

Adaptív jelfeldolgozás

- 7.1)** Hogyan tudjuk becsülni az $\mathbf{R}$ korrelációs mátrixot megfigyelések alapján? Mutasson egy példát $\mathbf{R}$ korrelációs mátrixra, ha a dimenziószáma legalább 4! A korrelációs mátrix alapján írja fel a Wiener szűrő optimális beállítására vonatkozó rekurzióját a leggyorsabb konvergenciát garantáló Δ paraméterrel!

Megoldás

Egy sztochasztikus folyamat korrelációs mátrixa definíció szerint $R_{ij} = E\{x_i x_j\}$, a megfigyelések alapján a korrelációs mátrix becsülhető az

$$\tilde{R}_{ij} = \frac{1}{K - \max(i, j)} \sum_{m=0}^{K - \max(i, j)} x_{i+m} x_{j+m} \text{ statisztikával. Példa egy 4 dimenziós korrelációs}$$

mátrixra:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 & 1 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0.5 & 1 \end{bmatrix}.$$

A leggyorsabb konvergenciát garantáló Δ paramétert az $\mathbf{R}$ korrelációs mátrix sajátértékeiből határozhatjuk meg. Az $\mathbf{R}$ mátrix sajátértékei $\lambda_1 = 0.191$, $\lambda_2 = 0.691$, $\lambda_3 = 1.309$ és $\lambda_4 = 1.809$, amiből az optimális Δ paraméter a következő:

$$\Delta_{opt} = \frac{2}{\lambda_{\min} + \lambda_{\max}} = \frac{2}{0.191 + 1.809} = 1.$$

- 7.2)** Egy véletlen folyamatot kívánunk egy másodfokú prediktorral tömöríteni. A véletlen folyamat korrelációs függvénye a következő:

$$R(0) = 1 \quad R(1) = 0.5 \quad R(2) = 0.2$$

- Írja fel a korrelációs mátrixot, és a korrelációs vektort!
- Adja meg a folyamat tömörítéséhez használt másodfokú prediktor optimális együtthatóit!

- 7.3)** Egy véletlen folyamatot kívánunk egy másodfokú prediktorral tömöríteni. A szűrőegyütthatók optimális beállítása esetén a négyzetes várhatóérték minimális (MMSE).

- Adja meg a $\mathbf{w}_{opt}$ optimális szűrőegyüttható vektort, ha a korrelációs függvény becslésének értékei $R(0) = 1, R(1) = 0.2, R(2) = 0.1$!
- Adja meg a Wiener szűrés rekurzív $\mathbf{w}(k)$ megoldását az iteráció $k=1, 2$ lépéseire $\mathbf{w}(0) = [1 \ 0 \ 0]^T$ kezdeti súlyok esetén!

- c) Mutassa meg, hogy az $MSE(\mathbf{w}(k))$ lépésről lépésre közelebb kerül a minimális $MMSE=MSE(\mathbf{w}_{opt})$ értékhez! Rajzolja le az $MSE(\mathbf{w}(k))$ négyzetes várható hibát a k lépésszám függvényében (az ábrán vízszintes vonallal jelölje az optimális szűrőegységhez tartozó $MMSE$ értéket)!
- d) Adja meg a $\mathbf{w}'_{opt}$ optimális szűrőegység vektort, ha az $y(k-1)$ és $y(k-2)$ minták megfigyeléséből az $y(k+1)$ értéket kívánjuk predikálni (az $y(k)$ helyett)!

Megoldás

a) Predikcióról lévén szó: $d(k) = y(k)$, vagyis $y(k-1)$ és $y(k-2)$ minták (2-fokú predikció) megfigyeléséből jósoljuk a következőt. Ebből kifolyólag:

$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0.2 \\ 0.2 & 1 \end{bmatrix}$ és $\mathbf{r} = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.1 \end{bmatrix}$. Ezeket behelyettesítve a normálegyenletbe kapjuk meg $\mathbf{w}_{opt}$ -

$$\text{ot: } \mathbf{w}_{opt} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{r} = \frac{1}{0.96} \begin{bmatrix} 1 & -0.2 \\ -0.2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.1 \end{bmatrix} = \frac{1}{0.96} \begin{bmatrix} 0.18 \\ 0.06 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1875 \\ 0.0625 \end{bmatrix}$$

b) $\mathbf{w}(k+1) = \mathbf{w}(k) - \Delta \{\mathbf{R}\mathbf{w}(k) - \mathbf{r}\}$, ahol $\Delta = 1$ jó választás, mivel $\mathbf{R}$ mátrix sajátértékei: 0.8 és 1.2.

$$\text{Ez alapján: } \mathbf{w}(1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 1 \cdot \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0.2 \\ 0.2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.1 \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} 0.2 \\ -0.1 \end{bmatrix} \text{ és}$$

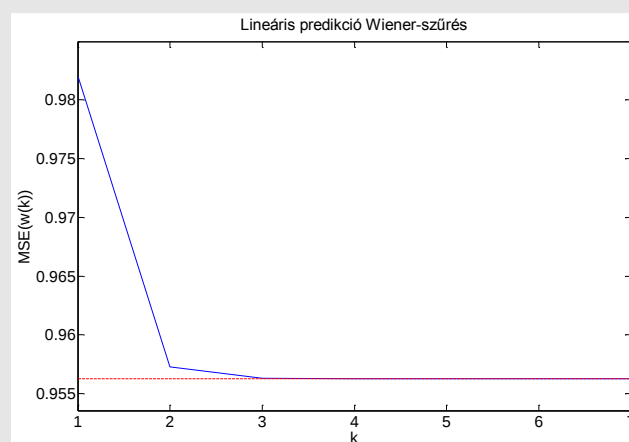
$$\mathbf{w}(2) = \begin{bmatrix} 0.2 \\ -0.1 \end{bmatrix} - 1 \cdot \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0.2 \\ 0.2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.2 \\ -0.1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.1 \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} 0.22 \\ 0.06 \end{bmatrix}$$

$$\text{c) } J(\mathbf{w}) = E \left[\left(d_k - \sum_{j=0}^J w_j x_{k-j} \right)^2 \right] = E[d_k^2] - 2\mathbf{w}^T \mathbf{r} + \mathbf{w}^T \mathbf{R} \mathbf{w} \text{ alapján}$$

$$MSE(\mathbf{w}(0)) = E[d_k^2] - 2\mathbf{w}(0)^T \mathbf{r} + \mathbf{w}(0)^T \mathbf{R} \mathbf{w}(0) = R_{1,1} + 0.6 = 1 + 0.6 = 1.6$$

$$MSE(\mathbf{w}(1)) = 1 - 0.018 = 0.982, \quad MSE(\mathbf{w}(2)) = 1 - 0.0427 = 0.9573 \text{ és}$$

$$MMSE = MSE(\mathbf{w}_{opt}) = 1 - 0.04375 = 0.95625$$



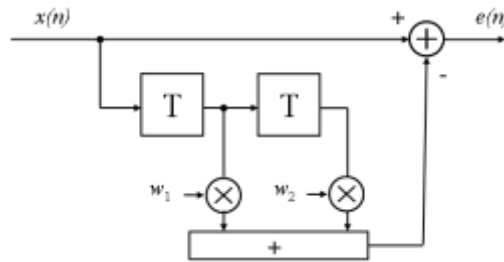
d) Ebben az esetben: $d(k) = y(k+1)$, és $y(k-1)$ és $y(k-2)$ minták (2-fokú predikció) megfigyeléséből jósoljuk a következő utánt. Ebből kifolyólag:

$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0.2 \\ 0.2 & 1 \end{bmatrix}$ és $\mathbf{r} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0 \end{bmatrix}$ (csak a keresztkorrelációs vektor módosul). Ezeket

behelyettesítve a normálegyenletbe kapjuk meg $\mathbf{w}'_{\text{opt}}$ -ot:

$$\mathbf{w}'_{\text{opt}} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{r} = \frac{1}{0.96} \begin{bmatrix} 1 & -0.2 \\ -0.2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{0.96} \begin{bmatrix} 0.1 \\ -0.02 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.10417 \\ -0.02083 \end{bmatrix}$$

7.4) Adott egy másodfokú prediktor az alábbi blokkdiagram szerint:



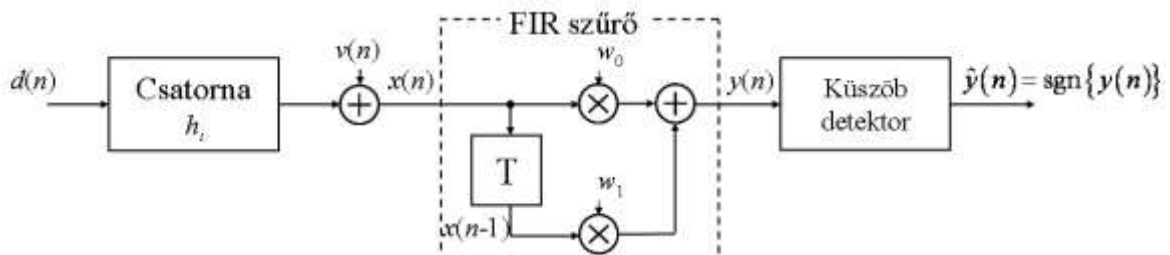
- a) Határozza meg a $\mathbf{w}_{\text{opt}}$ optimális szűrőparamétereket és az $\text{MSE}(\mathbf{w}_{\text{opt}})$ négyzetes hibát, ha a bemeneti jel az alábbi:

$$x(n) = \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) + v(n),$$

ahol $v(n)$ 0 várhatóértékű Gaussi fehér zaj $\sigma_v^2 = 0.1$ varianciával!

- b) Generáljon egy $n=1, \dots, 1000$ mintasorozatot, és használja a Wiener szűrés rekurzív alakját az optimális paraméterek meghatározásához ($\Delta=1$)! Ábrázolja a rekurzió során az $\text{MSE}(\mathbf{w}(k))$ hibát! (**MATLAB-on javasolt!**)
c) Oldja meg az előző alfeladatot Δ_{opt} esetén!

7.5) Egy vezeték nélküli kommunikációs rendszerben a csatorna okozta lineáris torzítását másodfokú FIR szűrővel egyenlítjük ki. A kiegyenlítő együtthatók beállítására LMS algoritmust használunk $\Delta=1$ tanulási paraméterrel, a kezdeti állapot $\mathbf{w}(0) = [1 \ 0.1]^T$.



A küldött $d(n) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{\uparrow}$ jelsorozat a $\mathbf{h} = [1 \ 0.5]^T$ impulzusválaszú csatorna lineárisan torzítja (FIR modell), majd a $v(n)$ gaussi fehér zaj adódik hozzá.

A vevő kimenetén megfigyelhető az

$$x(n) = \begin{bmatrix} 0 & 0.65 & 0.15 & -0.82 & -0.42 & 0.77 \end{bmatrix}_{\uparrow} \text{ jelsorozat.}$$

- Adja meg az LMS algoritmus $\tau^{(K)} = \{(d_i, x_i); i = 1, \dots, K\}$ tanulóhalmazát $K=5$ esetén!
- Adja meg a $k=4$ ütem végén a $\mathbf{w}(4)$ együtthatóvektort!
- Mutassa meg, hogy az $\text{MSE}(\mathbf{w}(k))$ lépésről lépésre közelebb kerül a minimális $\text{MMSE} = \text{MSE}(\mathbf{w}_{\text{opt}})$ értékhez! Rajzolja le az $\text{MSE}(\mathbf{w}(k))$ négyzetes várható hibát a k lépésszám függvényében (az ábrán vízszintes vonallal jelölje az optimális szűrőegyütthatóhoz tartozó MMSE értéket)!

Megoldás

a) $\tau^{(K)} = \{(d_i, x_i); i = 1, \dots, 5\} = \{(1, 0.65), (-1, 0.15), (-1, -0.82), (1, -0.42), (1, 0.77)\}$

b) $w_l(k+1) = w_l(k) - \Delta(k) \left\{ \sum_{j=0}^J w_j x_{k-j} - d_k \right\} x_{k-l}, l = 0, \dots, J$ és $\Delta(k) = 1$ alapján

végigszámolható, pl.

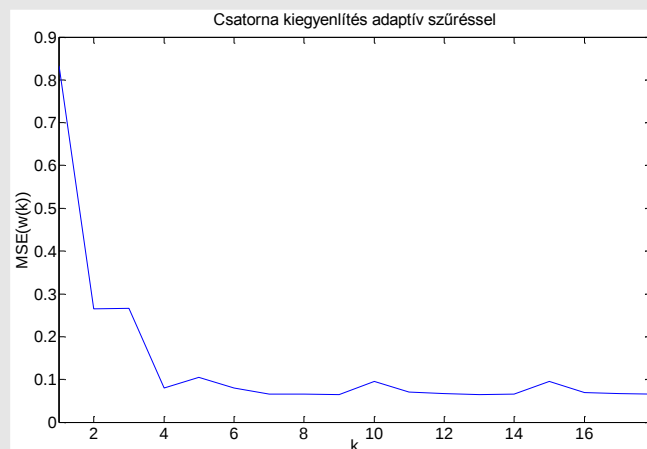
$$w_0(1) = w_0(0) - 1 \cdot \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0.1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.65 \\ 0 \end{bmatrix} - 1 \right\} \cdot 0.65 = 1.2275 \text{ és}$$

$$w_1(1) = w_1(0) - 1 \cdot \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0.1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.65 \\ 0 \end{bmatrix} - 1 \right\} \cdot 0 = 0.1$$

A fentiek alapján el lehet jutni $\mathbf{w}(4)$ -ig: $\mathbf{w}(2) = [1.0401 \ -0.7119]^T$,

$$\mathbf{w}(3) = [1.0401 \ -0.7119]^T, \mathbf{w}(4) = [0.7111 \ -1.4248]^T$$

c)



7.6) Egy véletlen folyamatot kívánunk egy harmadfokú prediktorral tömöríteni. A szűrőegyütthatók optimális beállítása esetén a négyzetes várhatóérték minimális (MMSE).

- Adja meg az $\mathbf{R}$ korrelációs mátrixot, ha a korrelációs vektor $\mathbf{r} = [0.5 \ 0 \ 0.2]^T$?
- Lehet-e $\mathbf{w}_{\text{opt}} = [0.85 \ -0.7 \ 0.55]^T$ az optimális szűrőegyüttható vektor?
- Az $\mathbf{R}$ korrelációs mátrix sajátértékei ismeretében ($\lambda_1 = 0.2929$, $\lambda_2 = 1$ és $\lambda_3 = 1.7071$) milyen Δ tanulási paraméter esetén lesz a leggyorsabb az LMS algoritmus konvergenciája? Igazolja, hogy a megadott megoldás az optimális!

7.7) Egy véletlen folyamatot kívánunk egy másodfokú prediktorral tömöríteni. A szűrőegyütthetők optimális beállítása esetén a négyzetes várhatóérték minimális (MMSE).

- a) Adja meg a $\mathbf{w}_{\text{opt}}$ optimális szűrőegyütthetők vektort, ha a korrelációs függvény becslésének értékei $R(0)=1, R(1)=0.5, R(2)=0$!
- b) Tegyük fel, hogy a korrelációs függvény $R(1)$ értékét csak δ hibával tudjuk becsülni (azaz $R(0)=1, R(1)=0.5 \pm \delta, R(2)=0$). Adja meg és rajzolja fel a négyzetes várhatóértéket (MSE) a δ hiba függvényében, ha a $\mathbf{w}_{\text{opt}}$ optimális szűrőegyütthetők az előző feladatban kiszámoltak!

7.8) Egy vezetékek nélküli kommunikációs rendszerben a csatorna okozta lineáris torzítását harmadfokú FIR szűrővel egyenlítjük ki. A kiegyenlítő együtthetők beállítására LMS algoritmust használunk $\Delta=1$ tanulási paraméterrel, a kezdeti állapot $\mathbf{w}(0)=[1 \ 0.1 \ 0.1]^T$, a tanulólármaz $\tau^{(5)} = \{(1, 0.3); (-1, -0.5); (-1, 0.1); (1, 1.1); (1, 0.9)\}$. Adja meg a $k=1$ ütem végén a $\mathbf{w}(1)$ együtthetők vektort! (Megj.: $\tau^{(K)} = \{(d_i, x_i); i=1, \dots, K\}$)