① $H(\omega) = e^{-j\omega}\left(\frac{1}{2} - \frac{2\cos\omega}{\pi}\right)$

Digitális jelfeldolgozás vizsga 2019.06.19.

Név/Kód:

1. feladat	2. feladat	3. feladat	Szumma	Jegy	Évközi Zh jegy	Évközi kisZh átlag	Előadás/Gyakorlat hiányzás
15p	*35p*	*50p*	*100p*				

1) Válaszoljon az alábbi kérdésekre! *(Az 5 pont állításonként csak hiánytalan indoklás esetén kapható meg, egyébként 0 pont, részpontszám nem adható.)*

a) Helyes-e a következő állítás? Az LMS algoritmus igényli a bemeneti és a kivánt jel korrelációs függvényeinek ismeretét. Indokolja válaszát!

Hamis az állítás, mivel az LMS algoritmus egy $\tau^{(K)} = \{(x_k, d_k), k = 1, \dots K\}$ tanulóhalmazból veszi a mintákat, a korrelációs függvény ismeret nélkül az alábbi rekurzióhoz:

$$w_i(k+1) = w_i(k) + \Delta\left\{d_k - \sum_{j=0}^{L} w_j(k)\, x_{k-j}\right\} x_{k-i}$$

b) Helyes-e a következő állítás? Egy IIR szűrő impulzusválaszából DFT-vel számolható a mintavett átviteli karakterisztika. Indokolja válaszát!

Hamis az állítás, mivel a mintavett spektrumból (átviteli karakterisztikából) akkor állítható vissza torzítatlanul az eredeti folytonos (és periodikus) spektrum, ha a diszkrét jel L véges tartója kisebb, mint a mintavételek N száma, azaz $L \leq N$. IIR szűrő esetén az impulzusválasz nem véges, ezért a DFT nem végezhető el.

c) Helyes-e a következő állítás: egy ideális aluláteresztő szűrő nem stabil. Indokolja válaszát!

Hamis az állítás, mivel az ideális szűrők ugyan IIR, de impulzusválaszuk mindig abszolút összegezhető (szükséges és elégséges feltétele a BIBO stabilitásnak). Ugyanakkor az ideális szűrő nem kauzális, ezért nem valósítható meg.

2) Adott egy kauzális, $H(\omega)=e^{-j\omega}\left(\frac{1}{2}-\frac{2\cos\omega}{\pi}\right)$ átviteli karakterisztikájú szűrő.

a) Adja meg a szűrő $H(k)$ mintavett átviteli karakterisztikáját k=0,1,2,3 esetén (N=4)! *(5p)*

$$H(0)=\frac{1}{2}-\frac{2}{\pi}\approx-0.137$$

$$H\left(\frac{\pi}{2}\right)=-j\frac{1}{2}$$

$$H(\pi)=-\frac{1}{2}-\frac{2}{\pi}\approx-1.137$$

$$H\left(\frac{3\pi}{2}\right)=j\frac{1}{2}$$

b) Rajzolja le a szűrő amplitúdó karakterisztikáját léptékhelyesen a relatív frekvenciatartományon! Milyen jellegű ez a szűrő? *(5p)*

$\left|H(0)\right|\approx0.137;\left|H\left(\frac{\pi}{2}\right)\right|=\frac{1}{2};\left|H(\pi)\right|\approx1.137;\left|H\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right|=\frac{1}{2}$ tehá felüláteresztő jellegű.

c) A $H(k)$ mintavett átviteli karakterisztikából IDFT segítségével adja meg a szűrő impulzusválaszát (jelöljük $h_1(n)$-nel)! *(10p)*

$$\mathbf{h}_1=\mathbf{W}^{-1}\mathbf{H}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&j&-1&-j\\1&-1&1&-1\\1&-j&-1&j\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}-\frac{2}{\pi}\\-j\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}-\frac{2}{\pi}\\j\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\pi}\\\frac{1}{4}\\-\frac{1}{\pi}\\0\end{pmatrix}$$

d) A $H(\omega)$ átviteli karakterisztika alapján adja meg a rendszer $H(z)$ átviteli függvényét, majd abból inverz Z transzformációval az impulzusválaszát (jelöljük $h_2(n)$-nel)! (Segítség: $H(\omega)=H(z)\big|_{z=e^{j\omega}}\Rightarrow H(z)=H(\omega)\big|_{e^{j\omega}=z}$) *(10p)*

$$H(z)=H(\omega)\big|_{e^{j\omega}=z}=z^{-1}\left(\frac{1}{2}-\frac{2\left(z+z^{-1}\right)}{2\pi}\right)=\frac{-1}{\pi}+\frac{1}{2}z^{-1}+\frac{-1}{\pi}z^{-2}$$

$$h_2(n)=Z^{-1}\left\{H(z)\right\}=\frac{-1}{\pi}\delta(n)+\frac{1}{2}\delta(n-1)\cancel{+}\frac{-1}{\pi}\delta(n-2)$$

e) Tervezzen J=3 fokszámú FIR szűrőt ablakolással! Adja meg a $\left[\pi/2,\pi\right]$ relatív frekvenciatartományon ideális felüláteresztő szűrő derékszögű ablakfüggvénnyel vett közelítésének az impulzusválasz függvényét J=3 esetén (jelöljük $h_3(n)$-nel)! *(10p)*

$$h_d(n)=\frac{1}{\pi n}\left(\sin(\pi n)-\sin(\omega_c n)\right)\bigg|_{\omega_c=\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{\pi n}\left(\sin(\pi n)-\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)\right)$$

$$h_d(1)=-\frac{1}{\pi}\xRightarrow{n-\frac{J-1}{2}}h_3(0)=-\frac{1}{\pi}$$

$$h_d(0)=1\xRightarrow{n-\frac{J-1}{2}}h_3(1)=1$$

$$h_d(-1)=-\frac{1}{\pi}\xRightarrow{n-\frac{J-1}{2}}h_3(2)=-\frac{1}{\pi}$$

(9) $H(\omega) = e^{-j\omega}\left(\frac{1}{2} - \frac{2\cos\omega}{\pi}\right)$

f) Adja meg a c) feladatban megvalósított $h_3(n)$ impulzusválaszú szűrő $|H(k)|$ mintavett amplitúdó karakterisztikáját FFT alkalmazásával! Mutassa meg az FFT számítási folyamatábráján a részszámításokat! *(10p)*

Itt elég 4 pontos radix-2 FFT. Az eredmény ugyanaz lesz mint a)-nál.

g) Milyen kapcsolat van a fenti alfeladatokban kiszámolt $h_1(n)$, $h_2(n)$ és $h_3(n)$ között? *(5p)*

Ugyanaz mindhárom. ☺

3) Egy véletlen folyamatot kívánunk egy másodfokú prediktorral tömöríteni. A szűrőegyütthatók optimális beállítása esetén a négyzetes várhatóérték minimális (MMSE).

a) Adja meg a $\mathbf{w}_{opt}$ optimális szűrőegyüttható vektort, ha a korrelációs függvény becslésének értékei $R(0)=1, R(1)=0.5, R(2)=0$! *(10p)*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_{1opt} \\ w_{2opt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

amiből $\mathbf{w}_{opt} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}^T$

b) Rajzolja le a szűrő architektúrát a konkrét súlyokkal! *(5p)*

Ide egy FIR szűrő architektúrát várunk két késleltetővel.

c) A folyamat x_{k-1}, x_{k-2} értékeinek megfigyeléséből tudunk-e predikálni az x_{k+1} értékére? Ha igen, akkor hogyan, ha nem akkor miért nem? *(5p)*

Ha a feladat $y_n = \hat{x}_{n+l} = \sum_{j=1}^{J} w_j x_{n-j}$, akkor a Wiener-Hopf egyenletrendszer alakja

$$\begin{pmatrix} R(0) & R(1) & \cdots & R(J-1) \\ R(1) & R(0) & \cdots & R(J-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R(J-1) & R(J-2) & \cdots & R(0) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_{1opt} \\ w_{2opt} \\ \vdots \\ w_{Jopt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R(1+l) \\ R(2+l) \\ \vdots \\ R(J+l) \end{pmatrix},$$

melynek jobb oldala ezen folyamat esetén nullvektor, mivel $R(m)=0, m \geq 2$, és ezért az optimális súlyvektor is nullvektor.

d) Adja meg a szűrő $H(z)$ átviteli függvényét és rajzolja le a pólus-zérus diagramot! *(5p)*

$$H(z) = Z\{h(n)\} = Z\left\{\frac{2}{3}\delta(n-1) - \frac{1}{3}\delta(n-2)\right\} = \frac{2}{3}z^{-1} - \frac{1}{3}z^{-2} = \frac{\frac{2}{3}z - \frac{1}{3}}{z^2},$$

azaz a pólus-zérus diagramon ábrázolni kell $z=0.5$ zérust, és $p_{1,2}=0$ kétszeres pólust.

e) Tegyük fel, hogy a korrelációs függvény $R(2)$ értékét csak δ bizonytalansággal tudjuk becsülni (azaz $R(0)=1, R(1)=0.5, R(2)=\delta$, ahol $\delta \in (-0.1, 0.1)$). Adja meg és rajzolja fel a négyzetes várhatóértéket (MSE) a δ bizonytalanság függvényében, ha a $\mathbf{w}_{opt}$ optimális szűrőegyütthatók az előző feladatban kiszámoltak! *(10p)*

$$MSE(\delta, \mathbf{w})\Big|_{\mathbf{w}=\left(\frac{2}{3}\ -\frac{1}{3}\right)^T} = R(0) + \mathbf{w}^T\mathbf{R}\mathbf{w} - 2\mathbf{r}^T(\delta)\mathbf{w} = \ldots = \frac{2}{3} + \frac{2}{3}\delta$$

Az ábrázolás itt triviális. Talán annyi érdekesség, hogy az elérhető MSE még rossz becslés esetén is kevesebb lehet, ha $\delta < 0$.

Elégtelen	Elégséges	Közepes	Jó	Jeles
0-39	*40-53*	*54-67*	*68-81*	*82-100*