

LTI rendszerek analízise időtartományban

- 2.1)** Jelölje meg a helyes állításokat! Indokolja választát! (az állításonként 5 pont csak akkor kapható meg, ha a válasz a helyes indoklást is tartalmazza!)
- Ha egy lineáris rendszer kauzális akkor $h(n) = 0$ minden $n < 0$ -ra.
 - Egy lineáris rendszer BIBO stabilitásának a feltétele, hogy a $h(n)$ abszolút értékben összegezhető legyen.
 - Csak a lineáris időinvariáns rendszer írható le egyértelműen egy egyváltozós impulzusválasz függvény segítségével.
 - A BIBO stabilitás azt jelenti, hogy tetszőleges bemeneti jel esetén a rendszer kimenetén mindig korlátos jel van.
 - Az $y(n) = x(-n) + x(2n)$ rendszeregyenlettel adott szűrő időinvariáns és kauzális.

Megoldás

- a.) Igaz. Ez a kauzális rendszer definíciójában szerepel. Konvolúció esetén ez biztosítja, hogy a rendszer kimenete csak a múltbéli bemenettől függjön (rendszer csak a múltbéli jeleket használja fel a kimenet előállítására):

$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)x(n-k) = \sum_{k=-\infty}^0 h(n-k)x(k)$$

- b.) Igaz. A BIBO stabilitási tétel bizonyításából látható, hogy egy korlátos bemeneti jel esetén csak akkor kapunk korlátos kimeneti jelet, ha a rendszer impulzus válaszára teljesül, hogy: $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| < \infty$
- c.) Igaz?? A linearitás és az időinvariancia alapvető követelménye az impulzusválasz alkalmazhatóságának. E két tulajdonság szükséges ahhoz, hogy belássuk, hogy egy függvénnyel (impulzusválasz) leírható egy LTI rendszer.
- d.) Hamis. Csak korlátos bemeneti jel esetén biztosított a korlátos kimeneti jel BIBO stabil rendszer esetén. A neve is tartalmazza ezeket a feltételeket: Bounded Input Bounded Output
- e.) Hamis. A fent megadott szűrő se nem időinvariáns, se nem kauzális.

Nem időinvariáns, mert a definíció ($S\tau x(n) = \tau Sx(n)$) nem igaz rá:

$$y(n-1) = Sy(n) = S\tau x(n) = S\{x(-n) + x(2n)\} = \boxed{x(-n-1) + x(2n-1)}$$

$\neq$

$$y(n-1) = Sy(n) = S\tau x(n) = \tau Sx(n) = \tau x(n-1) = \boxed{x(-n+1) + x(2n-2)}$$

Nem kauzális, mert a pillanatnyi kimenet a jövőbeli bemenettől is függ: $x(2n)$

- 2.2)** Adott egy $x(n) = [1 \ 4 \ 2 \ 3 \ 5 \ 3 \ 3 \ 4 \ 5 \ 7 \ 6 \ 9]$ diszkrét jelsorozat. Rajzolja le a következő jeleket:
 $x(n), x(n-2), x(4-n), x(n+2), x(n) \cdot u(2-n), x(n-1)\delta(n-3), x(n^2)!$

- 2.3)** Adja meg a kauzalitás és a stabilitás definícióját! Adott egy rendszer $h(n) = u(n-1)n^{-2}$ impulzusválasza. Stabil és kauzális ez a rendszer? Válaszát a definíciók alapján indokolja!

Megoldás

Kauzalitás: Egy rendszer kauzális, ha a pillanatnyi válaszát csak a jelen és múlt határozza meg, a jövőtől nem függ, azaz:

$$y(n) = \Psi(y(n-1), y(n-2), \dots, x(n), x(n-1), \dots).$$

Stabilitás: bármilyen input esetén a kimenet korlátos marad

BIBO stabilitás: korlátos input esetén az output is korlátos marad, vagyis:

$$\text{ha } |x(n)| \leq M_x \forall n \Rightarrow |y(n)| < M_y < \infty \text{ (ennek feltétele: } \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| < \infty)$$

- Mivel $h(n) = u(n-1)n^{-2} = \begin{cases} \frac{1}{n^2} & \text{ha } n > 0 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$, ezért a definícióból következően *kauzális*.

- Mivel $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty$, ezért definícióból következően *BIBO stabil* (de ezt meg is

lehet magyarázni: ha az input nem egy exp. felrobbanó függvény, akkor az impulzusválasz exp. csökkenő súlyai „le fogják húzni” a bemenet értékeit, így a kimenet is véges lesz)

2.4) Lehet-e BIBO stabil a $h(n) = u(n) \frac{1}{n+1}$ impulzusválasz függvénnyel rendelkező szűrő? Válaszát indokolja!

Megoldás

A BIBO stabilitás elégséges feltétele, hogy az impulzusválasz függvény abszolút

integrálható legyen, a konkrét esetben: $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \rightarrow \infty$, tehát a rendszer nem BIBO stabil.

2.5) Mit jelent a kauzalitás? Kauzális-e az a rendszer, amelynek rendszeregyenlete az $y(n-1) = x(n) - 2x(n-1)$?

Megoldás

Egy rendszer kauzális, ha a pillanatnyi válaszát csak a jelen és múlt határozza meg, a jövőtől nem függ, azaz:

$$y(n) = \Psi(y(n-1), y(n-2), \dots, x(n), x(n-1), \dots).$$

A differenciaegyenlettel megadott rendszer nem kauzális.

2.6) Adott egy rendszer $y(n) = x(2n) + 2x(n)$ rendszeregyenlete. Időinvariáns-e a rendszer? Válaszát indokolja!

Megoldás

Időinvariáns rendszer esetén $y(n) = S^k \{T \{x(n)\}\} = T \{S^k \{x(n)\}\}$, tehát az eltolás és rendszer operátor felcserélhető, vagy más szóval, a rendszer azonos gerjesztésre minden időpillanatban azonosan válaszol.

A fenti rendszeregyenlettel megadott szűrő nem időinvariáns, mivel

$$S^k \{T \{x(n)\}\} = x(2n-k) + 2x(n-k), \text{ de}$$

$$T \{S^k \{x(n)\}\} = x(2n-2k) + 2x(n-k).$$

2.7) Adja meg a lineáris rendszer definícióját! Az $y(n) = x^2(n)$ rendszeregyenlettel adott rendszer lineáris? A definíció alapján indokolja választát!

Megoldás

Egy rendszer lineáris, ha teljesül az $y(n) = T \left\{ \sum_i a_i x_i(n) \right\} = \sum_i a_i T \{ x_i(n) \}$ szuperpozíció elve.

A fenti rendszeregyenlettel megadott szűrő nem lineáris, mivel

$$T \{ a_1 x_1(n) + a_2 x_2(n) \} = a_1^2 x_1^2(n) + 2a_1 a_2 x_1(n) x_2(n) + a_2^2 x_2^2(n), \text{ de}$$

$$a_1 T \{ x_1(n) \} + a_2 T \{ x_2(n) \} = a_1 x_1^2(n) + a_2 x_2^2(n).$$

2.8) Adja meg a kauzalitás, a stabilitás, a linearitás és az időinvariancia definícióját! A definíciók alapján adja meg az alábbi rendszerek tulajdonságait:

a.) $y(n) = \cos(x(n)),$

b.) $y(n) = x(n) \cos(\omega_0 n),$

c.) $y(n) = x(-n+2),$

d.) $y(n) = x(n) + nx(n+1).$

2.9) A következő bemenet-kimenet párok egy lineáris rendszer megfigyeléséből származnak:

$$x_1(n) = \begin{bmatrix} -1 & \uparrow & 2 & 1 \end{bmatrix} \xleftrightarrow{\Psi(\cdot)} y_1(n) = \begin{bmatrix} 1 & \uparrow & 2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x_2(n) = \begin{bmatrix} 1 & \uparrow & -1 & -1 \end{bmatrix} \xleftrightarrow{\Psi(\cdot)} y_2(n) = \begin{bmatrix} -1 & \uparrow & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$x_3(n) = \begin{bmatrix} 0 & \uparrow & 1 & 1 \end{bmatrix} \xleftrightarrow{\Psi(\cdot)} y_3(n) = \begin{bmatrix} \uparrow & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Tudunk valamit mondani a rendszer időinvarianciájáról?

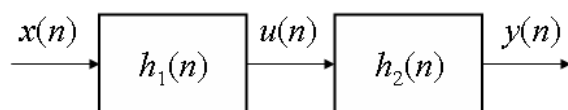
2.10) Egy lineáris időinvariáns rendszer impulzusválasza $h(n) = \begin{bmatrix} \uparrow & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Adja meg a rendszer választ az $x(n) = \begin{bmatrix} 2 & \uparrow & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ gerjesztés esetén!

Megoldás

A rendszer válasza $y(n) = h(n) * x(n) = \sum_{j=0}^3 h(j)x(n-j)$ diszkrét konvolúcióval határozható meg.

$h(n) = \begin{bmatrix} \uparrow & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$	$y(n)$
$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$	2
$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$	1 ←
$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$	1
$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$	4
$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$	0
$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$	0
$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$	1

2.11) Két sorosan (kaszád) kapcsolt LTI rendszer bemenetét az $x(n) = x_1(n) = [2 \quad 1 \quad -1 \quad 1]$ diszkrét jellel gerjesztjük.



- b.) Milyen tulajdonságai vannak a konvolúciónak? Mutassa be ezeket!
 c.) Adja meg az $y(n) = y_1(n)$ választ $h_1(n) = [1 \quad 2 \quad 1]$ és $h_2(n) = [1 \quad 1]$ impulzusválaszok esetén!
 d.) Adja meg az eredő impulzusválaszt!
 e.) Adja meg a kaszkád kapcsolás $y(n) = y_2(n)$ választ $x(n) = x_2(n) = [-2 \quad -1 \quad 1 \quad 1]$ gerjesztésre!
 f.) Mi lesz az $y(n)$ válasz az $x(n) = x_1(n) + x_2(n)$ gerjesztés esetén?

2.12) A következő bemenet-kimenet párok egy időinvariáns rendszer megfigyeléséből származnak:

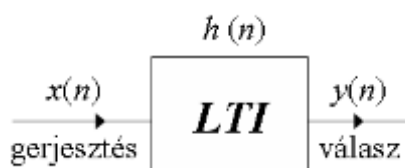
$$x_1(n) = [1 \quad 0 \quad 2] \xleftrightarrow{\Psi(\cdot)} y_1(n) = [1 \quad 1 \quad 2 \quad 2]$$

$$x_2(n) = [0 \quad 0 \quad 3] \xleftrightarrow{\Psi(\cdot)} y_2(n) = [0 \quad 0 \quad 3 \quad 3]$$

$$x_3(n) = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1] \xleftrightarrow{\Psi(\cdot)} y_3(n) = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1]$$

- a.) Tudunk valamit mondani a rendszer linearitásáról?
 b.) Mi a rendszer impulzusválasza?

2.13) Egy lineáris, időinvariáns rendszer az $x(n) = [2 \quad 1 \quad -1 \quad 1]$ gerjesztésre adott válasza $y(n) = [2 \quad 1 \quad 1 \quad 4 \quad 0 \quad 0 \quad 1]$.



- a.) Adja meg a szűrő $h(n)$ impulzusválaszt!
 b.) Az impulzusválasz alapján milyen típusú a szűrő!

Megoldás: Ez itt egyelőre egy becsapós feladat... ☺ A megoldáshoz de-konvolúcióra volna szükség, ehhez tartozik egy egyszerű algoritmus.

Megjegyzés: Egy rendszer vizsgálatához célszerű a szokásos vizsgálójeleket használni.
Hint: DTFT-vel áttérhetünk frekvencia tartományba, ahol egy osztással majd iDTFT-vel elvégezhető a feladat megoldása.

2.14) Egy $h_i(n)$ impulzusválaszú szűrő az $x(n) = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0.5 \quad 0.5]$ diszkrét jelsorozattal történő gerjesztésre $y_i(n)$ diszkrét jelsorozattal válaszol.

- a.) Adja meg és rajzolja le közös diagramon az alábbi $h_i(n)$ impulzusválaszokhoz tartozó $y_i(n)$ jelsorozatokat:
- $h_1(n) = [1 \ 1]$,
 - $h_2(n) = [1 \ 2 \ 1]$,
 - $h_3(n) = [0.5 \ 0.5]$,
 - $h_4(n) = [0.25 \ 0.5 \ 0.25]$,
 - $h_5(n) = [0.25 \ -0.5 \ 0.25]$,
 - $h_6(n) = [0.5 \ -0.5]!$
- b.) Mi a különbség $y_1(n)$ és $y_2(n)$, valamint $y_3(n)$ és $y_4(n)$ között?
- c.) Magyarázza $y_2(n)$ és $y_4(n)$ simaságát! Mi okozza?
- d.) Hasonlítsa össze $y_4(n)$ és $y_5(n)$ jeleket! Mi a különbség? Hogyan magyarázza?
- e.) Ábrázolja közös diagramon $x(n)$, $y_2(n)$ és $y_6(n)$ diszkrét jeleket, és magyarázza az eredményeket!

LTI rendszerek vizsgálata időtartományban, differencia-egyenlettel

2.15) Adott egy lineáris, időinvaráns rendszer a következő differencia egyenlettel:

$$y(n) - 0.2y(n-1) = x(n) - 4x(n-1).$$

Adja meg a rendszer válaszát az $x(n) = u(n)2(0.2)^n$ gerjesztés és $y(-1) = 10$ kezdeti feltétel esetén! Eredményét ellenőrizze!

Megoldás

Az elsőfokú differenciaegyenlet homogén megoldása: $y_h(n) = C \cdot 0.2^n$, partikuláris megoldását, mivel a gerjesztés rezonanciában van a rendszer sajátértékével, az $y_p = u(n)A \cdot n \cdot 0.2^n$ alakban kell keresni, ahol az A együtthatót a differencia egyenletből a következő módon kapjuk:

$$A \cdot n \cdot 0.2^n - 0.2 \cdot A \cdot (n-1) \cdot 0.2^{(n-1)} = 2 \cdot 0.2^n - 4 \cdot 2 \cdot 0.2^{n-1},$$

amiből $A = -38$, tehát a partikuláris megoldás $y_p = -u(n) \cdot 38 \cdot n \cdot 0.2^n$. A teljes $y_h(n) = C \cdot 0.2^n - u(n) \cdot 38 \cdot n \cdot 0.2^n$ megoldásban a C együttható meghatározásához behelyettesítéssel ki kell számítani $y(1)$ értéket, mivel $M - N + 1 = 1$. A differenciaegyenletbe történő behelyettesítések után $y(0) = 4$, $y(1) = -6.8$ és az ellenőrzéshez $y(2) = -2.88$, ezek után a C együttható a $y(1) = -6.8 = C \cdot 0.2^1 - 38 \cdot 1 \cdot 0.2^1$ egyenletből számolható, és ezzel a megoldás a következő alakot ölti:

$$y(n) = 4\delta(n) + u(n)[4 - 38 \cdot n]0.2^n,$$

amely alak helyességét az ellenőrzés is megerősíti, mivel $y(2) = (4 - 38 \cdot 2)0.2^2 = -2.88$.

2.16) Adott egy lineáris, időinvaráns rendszer a következő differencia egyenlettel:

$$y(n) - 0.7y(n-1) + 0.1y(n-2) = 2x(n) - 0.4x(n-1) + 0.3x(n-2).$$

- Adja meg a rendszer impulzusválaszát időtartománybeli megoldással ($x(n) = \delta(n)$, $y(-1) = y(-2) = 0$)! Eredményét ellenőrizze!
- Adja meg a rendszer válaszát az $x(n) = u(n) \cdot 5 \cdot 0.5^n$ gerjesztés és $y(-1) = 30$, $y(-2) = 10$ kezdeti feltételek esetén az összetevőkre bontás módszerrel! Eredményét ellenőrizze!
- Rajzolja le a rendszer direkt és kanonikus blokkdiagramját! Jellemezze őket komplexitás szempontjából!

Megoldás

a)

A differencia egyenlet $\lambda^2 - 0.7\lambda + 0.1 = 0$ sajátérték egyenletéből kapjuk a $\lambda_1 = 0.2$ és $\lambda_2 = 0.5$ sajátértékeket, és ezzel a homogén megoldás a $y_h(n) = C_1 0.5^n + C_2 0.2^n$ alakú, ahol a

C_1 és C_2 együtthatókat a behelyettesítésből kapott $y(1) = 1$ és $y(2) = 0.8$ alapján ($y(M - N + 1)$ és $y(M - N + 2)$) a következő egyenletekből számítjuk:

$$y(1) = 1 = C_1 0.5 + C_2 0.2 \text{ és}$$

$$y(2) = 0.8 = C_1 0.5^2 + C_2 0.2^2,$$

amiből $C_1 = 4$ és $C_2 = -5$, és ezt behelyettesítve a homogén megoldás kifejezésébe kapjuk az $h(n) = 2\delta(n) + u(n-1)[4 \cdot 0.5^n - 5 \cdot 0.2^n]$ impulzusválasz függvényt. Az $n=3$ formulába helyettesítés esetén a $y(3) = 5 \cdot 0.5^3 - 4 \cdot 0.2^3 = 0.46$ érték és a differencia egyenletből behelyettesítéssel kapott $y(3) = 0.46$ érték összevetéséből látható, hogy helyes a megoldás.

b)

A homogén megoldás az előző alfeladat alapján $y_h(n) = C_1 0.5^n + C_2 0.2^n$, ahol a C_1 és C_2 együtthatókat a teljes válasz ismeretében kell majd kiszámítani. A partikuláris megoldást a gerjesztés alapján a $y_p(n) = K \cdot n \cdot 0.5^n$ alakban keressük ($n \geq M$), mivel az $x(n) = u(n) \cdot 5 \cdot (0.5)^n$ gerjesztés rezonál a rendszer $\lambda_2 = 0.5$ sajátértékével. A K együtthatót a differencia egyenletből behelyettesítéssel kaphatjuk meg:

$$K \cdot n \cdot 0.5^n - 0.7K \cdot (n-1)0.5^{n-1} + 0.1K \cdot (n-2)0.5^{n-2} =$$

$$= 2 \cdot 5 \cdot 0.5^n - 0.4 \cdot 5 \cdot 0.5^{n-1} + 0.3 \cdot 5 \cdot 0.5^{n-2},$$

amiből a bal és jobb oldali polinomok egyeztetése után $K = 20$, és a partikuláris válasz $y_p(n) = 20 \cdot n \cdot 0.5^n$ alakú $n \geq M$, azaz $n \geq 2$ esetén. A differencia egyenlet megoldását a két megoldás összegeként $y_{\text{ált}}(n) = C_1 0.5^n + C_2 0.2^n + 20 \cdot n \cdot 0.5^n$ alakban adható meg, ahol C_1 és C_2 együtthatókat a behelyettesítésből kapott $y(1) = 21$ és $y(2) = 14.7$ alapján ($y(M - N + 1)$ és $y(M - N + 2)$) a következő egyenletekből számítjuk:

$$y(1) = 21 = C_1 0.5^1 + C_2 0.2^1 + 20 \cdot 1 \cdot 0.5^1 \text{ és}$$

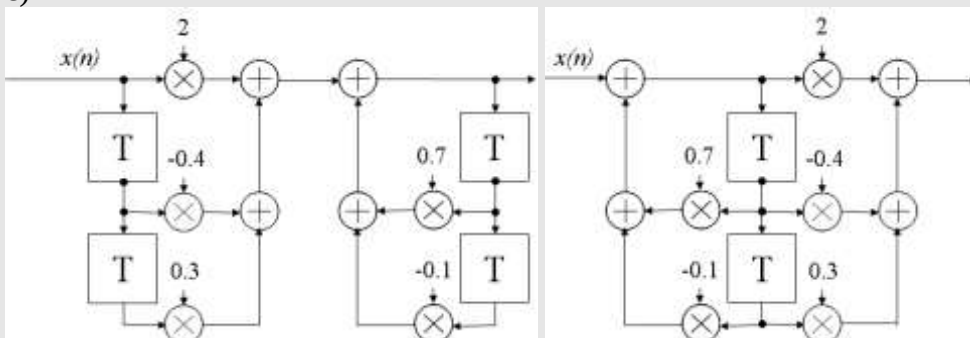
$$y(2) = 14.7 = C_1 0.5^2 + C_2 0.2^2 + 20 \cdot 2 \cdot 0.5^2$$

amiből $C_1 = \frac{50}{3}$ és $C_2 = \frac{40}{3}$. A differencia egyenlet megoldása a C_1 és C_2 együtthatók értékének behelyettesítése után:

$$y_{alt}(n) = 30\delta(n) + u(n-1) \left[\frac{50}{3} 0.5^n + \frac{40}{3} \cdot 0.2^n + 20 \cdot n \cdot 0.5^n \right].$$

Az $n=3$ formulába helyettesítés esetén a $y(3) = \frac{50}{3} 0.5^3 + \frac{40}{3} 0.2^3 + 20 \cdot 3 \cdot 0.5^3$ érték és a differencia egyenletből behelyettesítéssel kapott $y(3)=9.69$ érték összevetéséből látható, hogy a megoldás helyes.

c)



2.17) Adott egy lineáris, idő invariáns rendszer a következő differencia egyenlettel:

$$y(n) - y(n-1) + 0.5y(n-2) = 2x(n) - x(n-1).$$

- Adja meg a rendszer válaszát az $x(n) = u(n)2n^2$ gerjesztés és $y(-1) = y(-2) = 0$ kezdeti feltételek esetén! Eredményét ellenőrizze!
- Rajzolja le a rendszer direkt (Direkt I) és kanonikus (Direkt II transposed) blokkdiagramját! Jellemezze őket komplexitás szempontjából!

Megoldás

a)

A differencia egyenlet $\lambda^2 - \lambda + 0.5 = 0$ sajátérték egyenletéből kapjuk a $\lambda_1 = 0.5 + 0.5j$ és $\lambda_2 = 0.5 - 0.5j$ sajátértékeket, és ezzel a homogén megoldás a következő alakú:

$$y_h(n) = C_1 (0.5 - 0.5j)^n + C_2 (0.5 + 0.5j)^n.$$

A partikuláris megoldást a gerjesztés alapján a $y_p(n) = A + Bn + Cn^2$ alakban keressük ($n \geq M$), ahol A, B, C együtthatókat a differencia egyenletből behelyettesítéssel kaphatjuk meg:

$$\begin{aligned} A + Bn + Cn^2 - A + B(n-1) + C(n-1)^2 + 0.5[A + B(n-2) + C(n-2)^2] &= \\ &= 2 \cdot 2n^2 - 2(n-1)^2, \end{aligned}$$

amiből a bal és jobboldali polinomok egyeztetése után $A = -12$, $B = 8$ és $C = 4$, és így a partikuláris válasz $y_p(n) = -12 + 8n + 4n^2$ alakú $n \geq 1$ esetén. A teljes megoldás a homogén és partikuláris megoldások összege:

$$y_{alt}(n) = C_1 (0.5 - 0.5j)^n + C_2 (0.5 + 0.5j)^n - 12 + 8n + 4n^2, \quad (n \geq 1 \text{ esetén})$$

ahol C_1 és C_2 együtthatókat a következő egyenletekből számítjuk:

$$y(-1) = 0 = C_1 (0.5 - 0.5j)^{-1} + C_2 (0.5 + 0.5j)^{-1} - 12 - 8 + 4$$

$$y(0) = 0 = C_1 + C_2 - 12,$$

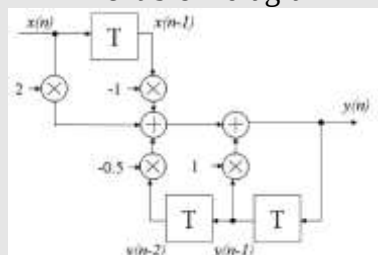
amiből $C_1 = 6 - 2j$ és $C_2 = 6 + 2j$. A differencia egyenlet megoldása a C_1 és C_2 együtthatók értékének behelyettesítése és a koszinuszos átalakítás után:

$$y_{\text{ált}}(n) = u(n) \left[12.6492 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^n \cos \left(n \frac{\pi}{4} + 18.43^\circ \right) - 12 + 8n + 4n^2 \right].$$

Az ellenőrzéshez felhasználjuk a behelyettesítésből nyert $y(1) = 4$, az általános megoldás az $n=2$ helyen $y_{\text{ált}}(n) = 12.6492 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 \cos \left(\frac{\pi}{4} + 18.43^\circ \right) - 12 + 8 + 4 = 4$, ami igazolja a formula helyességét.

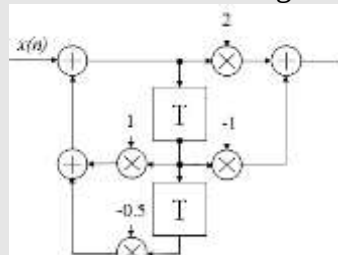
c)

Direkt blokkdiagram



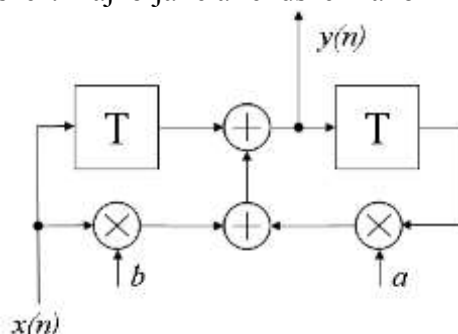
3 késleltető

Kanonikus blokkdiagram



2 késleltető

2.18) Adott az alábbi lineáris idővariáns rendszer! Adja meg a rendszer válaszát az $x(n) = u(n)a^n$ gerjesztés és relaxált rendszer esetén! Milyen a és b koefficiens esetén BIBO stabil a rendszer? Rajzolja le a rendszer kanonikus blokkdiagramját!



Megoldás

A blokkdiagram alapján felírható a rendszert leíró alábbi, elsőfokú differenciaegyenlet:

$$y(n) - a \cdot y(n-1) = b \cdot x(n) + x(n-1).$$

A differenciaegyenlet megoldását összetevőkre bontással végezzük, a homogén megoldást az $y_h(n) = C \cdot a^n$ alakban keressük, ahol a C együtthatót a kezdeti feltételek alapján fogjuk meghatározni. A partikuláris választ próbafüggvény módszerrel számítjuk, mivel az $x(n) = u(n)a^n$ gerjesztés és a homogén megoldás között rezonancia lép fel, a választott próbafüggvény a $y_{pr}(n) = u(n) \cdot K \cdot n \cdot a^n$ lesz, ahol a K együtthatót a differenciaegyenletbe történő behelyettesítés után az alábbi egyenletből kapjuk:

$$K \cdot n \cdot a^n - a \cdot K \cdot (n-1) \cdot a^{n-1} = b \cdot a^n + a^{n-1},$$

amiből $K = b + \frac{1}{a}$. A differenciaegyenlet általános megoldása a homogén és a partikuláris válasz összegeként adódik:

$$y_{\text{ált}}(n) = C \cdot a^n + \left(b + \frac{1}{a}\right) \cdot n \cdot a^n,$$

ahol a C együttható a differenciaegyenletből fokozatos behelyettesítéssel kapott $y(0) = b$ válasz alapján (mivel $M - N = 1 - 1 = 0$) kapható meg:

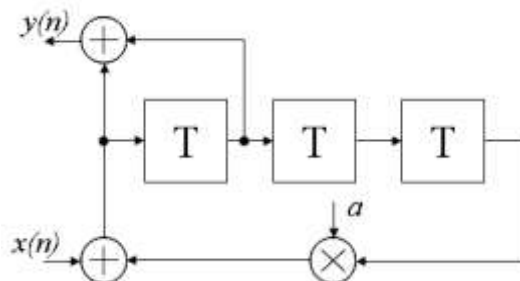
$$y_{\text{ált}}(n=0) = C = b,$$

és ezzel a válasz végső alakja a következő:

$$y_{\text{ált}}(n) = u(n) \left[b \cdot a^n + \left(b + \frac{1}{a}\right) \cdot n \cdot a^n \right],$$

aminek helyességét az $y_{\text{ált}}(n=1) = 2ab + 1$ és a fokozatos behelyettesítéssel kapott $y(1) = 2ab + 1$ egyenlősége igazol.

2.19) Adja meg az alábbi szűrő impulzusválasz függvényét! Milyen a koefficiens esetén BIBO stabil a rendszer?



Megoldás

A blokkdiagram alapján felírható az alábbi rendszeregyenlet:

$$y(n) - a \cdot y(n-3) = x(n) + x(n-1),$$

Az ez alapján felírható $\lambda^3 - a = 0$ karakterisztikus egyenlet $\lambda_1 = \sqrt[3]{a}$, $\lambda_2 = \sqrt[3]{a} \cdot e^{j\frac{2\pi}{3}}$, és $\lambda_3 = \sqrt[3]{a} \cdot e^{-j\frac{2\pi}{3}}$ gyökeiből a differenciaegyenlet homogén megoldását a következő alakban keressük:

$$y(n) = u(n) \cdot a^{\frac{n}{3}} \cdot \left[C_1 + C_2 \cdot e^{j\frac{2\pi}{3}n} + C_3 \cdot e^{-j\frac{2\pi}{3}n} \right],$$

ahol C_1 , C_2 és C_3 együtthatókat a differenciaegyenletből behelyettesítéssel kapott $y(-1)$, $y(0)$ és $y(1)$ alapján ($y(M - N + 1)$, $y(M - N + 2)$ és $y(M - N + 3)$) a következő egyenletekből számítjuk:

$$y(-1) = 0 = C_1 \cdot a^{-\frac{1}{3}} + C_2 \cdot a^{-\frac{1}{3}} \cdot e^{-j\frac{2\pi}{3}} + C_3 \cdot a^{-\frac{1}{3}} \cdot e^{j\frac{2\pi}{3}},$$

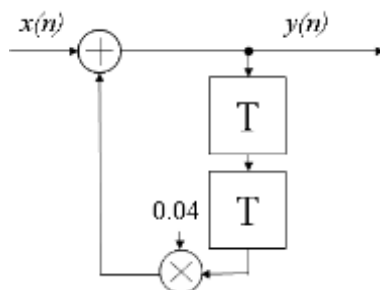
$$y(0) = 1 = C_1 + C_2 + C_3 \text{ és}$$

$$y(1) = 1 = C_1 \cdot a^{\frac{1}{3}} + C_2 \cdot a^{\frac{1}{3}} \cdot e^{j\frac{2\pi}{3}} + C_3 \cdot a^{\frac{1}{3}} \cdot e^{-j\frac{2\pi}{3}},$$

$$\text{amiből } C_3 = -1 - \frac{a^{-\frac{1}{3}}}{\sqrt{3}} \left(-2 - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right), C_2 = 1 + \frac{a^{-\frac{1}{3}}}{\sqrt{3}} e^{-j\frac{2\pi}{3}} \text{ és } C_1 = 1 + \frac{a^{-\frac{1}{3}}}{\sqrt{3}} e^{j\frac{\pi}{3}}.$$

A szűrő BIBO stabil, feltéve hogy $|a| < 1$, mivel ekkor a λ_i gyökök az egységgörön belül helyezkednek el.

2.20) Adott az alábbi lineáris időinvariáns rendszer az alábbi blokkdiagrammal:



- Adja meg a szűrő válaszát az $x(n) = u(n)$ gerjesztésre! Mi lesz a kimenet állandósult állapota?
- Adja meg a rendszer impulzusválaszát!

Megoldás

A blokkdiagram alapján az alábbi egyenlet írható fel: $y(n) - 0.04y(n-2) = x(n)$

A karakterisztikus egyenlet gyökei: $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{0.04} = \pm 0.2$,

amely alapján a homogén válasz: $y_h(n) = C_1 \cdot 0.2^n + C_2 \cdot (-0.2)^n$,

ahol $C_{1,2}$ együtthatók a kezdeti feltételekből számítandóak majd a későbbiekben.

- A rendszer partikuláris válaszát a $x(n) = u(n)$ gerjesztés alapján a $y_{pr}(n) = K$ alakban keressük, ahol a K együtthatót a differencia egyenletbe történő behelyettesítés után a következő egyenletből kapjuk:
 $K - 0.04 \cdot K = 1$, amiből $K = 1/0.96 = 1.041667$, és ezzel a rendszer válasza a következő alakú:

$$y_{\text{alt}}(n) = C_1 \cdot 0.2^n + C_2 \cdot (-0.2)^n + 100/96, \text{ ha } n \geq M - N = 0 - 2 = -2.$$

A $C_{1,2}$ együtthatót az $y(-2) = y(-1) = 0$ kezdeti feltételek alapján a következő egyenletekből számítjuk (lehetne $y(-2)$ alapján is számolni, de egyszerűbb $y(-1), y(0)$ -t használni):

$$y(-1) = 0 = C_1 \cdot 0.2^{-1} + C_2 \cdot (-0.2)^{-1} + 100/96 \rightarrow C_1 - C_2 = (-100/96) \cdot 0.2 = -5/24$$

$$y(0) = 0.04y(-2) + x(0) = 1 = C_1 \cdot 0.2^0 + C_2 \cdot (-0.2)^0 + 100/96 \rightarrow C_1 + C_2 = -4/96 = -1/24$$

,
↓

$$C_1 = C_2 - 5/24 \text{ és ezt behelyettesítve a másodikba: } C_2 - 5/24 + C_2 = -1/24 \rightarrow$$

$$C_2 = 2/24 \text{ és } C_1 = -3/24$$

Tehát a keresett válasz általános megoldása

$$y_{\text{alt}}(n) = u(n+2) \left[-3/24 \cdot 0.2^n + 2/24 \cdot (-0.2)^n + 100/96 \right] \text{ alakú lesz.}$$

A formula helyességét az is igazolja, hogy a behelyettesítéssel kapott $y(-2) = 0$

meg egyezik a formulából kapott $y_{\text{alt}}(-2) = -3/24 \cdot 0.2^{-2} + 2/24 \cdot (-0.2)^{-2} + 100/96 = 0$ értékkel.

b) A rendszer impulzusválaszát a homogén válaszból kapjuk:

$$h(n) = y_h(n) = C_1 \cdot 0.2^n + C_2 \cdot (-0.2)^n, \text{ ha } n \geq M - N + 1 = 0 - 2 + 1 = -1$$

A $C_{1,2}$ együtthatót az $y(-1)=0, y(0)=1$ kezdeti feltételek alapján a következő egyenletekből számítjuk:

$$y(-1)=0 = C_1 \cdot 0.2^{-1} + C_2 \cdot (-0.2)^{-1} \rightarrow C_1 - C_2 = 0$$

$$y(0)=1 = C_1 \cdot 0.2^0 + C_2 \cdot (-0.2)^0 \rightarrow C_1 + C_2 = 1$$

↓

$$C_1 = C_2 = 0.5$$

Tehát a rendszer impulzusválasza a következő formában áll elő:

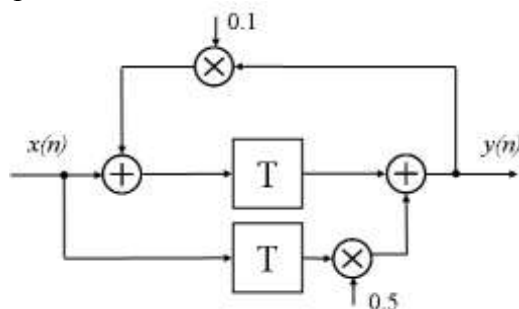
$$h(n) = u(n+1) \cdot [0.5 \cdot 0.2^n + 0.5 \cdot (-0.2)^n]$$

A formula helyességét az is igazolja, hogy a behelyettesítéssel kapott $y(1)=0$

meg egyezik a formulából kapott $y_{\text{ált}}(1) = 0.5 \cdot 0.2^1 + 0.5 \cdot (-0.2)^1 = 0$ értékkel (illetve

$y_{\text{ált}}(2) = 0.5 \cdot 0.2^2 + 0.5 \cdot (-0.2)^2 = 0.04$ is helyes eredményre vezet)

2.21) Adott az alábbi lineáris időinvariáns rendszer! Töltse ki a táblázatot! A rendszer a gerjesztések rákapcsolása előtt minden esetben relaxált állapotú!



Gerjesztés	Válasz
$x_1(n) = u(n)0.1^n$	
$x_2(n) = u(n-1)0.1^{n-1}$	
$x_3(n) = u(n)0.5^n$	$y(n) = u(n) \left[-\frac{15}{4} \cdot 0.1^n - \frac{15}{4} \cdot 0.5^n \right]$
$x_4(n) = u(n) \left[0.1^n + 0.5^n \right]$	

Megoldás

A blokkdiagram alapján az alábbi két egyenlet írható fel:

$u(n) = x(n) + 0.1y(n)$ (a felső tároló állapotváltozójára vonatkozó), és

$y(n) = u(n-1) + 0.5x(n-1)$ (kimeneti egyenlet),

Amely két egyenletből behelyettesítés után kifejezhető a $y(n) - 0.1y(n-1) = 1.5x(n-1)$

rendszeregyenlet. A rendszer válasza az $x_1(n) = u(n)0.1^n$ gerjesztésre időtartománybeli analízisből, összetevőkre bontással számolható. A rendszer homogén válaszát megkapjuk a karakterisztikus egyenlet gyöke(i) alapján:

$$y_h(n) = C \cdot 0.1^n,$$

ahol C együttható a kezdeti feltételekből számítandó. A rendszer partikuláris válaszát a gerjesztés alapján a $y_{pr}(n) = K \cdot n \cdot 0.1^n$ alakban keressük, ahol a K együtthatót a differencia egyenletbe történő behelyettesítés után a következő egyenletből kapjuk:

$$K \cdot n \cdot 0.1^n - 0.1 \cdot K \cdot (n-1) \cdot 0.1^{n-1} = 1.5 \cdot 0.1^{n-1},$$

amiből $K = 15$, és ezzel a rendszer válasza a következő alakú:

$$y_{alt}(n) = C \cdot 0.1^n + 15 \cdot n \cdot 0.1^n, \text{ ha } n \geq 0.$$

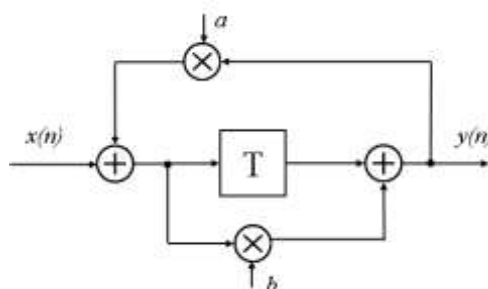
A C együtthatót az $y(-1) = 0$ kezdeti feltétel alapján a következő egyenletből számítjuk:

$$y(0) = 0 = C,$$

tehát a keresett válasz általános megoldása $y_{alt}(n) = u(n) [15 \cdot n \cdot 0.1^n]$ alakú lesz. A formula helyességét az is igazolja, hogy a behelyettesítéssel kapott $y(1) = 1.5$ megegyezik a formulából kapott $y_{alt}(n) = 15$ értékkel. A táblázat a következőképpen töltendő ki:

Gerjesztés	Válasz	Megjegyzés
$x_1(n) = u(n)0.1^n$	$y_1(n) = u(n) [15 \cdot n \cdot 0.1^n]$	A fenti számítás alapján.
$x_2(n) = u(n-1)0.1^{n-1}$	$y_2(n) = u(n-1) [15 \cdot (n-1) \cdot 0.1^{n-1}]$	Időinvariancia miatt.
$x_3(n) = u(n)0.5^n$	$y_3(n) = u(n) \left[-\frac{15}{4} \cdot 0.1^n - +\frac{15}{4} \cdot 0.5^n \right]$	
$x_4(n) = u(n) [0.1^n + 0.5^n]$	$y_4(n) = u(n) \left[15 \cdot n \cdot 0.1^n - \frac{15}{4} \cdot 0.1^n - +\frac{15}{4} \cdot 0.5^n \right]$	Linearitás miatt.

- 2.22)** Adott az alábbi lineáris szűrő. Milyen a és b paraméter esetén BIBO stabil a rendszer? Rajzolja fel a BIBO stabilitás tartományát az $a - b$ paramétersíkon! Adja meg a szűrő impulzusválaszát! Rajzolja le a rendszer kanonikus blokkdiagramját!



Az $a = -1$; $b = 2$ paraméterek esetén adja meg a rendszert jellemző differencia egyenletet és impulzusválaszát!

Megoldás (csak az utolsó kérdésre)

Az állapotegyenletek a $v(n) = 2y(n) + x(n)$ és $y(n) = v(n-1) - x(n)$ alakban írhatóak fel, ahol $v(n)$ a késleltető kimenete, ebből behelyettesítés és rendezés után kapjuk a $y(n) - 2y(n-1) = -x(n) + x(n-1)$ differencia egyenletet, ami egyértelműen leírja a rendszert. Ez a rendszeregyenlet egy elsőfokú lineáris differencia egyenlet, amelynek keressük a megoldását impulzusfüggvény gerjesztés esetén. A megoldást $y_h(n) = C \cdot 2^n$ alakban

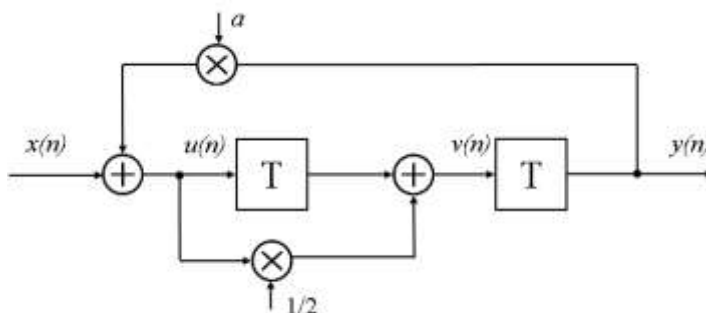
keressük, ahol a C együttható kiszámításához meg kell határozni $n=0..1$ helyeken (általánosan $n=0, \dots, N-M+1$) $y_h(n)$ értékét, amelyek a differenciaegyenletbe történő behelyettesítésekkel adódnak: $y(0)=-1$ és $y(1)=3$ valamint az ellenőrzéshez $y(2)=6$. A C együttható értéke a $y(n=1)=3=C \cdot 2^1$ egyenletből $C=3/2$, és ezzel a rendszer impulzusválasza $h(n)=-\delta(n)+u[n-1]3/2 \cdot 2^n$ alakú. A kapott impulzusválasz helyességét igazolja, hogy $n=2$ helyettesítés esetén $h(2)=6$, ami megegyezik a behelyettesítéssel kapott $y(2)=6$ értékkel.

2.23) Adott egy lineáris, időinvariáns rendszer a következő differenciaegyenlettel:

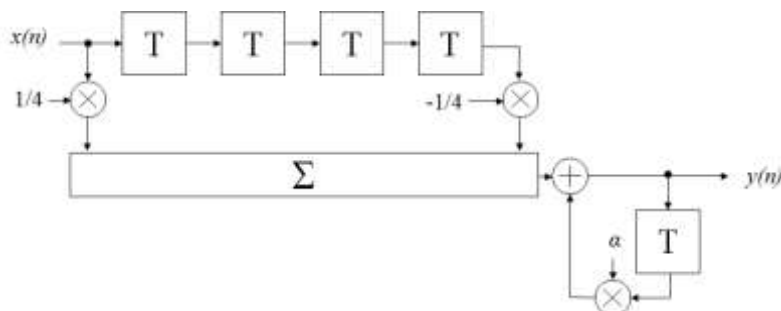
$$y(n) - 0.2y(n) + 0.01y(n-2) = x(n) + x(n-1)$$

- Adja meg a rendszer impulzusválaszát! Milyen típusú a rendszer?
- Adja meg a rendszer átviteli függvényét, és rajzolja le a pólus-zérus elrendezését! Stabil-e a rendszer?
- Adja meg a rendszer válaszát az $x(n)=u(n)0.1^n$ gerjesztés és a $y(-1)=0$ és $y(-2)=0$ kezdeti feltételek esetén!
- Rajzolja le a rendszer direkt és kanonikus blokkdiagramját! Jellemezze őket a komplexitás szempontjából!

2.24) Milyen a együttható esetén BIBO stabil az alábbi szűrő?



2.25) Adott az alábbi lineáris időinvariáns rendszer:



- Milyen a együttható esetén BIBO stabil a rendszer? Milyen típusú a rendszer?
- Adja meg $a=-1$ esetén rendszer impulzusválaszát! BIBO stabil a rendszer?
- Rajzolja le a rendszert $a=-1$ esetén minimális számú késleltetővel!
- Adja meg $a=-1$ esetén a rendszer válaszát az $x(n)=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ gerjesztésre! Miért hívják mozgó átlagolónak ezt a rendszert?

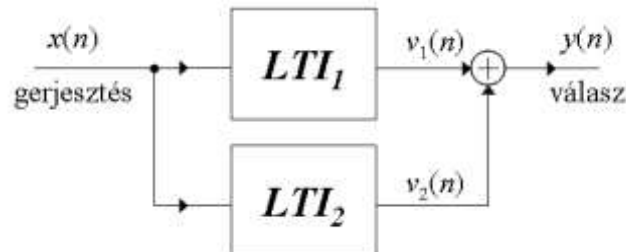
2.26) Összetevőkre (homogén és parciális) bontással oldja meg az alábbi differencia egyenleteket:

- a) $y(n) - 0.25y(n-1) = 2x(n) - x(n-1)$
- $x(n) = u(n)0.8^n$ és $y(-1) = 0$
 - $x(n) = u(n)0.5^n$ és $y(-1) = 0$
 - $x(n) = u(n)10\cos(n\pi/10)$ és $y(-1) = 0$
- b) $y(n) + 0.16y(n-2) = 2x(n-1) + 0.32x(n-2)$
- $x(n) = u(n)$ (átviteli függvény) és $y(-1) = 0, y(-2) = 0$
 - $x(n) = u(n)0.5^n$ és $y(-1) = 0, y(-2) = 0$
 - $x(n) = \delta(n)$ (impulzusválasz) és $y(-1) = 0, y(-2) = 0$
- c) $y(n) - 0.5y(n-1) = x(n) + x(n-1) - x(n-2)$
- $x(n) = u(n)$ és $y(-1) = 0.5$
 - $x(n) = u(n)0.5^n$ és $y(-1) = 0.5$
 - $x(n) = u(n)n$ és $y(-1) = 0.5$
- d) $y(n) - 0.6y(n-1) + 0.05y(n-2) = x(n) - 1.1x(n-1)$
- $x(n) = u(n)$ és $y(-1) = 0, y(-2) = 0$
 - $x(n) = u(n)0.2^n$ és $y(-1) = 0, y(-2) = 0$
 - $x(n) = u(n)0.5^n$ és $y(-1) = 0, y(-2) = 0$
- e) $y(n) + 0.1y(n-1) - 0.06y(n-2) = x(n) + 2x(n-1)$
- $x(n) = u(n)\cos(0.5n)$ és $y(-1) = 0, y(-2) = 0$
 - $x(n) = u(n)\sin(0.5n)$ és $y(-1) = 0, y(-2) = 0$
 - $x(n) = u(n)n^2$ és $y(-1) = 0, y(-2) = 0$
- f) $y(n) - 0.4y(n-1) + 0.04y(n-2) = x(n) + x(n-2)$
- $x(n) = u(n)$ és $y(-1) = 0, y(-2) = 0$
 - $x(n) = u(n)0.2^n$ és $y(-1) = 0, y(-2) = 0$
 - $x(n) = u(n)\cos(0.5n)$ és $y(-1) = 0, y(-2) = 0$
- g) $y(n) - 0.5y(n-1) = x(n) - 5x(n-1) + 6x(n-2)$
- $x(n) = u(n)$ és $y(-1) = 0$
 - $x(n) = u(n)0.5^n$ és $y(-1) = 0$
 - $x(n) = u(n)n$ és $y(-1) = 0$

2.27) Két lineáris időinvariáns rendszer párhuzamos kapcsolásából alakítható ki egy eredő szűrő, ahol LTI1 és LTI2 szűrő az alábbi differenciaegyenletekkel adott:

$$\text{LTI1: } y(n) - y(n-1) = x(n) + x(n-1);$$

$$\text{LTI2: } y(n) - 0.5y(n-1) = 0.5x(n).$$



- Adja meg az eredő rendszer impulzusválasztát!
- Adja meg a rendszer $x(n) = u(n)0.5^n$ gerjesztésre adott választ differenciaegyenlet időtartománybeli megoldásával, ha rendszer relaxált állapotban volt!
- Adja meg az eredő átviteli függvényt (konvergencia régióval együtt)! Rajzolja le a rendszer pólus-zérus elrendezését! Stabil-e a rendszer?
- Rajzolja le az eredő átviteli függvény alapján a rendszer kanonikus blokkdiagramját!

2.28) Adott egy lineáris, időinvariáns rendszer a következő differenciaegyenlettel:

$$y(n) + 0.1y(n-1) - 0.2y(n-2) = x(n) - 2x(n-1)$$

- Adja meg a rendszer impulzusválasztát (időtartománybeli megoldással)!
- Adja meg a rendszer választ összetevőkre (homogén és parciális megoldás) bontással a $x(n) = u(n)n^2$ gerjesztés és a $y(-1) = 0$ és $y(-2) = 0$ kezdeti feltételek esetén!
- Rajzolja fel a rendszer direkt és kanonikus blokkdiagramját! Jellemezze a két implementációt a komplexitás szempontjából!