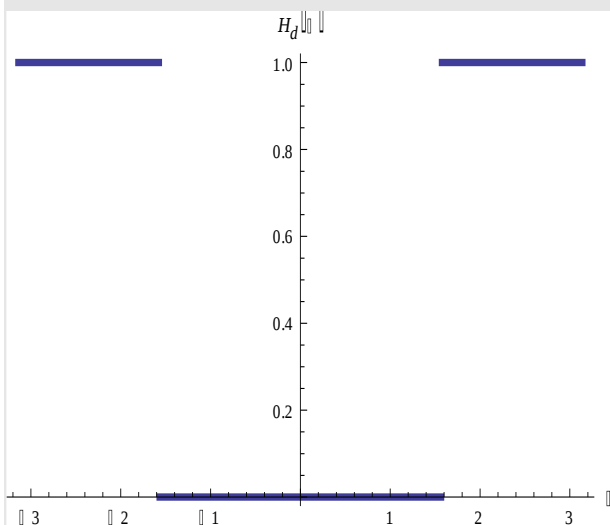


FIR szűrő tervezése ablakolással

6.1) Adja meg a $[\pi/2, \pi]$ relatív frekvenciatartományon ideális felüláteresztő szűrő derékszögű ablakfüggvénnyel vett közelítésének a $h(n)$ impulzusválasz függvényét $J=3$ esetén! Adja meg és rajzolja le a szűrő $H(f)$ amplitúdó karakterisztikáját a relatív frekvenciatartományon!

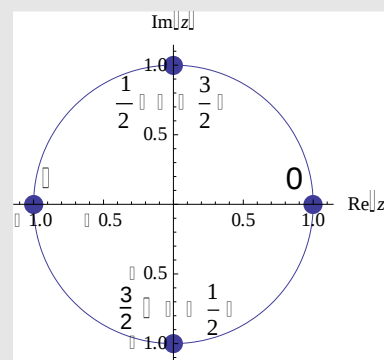
Megoldás

1. Először megtervezzük a szűrő ideális átviteli karakterisztikáját:



$$H_d(\omega) = \begin{cases} 1, & \pi/2 \leq |\omega| \leq \pi \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}, \omega \in [-\pi, \pi]$$

$J=3$ (szűrő fokszáma)
ismétlésnek:



2. Felhasználva a Fourier sorfejtés

tulajdonságait:

$$H_d(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_d(n) \cdot e^{-j\omega n}, \quad h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(\omega) \cdot e^{j\omega n} d\omega$$

Kiszámoljuk $h_d(n)$ -et, $n = -3, \dots, 3$ -ra:

$$\begin{aligned} h_d(0) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(\omega) \cdot e^{j\omega \cdot 0} d\omega = \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\pi}^{-\pi/2} 1 \cdot e^{j\omega \cdot 0} d\omega + \int_{\pi/2}^{\pi} 1 \cdot e^{j\omega \cdot 0} d\omega \right] = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\omega \Big|_{-\pi}^{-\pi/2} + \omega \Big|_{\pi/2}^{\pi} \right] = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

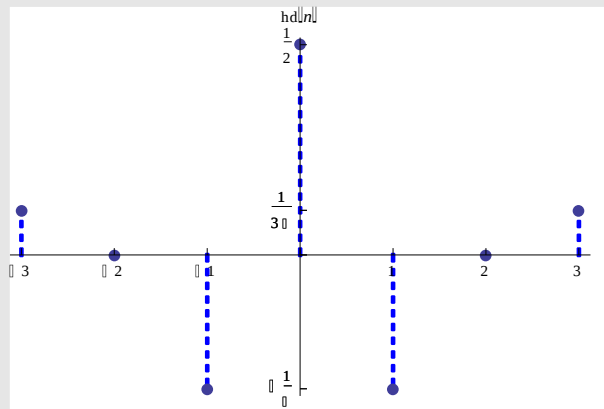
Megjegyzés:

$$\int e^x dx = e^x, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln(a)},$$

$$\int e^{j\omega} d\omega = \int (e^j)^{\omega} d\omega = \frac{e^{j\omega}}{\ln(e^j)} = \frac{e^{j\omega}}{j} = -je^{j\omega}$$

$h_d(k)$ páros függvény ($h_d(k) = h_d(-k)$), mert $H_d(\omega)$ valós függvény.

$$\begin{aligned}
 h_d(1) = h_d(-1) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(\omega) \cdot e^{j\omega} d\omega = \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\pi}^{-\pi/2} e^{j\omega} d\omega + \int_{\pi/2}^{\pi} e^{j\omega} d\omega \right] = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left[\underbrace{(-je^{j\omega})}_{-1-j} \Big|_{-\pi}^{-\pi/2} + \underbrace{(-je^{j\omega})}_{+j-1} \Big|_{\pi/2}^{\pi} \right] = -\frac{1}{\pi} \\
 h_d(2) = h_d(-2) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(\omega) \cdot e^{j\omega^2} d\omega = \frac{1}{2\pi} \left[\underbrace{\left(-\frac{j}{2}e^{j2\omega}\right)}_{+\frac{j}{2}+\frac{j}{2}} \Big|_{-\pi}^{-\pi/2} + \underbrace{\left(-\frac{j}{2}e^{j2\omega}\right)}_{-\frac{j}{2}-\frac{j}{2}} \Big|_{\pi/2}^{\pi} \right] = 0 \\
 h_d(3) = h_d(-3) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(\omega) \cdot e^{j\omega^3} d\omega = -\frac{1}{2\pi} \frac{j}{3} \left[\underbrace{(e^{j3\omega})}_{+j-1} \Big|_{-\pi}^{-\pi/2} + \underbrace{(e^{j3\omega})}_{-1+j} \Big|_{\pi/2}^{\pi} \right] = \frac{1}{3\pi}
 \end{aligned}$$



3. Ablakot illesztünk az elméleti, eredeti impulzusválasz függvényre, hogy véges tartójú legyen, hiszen $h_d(n)$ végtelen tartójú mindkét irányban:

Az ablak, ami véges tartójú, most derékszögű ablakfüggvény ($\mathbf{w}$):

$$\mathbf{h}_d = \left[\dots, \frac{1}{3\pi}, 0, -\frac{1}{\pi}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{\pi}, 0, \frac{1}{3\pi}, \dots \right]$$

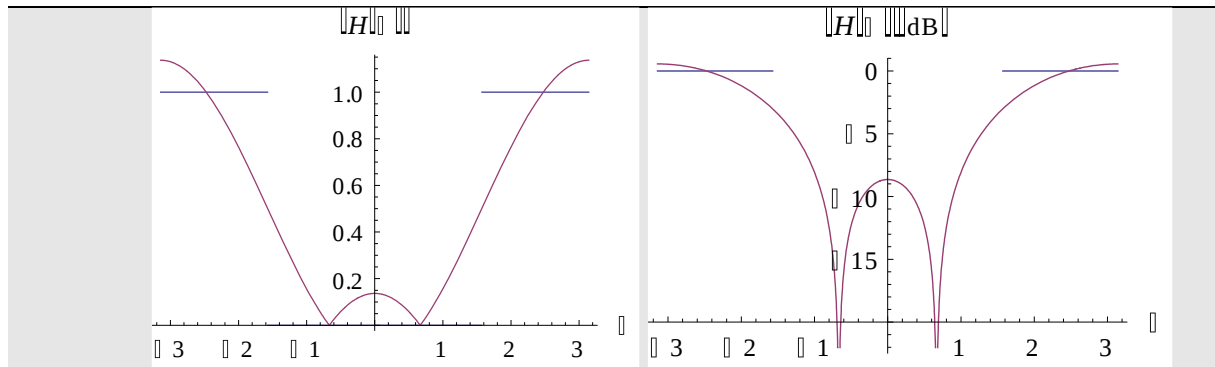
$$\mathbf{w} = \left[\dots, 0, 0, 1, \underset{\uparrow}{1}, 1, 0, 0, \dots \right]$$

$$\mathbf{g} = \mathbf{h}_d \otimes \mathbf{w} = \left[\dots, 0, 0, -\frac{1}{\pi}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{\pi}, 0, 0, \dots \right], \text{ ahol } \otimes \text{ az elemenkénti szorzás jele}$$

4. Eltoljuk az ablakolt most már véges tartójú impulzus válasz függvényt, hogy kauzális rendszert kapjunk:

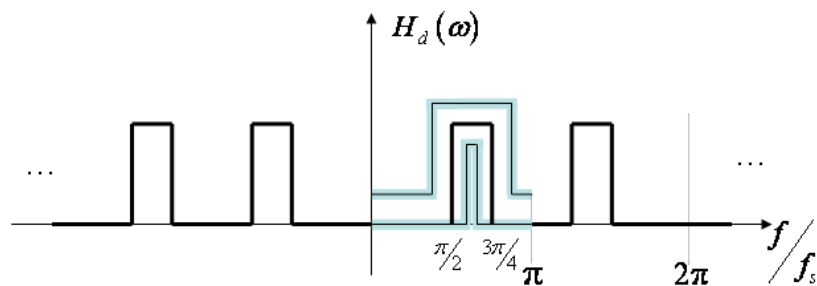
$$h(n) = g(n-R) = g(n-1) \Rightarrow \mathbf{h} = \left[-\frac{1}{\pi}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{\pi} \right]$$

$$H(\omega) = \sum_{n=0}^{J-1} h(n) \cdot e^{-j\omega n} = -\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} e^{-j\omega} - \frac{1}{\pi} e^{-j2\omega}$$



6.2) Adja meg a $[0, \pi/2]$ relatív frekvenciatartományon ideális aluláteresztő szűrő derékszögű ablakfüggvénnyel vett közelítésének az impulzusválasz függvényét $J=5$ esetén! Adja meg az impulzus választ Bartlet ablak esetén is! Rajzolja le a szűrőt!

6.3) Adja meg a $[\pi/2, 3\pi/4]$ relatív frekvenciatartományon ideális sáváteresztő szűrő derékszögű ablakfüggvénnyel vett közelítésének a $h(n)$ impulzusválasz függvényét $J=7$ esetén! Adja meg, és rajzolja le a megvalósított szűrő $|H(f)|$ amplitúdó karakterisztikáját!



6.4) Adja meg a $[0, \pi/4]$ relatív frekvenciatartományon ideális aluláteresztő szűrő derékszögű ablakfüggvénnyel vett közelítésének az impulzusválasz függvényét $J=7$ esetén! Rajzolja le a szűrőt!!

6.5) Adott egy kauzális, $H(\omega) = e^{-j\omega} \left(\frac{1}{2} - \frac{2 \cos \omega}{\pi} \right)$ átviteli karakterisztikájú szűrő.

a) Adja meg a szűrő $H\left(\frac{2\pi}{N}k\right)$ mintavett átviteli karakterisztikáját $k=0,1,2,3$ esetén!

Milyen jellegű ez a szűrő?

b) A $H(k)$ mintavett átviteli karakterisztikából IDFT segítségével adja meg a szűrő $h(n)$ impulzusválaszát!

- c) Tervezzon $J=3$ foks számú FIR szűrőt ablakolással! Adja meg a $[3\pi/4, \pi]$ relatív frekvenciatartományon ideális felüláteresztő szűrő derékszögű ablakfüggvényével vett közelítésének az impulzusválasz függvényét $J=3$ esetén!
- d) Adja meg a megvalósított szűrő $|H(k)|$ mintavett amplitúdó karakterisztikáját FFT alkalmazásával! Mutassa meg az FFT lepkeábrán a részs számításokat!

6.6) J foks számú FIR szűrőt tervezünk ablakolással.

- a) Adja meg a $[\pi/4, 3\pi/4]$ relatív frekvenciatartományon ideális sáváteresztő szűrő derékszögű ablakfüggvényével vett közelítésének az impulzusválasz függvényét $J=3$ esetén!
- b) Adja meg a megvalósított szűrő $|H(k)|$ mintavett amplitúdó karakterisztikáját FFT alkalmazásával! Mutassa meg az FFT lepkeábrán a részs számításokat!
- c) Ábrázolja a megvalósított szűrő $|H(k)|$ mintavett amplitúdó karakterisztikáját a relatív frekvenciatartományon! Ez a szűrő benne van a $\delta_1 = 0.2$ (zárótartomány), $\delta_2 = 0.1$ (áteresztő tartomány) és $\Delta\omega = 0.2\pi$ (átmeneti tartomány) paraméter beállításokkal definiált toleranciasémában?
- d) Tervezze meg a szűrőt DFT segítségével ($N=4$)! Adja meg az így megvalósított szűrő impulzusválaszát!

6.7) Egy $x(t) = \sin(2\pi 10t) - \sin(2\pi 20t) + \cos(2\pi 30t)$ analóg jelből $f_s = 100\text{Hz}$ mintavételi frekvenciával veszünk mintát.

- a) A mintavett jelet az alábbi szűrőkre kapcsolva milyen lesz a kimeneti jel:
 - i.) $[\pi/4, \pi]$ relatív frekvenciatartományon ideális felüláteresztő szűrő,
 - ii.) $[\pi/2, \pi]$ relatív frekvenciatartományon ideális felüláteresztő szűrő,
 - iii.) $[0, \pi/4]$ relatív frekvenciatartományon ideális aluláteresztő szűrő,
 - iv.) $[\pi/4, \pi/2]$ relatív frekvenciatartományon ideális sáváteresztő szűrő.
 Rajzolja le az egy szűrők átviteli karakterisztikáját és kimenetének spektrumát az adott $x(t)$ gerjesztés esetén!
- b) Adja meg a $[0, \pi/4]$ relatív frekvenciatartományon ideális sáváteresztő szűrő derékszögű ablakfüggvényével vett közelítésének az impulzusválasz függvényét $J=3$ esetén!
- c) Adja meg a megvalósított szűrő $H(k)$ mintavett amplitúdó karakterisztikáját FFT alkalmazásával! mutassa meg az FFT lepkeábrán a részs számításokat!
- d) Ábrázolja a megvalósított szűrő $|H(k)|$ mintavett amplitúdó karakterisztikáját a relatív frekvenciatartományon! Ez a szűrő benne van a $\delta_1 = 0.1$ (zárótartomány), $\delta_2 = 0.1$ (áteresztő tartomány) és $\Delta\omega = 0.04\pi$ (átmeneti tartomány) paraméter beállításokkal definiált toleranciasémában?