

DFT és FFT

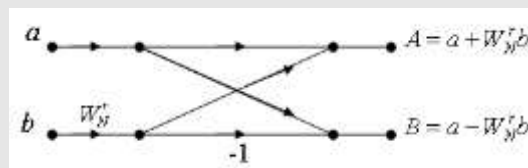
5.1) Adja meg egy 2 pontos DFT kiszámításához szükséges $\mathbf{W}_2$ mátrixot! Rajzolja fel az FFT algoritmus „lepké” számításának ábráját!

Megoldás

A 2 pontos DFT kiszámításához szükséges mátrix a következő:

$$\mathbf{W}_2 = \begin{bmatrix} e^{j0} & e^{j0} \\ e^{j0} & e^{j\pi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$

ez alapján az FFT „lepké” ábrája az alábbi ábrán látható:



5.2) Adja meg az $x(n) = [2 \quad -1 \quad 2 \quad 1]$ diszkrét jelsorozat $N=4$ pontos DFT-jét!

Megoldás

A 4 pontos DFT a következő mátrix-vektor szorzásból kapható meg:

$$\mathbf{X} = \mathbf{W}_4 \mathbf{x} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & -1 & -j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -j & -1 & j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.5j \\ 1 \\ 0.5j \end{bmatrix}.$$

5.3) Az $x(t) = \cos(2\pi \cdot 10 \cdot t)$ analóg jelet $T_s = 0.025\text{sec}$ mintavételi idővel mintavételezzük. Adja meg az $x(n)$ mintavételezett jelet $n = 0, 1, 2, 3$ esetén! Adja meg: (i) az analóg jel $|X(\omega)|$ amplitúdó karakterisztikáját; (ii) a mintavételezett jel $|X_n(\omega)|$ amplitúdó karakterisztikáját; (iii) valamint az $x(n)$ 4 mintájából számított $N=4$ pontos DFT spektrumot!

Megoldás

A $T_s = 0.025\text{sec}$ mintavételi idő alapján a $f_s = 40\text{Hz}$ mintavételi frekvencia nagyobb, mint a jel sávszélességének ($B = 10\text{Hz}$) kétszerese, vagyis a mintavételi tételt ezzel a mintavételi gyakorisággal betartjuk. A mintavett jel a következőképpen kapható meg:

$$x(nT_s) = \cos(2\pi \cdot 10 \cdot n \cdot 0.025),$$

ahol $n = 0, 1, 2, 3$ behelyettesítés után esetén a mintavett jel az $\mathbf{x} = [1 \ 0 \ -1 \ 0]^T$ vektoros alakban adható meg.

Az egyes jelek spektrumképei a következők:

(i) $|X(\omega)| = \frac{1}{2} [\delta(\omega - 2\pi \cdot 10) + \delta(\omega + 2\pi \cdot 10)]$ (az $x(t) = \cos(2\pi \cdot 10 \cdot t)$ analóg jel Fourier transzformáltja)

(ii) $|X_n(\omega)| = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \left| X\left(\omega - \frac{2\pi}{T_s} i\right) \right|$ (az analóg jel spektrumának periodikus kiterjesztettje, $f_s = 40\text{Hz}$ esetén)

A $N=4$ pontos DFT a következő mátrix-vektor szorzásból kapható meg:

$$w_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}, \quad W_N(i, j) = w_N^{ij}, \quad i, j = 0 \dots N-1$$

$w_4 = e^{-j\frac{2\pi}{4}},$	$i \cdot j$	$\begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 & 11 \end{matrix}$
	$\begin{matrix} W_N(i, j) \\ 1 & -j & -1 & j \end{matrix}$	

$$A_{i,j} = i \cdot j \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{W}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix}$$

(iii) $\mathbf{X} = \mathbf{W}_4 \mathbf{x} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$

5.4) Az $x(n) = [-5 \ x(1) \ 3 \ x(3)]$ jel 4 pontos DFT-je $X(k) = [3 \ -8+9j \ X(2) \ X(3)]$. Határozza meg az ismeretlen értékeket!

Megoldás

A DFT $\mathbf{X} = \mathbf{W}_4 \mathbf{x}$ vektoros alakja alapján felírható egyenletrendszerből:

$$\begin{bmatrix} 3 \\ -8+9j \\ X(2) \\ X(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 \\ x(1) \\ 3 \\ x(3) \end{bmatrix},$$

amiből $x(1) = -2$, $x(3) = 7$, $X(2) = -7$, $X(3) = -8 - 9i$.

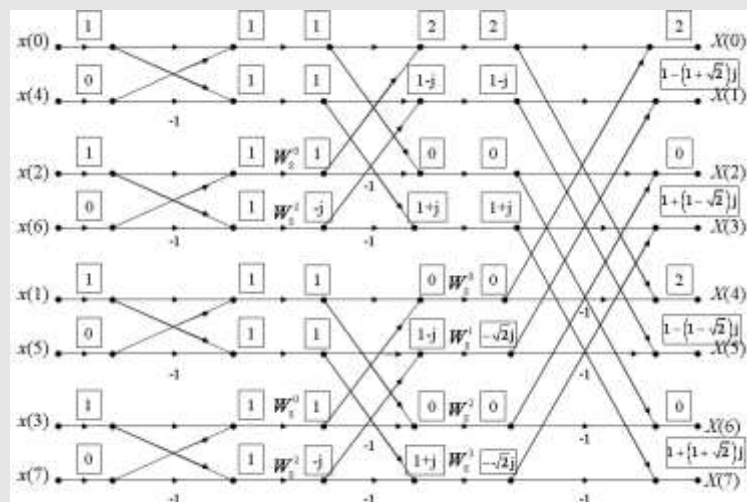
5.5) Határozza meg az $\mathbf{x} = [1 \ 1 \ 1 \ 1]$ jel 4 pontos DTF-jét mátrix-vektor szorzással, másrészt a 8 pontos DFT-jét FFT segítségével! Rajzolja fel a számítás lepke ábráját! Magyarázza a tapasztaltakat!

Megoldás

A 4 pontos DFT a következő mátrix-vektor szorzásból kapható meg:

$$\mathbf{X} = \mathbf{W}_4 \mathbf{x} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & -1 & -j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -j & -1 & j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

A 8 pontos DFT számítása FFT algoritmussal az alábbi ábrán követhető nyomon:



5.6) Adja meg az $x(n) = [1 \ -1 \ 2]$ diszkrét jelsorozat 3 pontos DFT-jét!

Megoldás

A 3 pontos DFT a következő mátrix-vektor szorzásból kapható meg:

$$\mathbf{X} = \mathbf{W}_4 \mathbf{x} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}j & -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}j \\ 1 & -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}j & -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}j \\ \frac{1}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}j \end{bmatrix}.$$

5.7) Adott az $x(n) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ diszkrét jelsorozat.
 $\uparrow$
 $n=0$

a) Diszkrét idejű Fourier transzformáció (DTFT) segítségével adja meg a jelsorozat

$X(\omega)$ spektrumát (zárt alakban), és az $X\left(\omega = \frac{2\pi}{N}k\right) \equiv X(k)$ mintavett

spektrumot, ahol $k=0,1,2,3$ (tehát $N=4$)! Ábrázolja közös diagramban az

$|X(\omega)|$ amplitúdó spektrumot és annak mintavett értékeit!

b) Számítsa ki diszkrét Fourier transzformációval (DFT) az $x(n)$ diszkrét jelsorozat $X(k)$ mintavett spektrumát! Ellenőrizze, hogy megegyezik-e az a) pontban számított mintavett spektrummal!

c) Rajzolja fel a négyponos FFT kiszámításához szükséges „lepke” ábrát! Adja meg a köztes értékeket a csomópontokban! Ellenőrizze, hogy az eredmény megegyezik-e az a) és b) pontban számított mintavett spektrummal! Számolja össze, a szorzási és összeadási nyereségünket!

Megoldás:

$$\mathbf{a)} \quad X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \cdot e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^3 x(n) \cdot e^{-j\omega n} = 1 + e^{-j\omega} + e^{-j\omega 2} + e^{-j\omega 3}$$

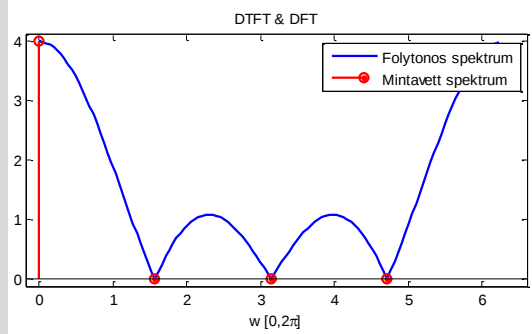
$$X\left(\omega = \frac{2\pi}{N}k\right) \equiv X(k) = 1 + e^{-j\pi k/2} + e^{-j\pi k} + e^{-j3\pi k/2}, \text{ és ez alapján } k=0,1,2,3\text{-ra:}$$

$$X(0) = 1 + e^{-j\pi 0/2} + e^{-j\pi 0} + e^{-j3\pi 0/2} = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$$

$$X(1) = 1 + e^{-j\pi 1/2} + e^{-j\pi 1} + e^{-j3\pi 1/2} = 1 - j - 1 + j = 0$$

$$X(2) = 1 + e^{-j\pi 2/2} + e^{-j\pi 2} + e^{-j3\pi 2/2} = 1 - 1 + 1 - 1 = 0$$

$$X(3) = 1 + e^{-j\pi 3/2} + e^{-j\pi 3} + e^{-j3\pi 3/2} = 1 + j - 1 - j = 0$$

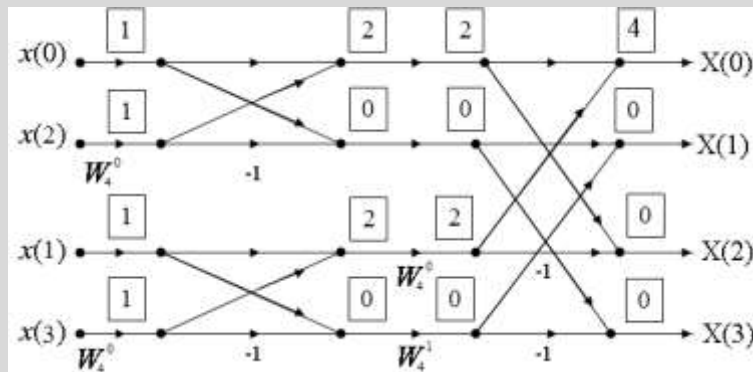


b) Ehhez ki kell számolni $N=4$ -hez tartozó W transzformációs mátrixot, ahol a komplex egység: $W_4 = e^{-j2\pi/N} = e^{-j\pi/2}$

$$\overline{W} = \begin{bmatrix} W_4^{0-0} & W_4^{0-1} & W_4^{0-2} & W_4^{0-3} \\ W_4^{1-0} & W_4^{1-1} & W_4^{1-2} & W_4^{1-3} \\ W_4^{2-0} & W_4^{2-1} & W_4^{2-2} & W_4^{2-3} \\ W_4^{3-0} & W_4^{3-1} & W_4^{3-2} & W_4^{3-3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix}, \text{ vagyis}$$

$$\overline{X} = \overline{W} \cdot \overline{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ és ez megegyezik az a)-ban számolt értékekkel.}$$

c) Egy 4 pontos DFT-t 2 db 2 pontos és 1 db 4 pontos lepkével tudunk kiszámolni az alábbi módon:

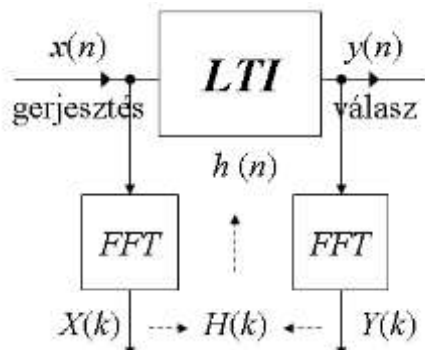


Ez megegyezik az a)-ban és a b)-ben számolt értékekkel.

	DFT	FFT	→	Nyereség
Összeadás	$4 \cdot 3 = 12$	$2 \cdot 2 + 1 \cdot 4 = 8$	→	4 (30%)
Szorzás	$4 \cdot 4 = 16$	$2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 4$ (a negálást nem tekintettem szorzásnak)	→	12 (75%)

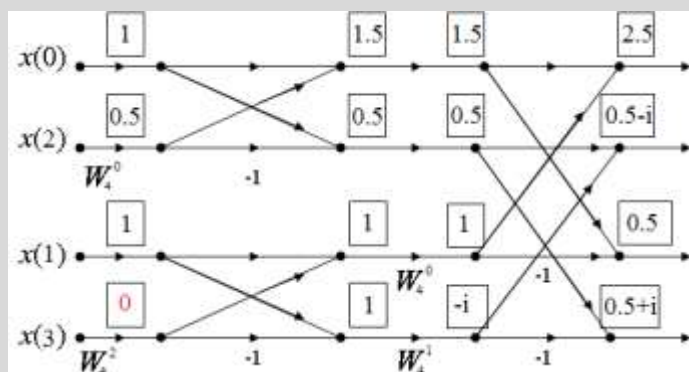
5.8) Egy lineáris időinvariáns, kauzális szűrő bemenetén az $x(n) = [\underset{\substack{\uparrow \\ n=0}}{1} \quad 1 \quad 0.5]$ sorozat

és a kimeneten $y(n) = [\underset{\substack{\uparrow \\ n=0}}{1} \quad 0 \quad 1 \quad 2]$ sorozat figyelhető meg.

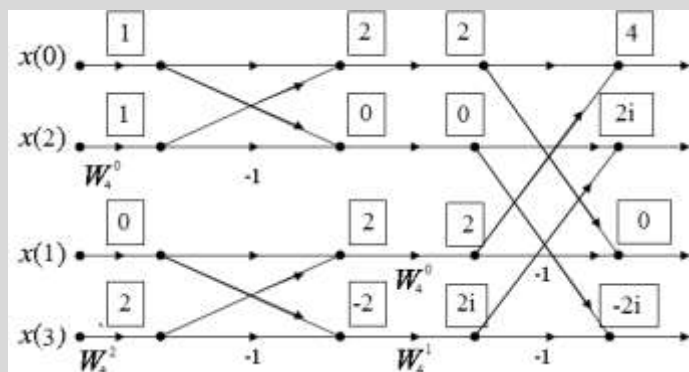


- A bemeneti és a kimeneti sorozat $N=4$ pontos FFT-je alapján adja meg a szűrő átviteli függvényének $H(k)$ DFT-jét, és az alapján IDFT-vel a $h(n)$ impulzusválaszt!
- Ellenőrizze az eredményt diszkrét konvolúcióval!

Megoldás: Az $x(n)$ vektorból a bináris tükrözés után $[1 \ 0.5 \ 1 \ 0]$ lesz. (Kiegészítjük egy 0-val ahhoz, hogy négy hosszú legyen.



Ugyanígy az $y(n)$ -el.



A $H(k)$ meghatározásához az $Y(k)/X(k)$ osztást kell elvégezni. A fentiek alapján:

$$H(k) = [1.6 \quad -1.6+0.8i \quad 0 \quad -1.6-0.8i]$$

Ezt iDFT-zve az alábbi művelet végrehajtása szükséges:

$$\mathbf{X} = \mathbf{W}_4 \mathbf{x} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & -1 & -j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -j & -1 & j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.6 \\ -1.6 + 0.8i \\ 0 \\ -1.6 - 0.8i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.4 \\ 0 \\ 1.2 \\ 0.8 \end{bmatrix}$$

Tehát ezzel megkapjuk a $h(n)$ függvényt.

A konvolúcióhoz az $x(n)$ és $h(n)$ konvolúcióját számoljuk ki és ellenőrizzük, hogy megkapjuk-e az $y(n)$ -et.

A konvolúció eredménye: $[-0.4 \quad -0.4 \quad 1 \quad 2 \quad 1.4 \quad 0.4]$

Ez nem az $y(n)$. Miért? Mert h valójában végtelen tartójú, de lecseng, így 15-16 pontos DFT-je már pontos eredményt ad...(ld. feladat7pont9.m)

5.9) Adja meg az N pontos DFT definícióját! Bizonyítsa a definíció alapján az iDFT létezését! Mutassa meg, hogy az $x(n)$ jel DFT-jének milyen kapcsolata van az $x(t)$ jel spektrumával, ha $x(n)$ az $x(t)$ mintavett verziója! A gyakorlatban milyen módon számítjuk egy $x(n)$ jel spektrumát? Mire jó, ha ismerjük egy jel spektrumát?

5.10) Határozza meg az $x(n) = [2 \ 1 \ 0 \ -1 \ -2 \ -1 \ 0]$ jel 8 pontos DTF-jének $X(0)$, $X(2)$, $X(4)$, $X(6)$ értékeit radix-2 algoritmussal! Rajzolja fel a számítás lepke ábráját!

5.11) Egy diszkrét, kauzális, $h(n) = (1 \ -1)$ impulzusválaszú szűrő bemenetén az $x(n) = \delta(n) + \delta(n-3)$ gerjesztés jelenik meg. Adja meg a szűrő válaszát diszkrét konvolúcióval, ill. DFT felhasználásával (Segítség: $h(n) \xrightarrow{DFT} H(k)$ és $x(n) \xrightarrow{DFT} X(k)$ után $Y(k) = H(k) \otimes X(k) \xrightarrow{IDFT} y(n)$)! A két számítás ugyanarra az eredményre vezet? Magyarázza a tapasztaltakat! Adja meg és a relatív frekvencia tartományon rajzolja le a szűrő $|H(\omega)|$ amplitúdó karakterisztikáját és ugyanitt a $|H(k)|$ mintavett amplitúdó karakterisztikát! Milyen jellegű ez a szűrő?

5.12) Adja meg az $\mathbf{x} = [1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$ diszkrét jel 4 pontos és 6 pontos DFT-jét! Ábrázolja az eredményt közös grafikonon! Magyarázza a tapasztaltakat!

5.13) Adja meg egy 8 pontos DFT kiszámításának a komplexitását az eredeti formula szerint! Mennyire csökken ez a komplexitás a RADIX 2 algoritmus szerint?

5.14) Adja meg egy 8 pontos DFT kiszámításának a komplexitását (szorzások és összeadások száma) az eredeti formula szerint mennyire csökken ez a komplexitás a RADIX 2 algoritmus szerint?

5.15) Az $X(k) = [0.7 \quad 0.8 - 1.3j \quad 1.7 \quad 0.8 + 1.3j]$ az $x(n)$ diszkrét jelsorozat diszkrét Fourier Transzformáltja. Inverz DFT segítségével adja meg a jelsorozatot!

5.16) Egy $x(t) = 2 \sin(2\pi f_0 \cdot t)$ jel spektrumanalízise során f_s frekvenciájú mintavételezés és 4 bites lineáris kvantálás (teljesen kivezérelt) után egy 8 pontos FFT-vel állítjuk elő a diszkrét spektrumot.

a) **Adja meg**, és **értelmezze** az FFT kimenetét, ha $f_0/f_s = 1/4$!

b) Rajzolja le a számítás lepke ábráját!

5.17) Egy $x(t) = \cos(2\pi f_0 \cdot t)$ jel spektrumanalízise során f_s frekvenciájú mintavételezés és 4 bites lineáris kvantálás (teljesen kivezérelt) után egy 8 pontos FFT-vel állítjuk elő a diszkrét spektrumot.

a) **Adja meg** az FFT kimenetét, ha $f_0/f_s = 1/2$! Rajzolja le a számítás lepke ábráját!

b) **Adja meg** az FFT kimenetét, ha $f_0/f_s = 1/4$! Rajzolja le a számítás lepke ábráját!

c) Rajzolja le közös diagramon az a) és b) feladatrészen kapott diszkrét spektrumot és az $x(t)$ eredeti jel spektrumát!