

Játékelmélet és hálózati alkalmazásai 3. ea

Csercsik Dávid

ITK PPKE

1 Az evolúciós játékelmélet alapjai

Történelmi háttér, koncepciók

John Maynard Smith. On Evolution. Edinburgh University Press, 1972.

John Maynard Smith and G. R. Price. The logic of animal conflict. Nature, 246:15-18, 1973.

Alapfeltevések:

- A gének meghatározzák a túlélési képességet (fitness) egy adott környezetben

Történelmi háttér, koncepciók

John Maynard Smith. On Evolution. Edinburgh University Press, 1972.

John Maynard Smith and G. R. Price. The logic of animal conflict. Nature, 246:15-18, 1973.

Alapfeltevések:

- A gének meghatározzák a túlélési képességet (fitness) egy adott környezetben
- A fitness nem mérhető izolált esetben, csak a teljes populáció kontextusában, melynek az adott élőlény is része

Történelmi háttér, koncepciók

John Maynard Smith. On Evolution. Edinburgh University Pres, 1972.

John Maynard Smith and G. R. Price. The logic of animal conflict. Nature, 246:15-18, 1973.

Alapfeltevések:

- A gének meghatározzák a túlélési képességet (fitness) egy adott környezetben
- A fitness nem mérhető izolált esetben, csak a teljes populáció kontextusában, melynek az adott élőlény is része
- Egy élőlény genetikailag meghatározott tulajdonságai és viselkedése $\leftrightarrow$ stratégiák. Fitness $\leftrightarrow$ kifizetés: Azon élőlények stratégiáitól (tulajdonságaitól) függ, melyekkel interakcióba lép

Példa

- 2 fajta bogár: nagy és kicsi.
- A nagyoknak nehezebb fenntartani az anyagcseréjüket: több tápanyag kell.

Egymással versengenek a táplálékért:

- Ha két azonos méretű bogár verseng, egyenlő részt tudnak elérni
- Ha egy nagy verseng egy kicsivel, a nagy kapja a táplálék nagyrészét
- Mindkét esetben a nagy bogár fitness többlete kevesebb a drágább anyagcsere miatt

Példa 2

		2. bogár	
		kicsi	nagy
1. bogár	kicsi	(5,5)	(1,8)
	nagy	(8,1)	(3,3)

A Nash-egyensúlynál azt vizsgáltuk milyen előnyt hozhat egy játékosnak a stratégiájának a megváltoztatása, itt a stratégiaváltozásokat hosszabb időskálán tekintjük, mint olyan hatásokat, melyek az evolúciós erők eredményei.

Példa - megfontolások

- Minden bogarat ismétlődően más bogarakkal párosítunk az élete során.
- Feltesszük hogy elég nagy a populáció ahhoz hogy 1 adott pár ne találkozzon sokszor.
- Egy bogár teljes fitness-e a találkozások során kialakult fitness értékek átlaga.
- A teljes fitness határozza meg a reprodukciós hatékonyságot.

Egy stratégia *evolúciósan stabil* ha abban az esetben ha az egész populáció ezt a stratégiát használja, egy kis behatoló csoport, melynek ettől különböző stratégiája van, kihal több generáció alatt.

Példa 3

Evolúciósan stabil-e a 'kicsi' stratégia?

Tfh. Egy kis x -re a populáció $(1 - x)$ része a 'kicsi' stratégiát használja és x része a 'nagy'-ot (megérkezik a nagy bogarak egy alacsony egyedszámú 'invader' populációja).

- Egy kis bogár várható kifizetése: $1 - x$ valséggel egy másik kis bogárral találkozik ($\rightarrow 5$), x valséggel egy nagy bogárral ($\rightarrow 1$)

$$5(1 - x) + 1x = 5 - 4x$$

- Egy nagy bogár várható kifizetése: $1 - x$ valséggel egy kis bogárral találkozik ($\rightarrow 8$), x valséggel egy másik nagy bogárral ($\rightarrow 3$)

$$8(1 - x) + 3x = 8 - 5x$$

$8-5x > 5-4x$ kicsi x -ekre (itt nagyokra is) $\rightsquigarrow$ a 'kicsi' stratégia nem evolúciósan stabil.

Példa 4

Evolúciósan stabil-e a 'nagy' stratégia?

- Egy nagy bogár várható kifizetése: $1 - x$ valószínűséggel egy másik nagy bogárral találkozik ($\rightarrow 3$), x valószínűséggel egy kis bogárral ($\rightarrow 8$)

$$3(1 - x) + 8x = 3 + 5x$$

- Egy kis bogár várható kifizetése: $1 - x$ valószínűséggel egy nagy bogárral találkozik ($\rightarrow 1$), x valószínűséggel egy másik kis bogárral ($\rightarrow 5$)

$$(1 - x) + 5x = 1 + 4x$$

$3+5x > 1+4x$ kicsi x -ekre (itt nagyokra is) $\rightsquigarrow$ a 'nagy' stratégia evolúciósan stabil.

Példa - megjegyzések

- A (tisztán) kicsi bogarak populációjában a fitness 5, ami nagyobb mint a fitness a nagy bogarak populációjában.

Példa - megjegyzések

- A (tisztán) kicsi bogarak populációjában a fitness 5, ami nagyobb mint a fitness a nagy bogarak populációjában.
- $\sim$ fogolydilemma

Példa - megjegyzések

- A (tisztán) kicsi bogarak populációjában a fitness 5, ami nagyobb mint a fitness a nagy bogarak populációjában.
- $\sim$ fogolydilemma
- A nagy bogarak arányának növekedése felfogható mint a környezet (=többi bogár) egyre (mindenki számára) ellenségesebbé változása

Hasonló, a természetben megfigyelt jelenségek

- Szomszédos fák: ha mindkettő alacsony ugyanannyi napfényt kapnak
- ha mindkettő magas akkor is, de akkor a kifizetésük alacsonyabb (be kell fektetni a magasabb törzsbe)

Hasonló, a természetben megfigyelt jelenségek

- Szomszédos fák: ha mindkettő alacsony ugyanannyi napfényt kapnak - ha mindkettő magas akkor is, de akkor a kifizetésük alacsonyabb (be kell fektetni a magasabb törzsbe)
- Gyökérzet: helybenmarad/felderít (szójababok esetén) - minden növény jobban jár egy olyan populációban ahol mindenki 'helybenmarad', de 'felderít' az evolúciósan stabil

Hasonló, a természetben megfigyelt jelenségek 2

Vírusok:

Martin A. Nowak and Karl Sigmund. Phage-lift for game theory. Nature, 398:367-368, April 1999.

Paul E. Turner and Lin Chao. Prisoner's Dilemma in an RNA virus. Nature, 398:441- 443, April 1999.

$\Phi 6$ fág: baktériumokat fertőz, termékeket állít elő a saját reprodukciójának érdekében

$\Phi H2$ - egy mutációs variánsa. önmagában kevésbé hatékony, de fel tudja használni a $\Phi 6$ által termelt kémiai termékeket $\rightsquigarrow$ fitness előny, ha a környezetében ott van a $\Phi 6$
becslés mérési adatokból:

		2. vírus	
		$\Phi 6$	$\Phi H2$
1. vírus	$\Phi 6$	(1, 1)	(0.65, 1.99)
	$\Phi H2$	(1.99, 0.65)	(0.83, 0.83)

Általános esetben, kapcsolat a NE-al

		2. szervezet	
		S	T
1. szervezet	S	(a,a)	(b,c)
	T	(c,b)	(d,d)

S evolúciósan stabil elég kis x -ekre ha

$$a(1 - x) + bx > c(1 - x) + dx$$

Ha S evolúciósan stabil (S,S) egy Nash-egyensúly

Kapcsolat a NE-al 2

Visszafelé nem igaz:

$\exists$ játék ahol (S,S) NE, de nem evolúciósan stabil

		2. vadász	
		szarvas	nyúl
1. vadász	szarvas	(4,4)	(0,4)
	nyúl	(4,0)	(3,3)

(A szarvast csak együtt tudják megszerezni, ha mindketten nyúlra mennek az nagyobb erőfeszítés)

$\rightsquigarrow$ A (szarvas,szarvas) NE, de nem evolúciósan stabil, mert $a = c$, de $b < d$

Hawk and Dove és kevert stratégiák

		2. állat	
		D	H
1. állat	D	(3,3)	(1,5)
	G	(5,1)	(0,0)

Kevert stratégiák értelmezése:

- Minden egyed szigorúan kötve van egyik vagy másik stratégiához, de a populáció egyik része az egyik, míg másik része a másik stratégiát játsza
- Minden egyed szigorúan van kötve egy arányhoz, melynek megfelelően játsza a 2 stratégiát

Hawk and Dove és kevert stratégiák 2

		2. állat (q)		q-mix
		D (q)	H (1-q)	
1. állat (p)	D (p)	(3,3)	(1,5)	$3q+(1-q)$ $5q$
	H (1-p)	(5,1)	(0,0)	
p-mix		$3p+(1-p)$	$5p$	

$$3p + (1 - p) = 5p \rightsquigarrow p = 1/3$$

Evolúciósan stabil-e (p,p) egy (q,q) $q \neq p$ stratégiával szemben?

Mivel (p,p) egy kevert egyensúly, önmagával szemben nem lehet szigorúan legjobbválasz - minden más ugyanolyan jó ellene. Ahhoz hogy p evolúciósan stabil legyen, jobb válasznak kell lennie a q stratégiára, mint q -nak önmagára nézve.

Hawk and Dove és kevert stratégiák 3

- Egy (D,D) párosítás esélye = $\frac{1}{3}q$
- Egy (D,H) párosítás esélye = $\frac{1}{3}(1 - q)$
- Egy (H,D) párosítás esélye = $(1 - \frac{1}{3})(q)$
- Egy (H,H) párosítás esélye = $(1 - \frac{1}{3})(1 - q)$ (érdektelen, mert úgyis 0,0 a kifizetés)

Az első játékos várható kifizetése:

$$V(p, q) = 1/3 \cdot q \cdot 3 + 1/3(1 - q) \cdot 1 + 2/3 \cdot q \cdot 5 = 4q + 1/3$$

$$V(q, q) = q^2 \cdot 3 + q(1 - q) \cdot 1 + (1 - q) \cdot q \cdot 5 = 6q - 3q^2$$

$$V(p, q) - V(q, q) = 3q^2 - 2q + 1/3 = \frac{1}{3}(3q - 1)^2 > 0 \text{ ha } q \neq 1/3$$

$\rightsquigarrow p$ evolúciósan stabil kevert egyensúly.

Irodalom

Networks, Crowds, and Markets: Reasoning about a Highly Connected World. By David Easley and Jon Kleinberg. Cambridge University Press, 2010/Chapter 7

Complete preprint on-line at
<http://www.cs.cornell.edu/home/kleinber/networks-book/>