában megadott tökéletes információs játékban az i játékos stratégiája meghatározza, hogy milyen akciót választ bármely olyan történet után, mely után ő következik. Másszóval a stratégia ebben a kontextusban egy akcióterv *minden lehetőség* esetére.
- A következő játékban 1 stratégiahalmaza $\{C, D\}$, míg 2 stratégiahalmaza $\{EG, EH, FG, FH\}$ ('Ha 1 első döntése C akkor E, ha D akkor G', stb)



Stratégia 2

- A következő játékban 2 stratégiárahalmaza $\{E, F\}$, míg 1 stratégiárahalmaza $\{CG, CH, DG, DH\}$



- Ha 1 terve D-t választani a játék kezdetén, akkor is meg kell adnia, mit csinál a C, E történet után! (minden játékosnak minden döntési pontjához meg kell adnia a választását)

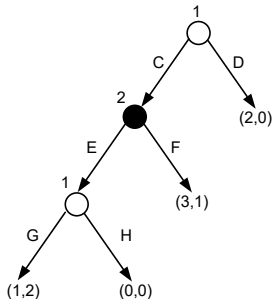
NE extenzív játékokban

- Jelöljön s^* egy stratégiaprofilit, és jelölje $O(s^*)$ azt a terminális történetet, ami s^* esetén előáll. Az extenzív játékban s^* NE akkor ha

$$f_i(O(s^*)) \geq f_i(O(r_i, s_{-i}^*)) \quad \forall r_i \quad \forall i$$

- Hogyan határozzuk meg egy extenzív formában adott játék NEP-ait?
Konvertáljuk stratégiai formára.

NE extenzív játékokban - példa



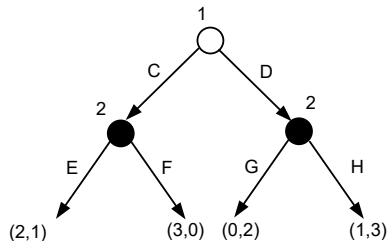
Ebben az átírásban valami furcsa...nem veszi figyelembe a játék szekvenciális struktúráját, és véglegesnek tekinti a stratégiaválasztásokat.

- Pl. (ha a játékosok előre megadják a stratégiáikat) (CH,F) NE - de az első játékos az E történet után tényleg H -t választana?
- Hihető Csepel fenyegetése?
- $\rightsquigarrow$ A NE egy finomítására van szükségünk (SPE).

		2. játékos	
		E	F
1. játékos	CG	(1,2)	(3,1)
	CH	(0,0)	<u>(3,1)</u>
	DG	<u>(2,0)</u>	(2,0)
	DH	<u>(2,0)</u>	(2,0)

Részjátékok (subgames)

- Legyen Γ egy extenzív formában adott tökéletes információs játék, a P játékos-függvénnyel. Γ minden h nemterminális történetére a $\Gamma(h)$ részjáték az az extenzív játék ami a h történet után kezdődik.
- $\Gamma(\emptyset) = \Gamma$, minden más részjáték valódi részjáték.



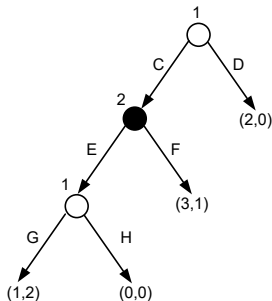
Itt 3 részjáték van: A teljes, illetve a C és D történetet követők.

Részjáték-tökéletes nash Egyensúly

Definíció

Egy s^* stratégiaprofilt Részjáték-tökéletes nash Egyensúly-nak (SPNE) nevezünk, ha nincs olyan részjáték, amiben bármelyik i játékos jobban járna ha s_i^* -től eltérő stratégiát választana.

Példa



(CH, F), (DH, E) - NE (lásd a korábbi táblázatot) de nem SPNE (E után 1 nem fogja H-t választani).
(DG, E) - SPNE.

SPNE és NE, backward induction

- minden SPNE NE, de visszafelé nem igaz
- egy stratégiaprofil, ami minden részjátékra nézve NE, SPNE.

hogyan találjuk meg a SPNE-kat?

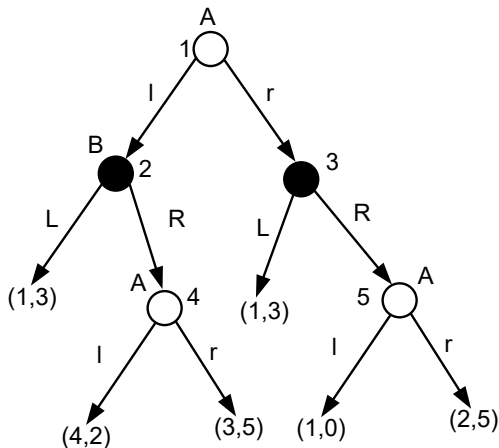
Hátratarató indukció (backward induction)

- 1 Keressük meg azon játékosok (NE értelemben) optimális akcióit, akik az 1 hosszúságú részjátékokban cselekszenek (általános esetben 1 'elágazási pontban' akár többen is dönthetnek)
- 2 Tekintsük fixnek az első pontban meghatározott akciókat, keressük meg a 2 hosszú részjátékok optimális akcióit.
- 3 Folytassuk ezt addig, amíg el nem érjük a játék kezdetét.

(nem feltétlen ad egyértelmű megoldást!)

Példa

Találjuk meg az SPNE-t (-okat?) BI-al!



Néhány eredmény

Állítás

Véges horizontú tökéletes információs extenzív játékok SPNE-jainak halmaza egyenlő azokkal a stratégiahalmazokkal, amiket BI-vel izolálunk

Tétel: Zermelo

Minden véges horizontú tökéletes információs extenzív játéknak van SPNE-a. Ezenfelül, ha egyetlen játékosra nézve sincs két olyan terminális pont, ahol azonos lenne a kifizetése akkor, létezik egyértelmű SPNE ami megkapható BI-al.

Véges, tökéletes információs 2 játékosos win-loose-draw játékokra vagy

- Az egyik játékosnak létezik nyerő stratégiája, vagy

Néhány eredmény

Állítás

Véges horizontú tökéletes információs extenzív játékok SPNE-jainak halmaza egyenlő azokkal a stratégiahalmazokkal, amiket BI-vel izolálunk

Tétel: Zermelo

Minden véges horizontú tökéletes információs extenzív játéknak van SPNE-a. Ezenfelül, ha egyetlen játékosra nézve sincs két olyan terminális pont, ahol azonos lenne a kifizetése akkor, létezik egyértelmű SPNE ami megkapható BI-al.

Véges, tökéletes információs 2 játékosos win-loose-draw játékokra vagy

- Az egyik játékosnak létezik nyerő stratégiája, vagy
- Mindkét játékosnak létezik stratégiája, ami garantálja a döntetlent.

Néhány eredmény

Állítás

Véges horizontú tökéletes információs extenzív játékok SPNE-jainak halmaza egyenlő azokkal a stratégiahalmazokkal, amiket BI-vel izolálunk

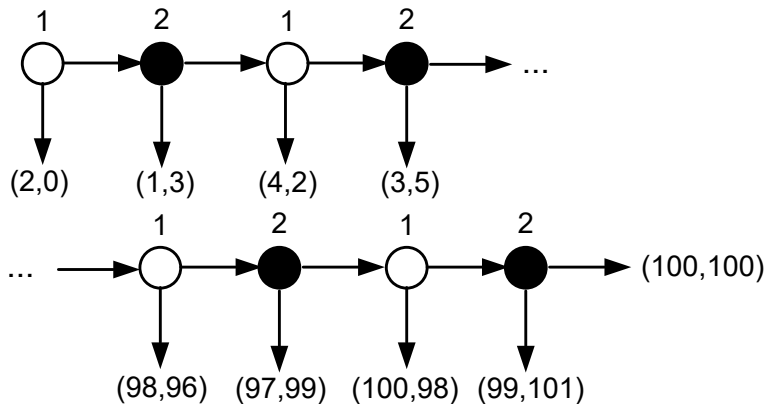
Tétel: Zermelo

Minden véges horizontú tökéletes információs extenzív játéknak van SPNE-a. Ezenfelül, ha egyetlen játékosra nézve sincs két olyan terminális pont, ahol azonos lenne a kifizetése akkor, létezik egyértelmű SPNE ami megkapható BI-al.

Véges, tökéletes információs 2 játékosos win-loose-draw játékokra vagy

- Az egyik játékosnak létezik nyerő stratégiája, vagy
- Mindkét játékosnak létezik stratégiája, ami garantálja a döntetlent.
- $\rightsquigarrow$ A sakk megoldható BI-al!

Centipede game



Cournot-duopólium: emlékeztető

$$f_i(q_1, q_2) = q_i p(q_1, q_2) - C(q_i)$$

$$p(q_1, q_2) = \max\{a - b(q_1 + q_2), 0\} \quad C(q_i) = cq_i, \quad a, b, c > 0, \quad a > c, \quad i = 1, 2$$

Ha az első vállalat kibocsátása q_1 , az első vállalat legjobb válasza erre az

$$f_2(q_2) = q_2(a - b(q_1 + q_2)) - cq_2 = aq_2 - bq_1q_2 - bq_2^2 - cq_2$$

kvadrátikus kifizetésfüggvényt maximalizáló q_2 :

$$\frac{df_2(q_2)}{dq_2} = a - bq_1 - 2bq_2 - c = 0 \quad \rightsquigarrow \quad q_2 = \frac{a - c - bq_1}{2b}$$

Stackelberg-competition

Tegyük fel hogy az első vállalat dönti el először mennyi terméket dob piacra. Ekkor feltételezheti hogy a második vállalat erre reagálva a legracionálisabb döntést hozza (legjobbválasz fv) - lásd a fenti q_2 . Az első vállalat profitja ekkor:

$$f_1(q_1) = q_1 \left(a - b \left(q_1 + \frac{a - c - bq_1}{2b} \right) - c \right)$$

Szélsőérték (szorzatfv deriváltja)

$$\frac{df_1(q_1)}{dq_1} = \left(a - b \left(q_1 + \frac{a - c - bq_1}{2b} \right) - c \right) + q_1 \left(-b + \frac{b}{2} \right) = 0$$

$$a - bq_1 - \frac{a - c}{2} + \frac{bq_1}{2} - c \frac{bq_1}{2} = 0$$

$$q_1 = \frac{a - c}{2b} \stackrel{\circ}{=} q_1^S \quad \rightsquigarrow \quad q_2^S = \frac{a - c}{2b} - \frac{a - c}{4b} = \frac{a - c}{4b} < q_1^S$$

Teljes kibocsátás: $Q^S = q_1^S + q_2^S = \frac{3(a-c)}{4b} > Q^C$

Agenda manipulation

- Bináris napirend (agenda): A bizottsági tagok egyidejűleg szavaznak az első jelöltről: megválasztják vagy elvetik. Ha elvetik, szavaznak a második jelöltről, stb.
- Condorcet-győztes vagy Condorcet jelölt (ha létezik): Aki a napirendtől függetlenül nyer.

Preferenciák pl 3 bizottsági tag, 5 jelölt esetén:

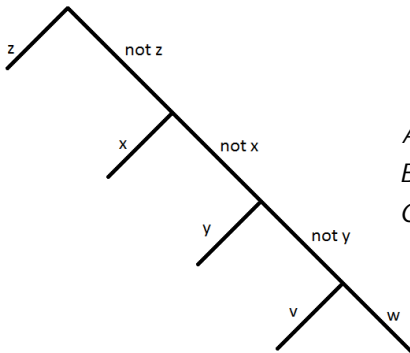
$$A: x \succ y \succ v \succ w \succ z$$

$$B: z \succ x \succ v \succ w \succ y$$

$$C: y \succ z \succ w \succ v \succ x$$

Készítsünk olyan napirendet hogy z-t válasszák meg!

Megoldás



$A : x \succ y \succ v \succ w \succ z$

$B : z \succ x \succ v \succ w \succ y$

$C : y \succ z \succ w \succ v \succ x$