Pannon Egyetem
Képfeldolgozás és Neuroszámítógépek Tanszék

Digitális Rendszerek (BSc)

1. előadás: Logikai egyenletek leírása I.
Boole-algebra axiómái és tételei

Előadó: Vörösházi Zsolt
voroshazi@vision.vein.hu

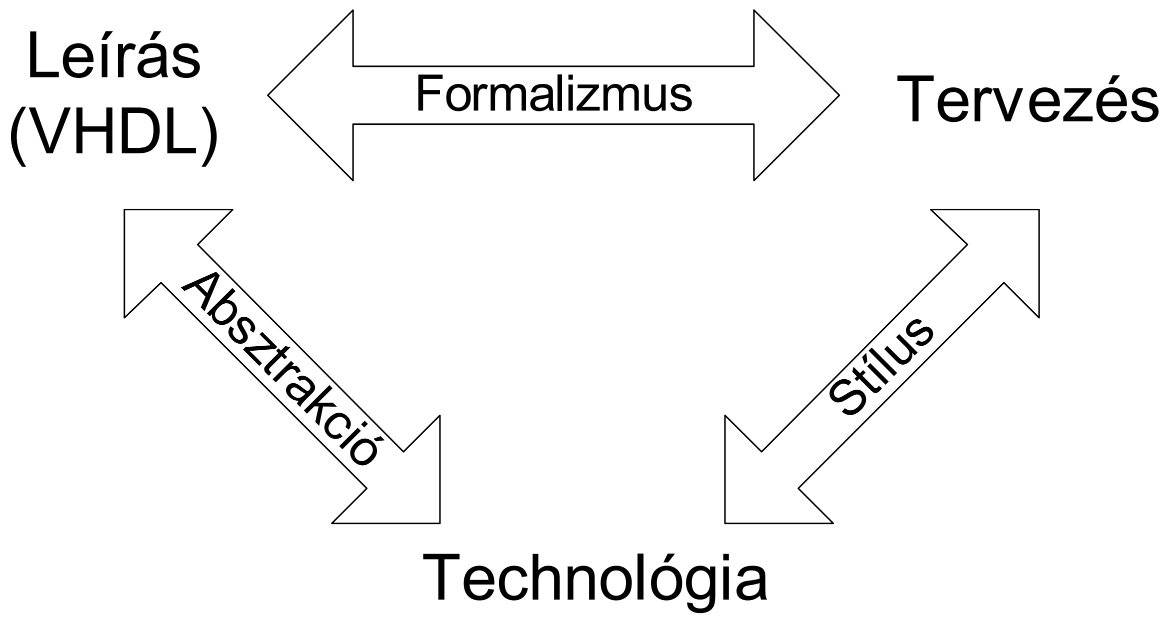
Jegyzetek, segédanyagok:

- Könyvfejezetek:
  - http://www.knt.vein.hu
    -> Oktatás -> Tantárgyak -> Digitális Rendszerek (BSC).

    (00_chapter, 01_chapter.pdf)
- Fóliák, óravázlatok .ppt (.pdf)
- Feltöltésük folyamatosan

I. Logikai egyenletek leírása

- Stílus – Absztrakció – Formalizmus



Stílus

- Komplex feladat $\Rightarrow$ egyszerűbb, kezelhető részfeladatokra bontása
  - Szisztematikus
  - Érthető módszerek kellenek

  Pl: programozási stílusok (Top-down, strukturált)

- Jó stílus kialakításának szabályai:
  - Top-down módszer szerinti tervezés
  - Csak kiforrott, biztos technikákat szabad alkalmazni
  - Fontos a dokumentálás!

Absztrakció

- Digitális tervezés „elvi-fogalmi” szintje
  - Kezdeti absztrakció a tervezés során meghatározó, kritikus pont!
    - 1. koncepcionális modell (elvi elgondolás)
    - 2. megvalósítható, realizálható modell (HW)
  - Magas-szintű absztrakció $\Rightarrow$ elvi modell szintenkénti finomítása és felépítése

Formalizmus

- A rendszer viselkedésének leírására szolgál
  - Szisztematikus szabályok és eljárások
  - Minden absztrakciós szinten fontos a használatuk
    - Pl: alapvető formalizmus a Boole-algebra (bináris logika elmélete) – de csak alsóbb szinteken használható

(felsőbb-, rendszer-szint)		(alsóbb-, áramköri szint)
Absztrakció	⇔	Boole algebra (konkretizálás)

Digitális tervezés

- Logikai konstansok:
  - Logikai állítás: Igaz / Hamis, True / False, 1 / 0
- Logikai (bináris) változók:
  - Pl: ‘A’ logikai változó esetén legyen,
    A:=fotódióda hiba
    ‘A’ lehet: T / F (A=F nincs hiba; A=T hiba)
  - Logikai változó neve utaljon a funkciójára
- Logikai operátorok:
  - Felírásuk igazság táblázattal (Truth Table)

Igazságtábla: logikai operátorok felírása

- ‘X’ logikai függvény megadása az ‘A,C,B’ logikai változók összes lehetséges értékétől függően
Jel: X(A,C,B) //3 változó -> 2^3 = 8 sor//

A	C	B	X
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

A	C	B	X	**sor**
F	F	F	F	**0.**
F	F	T	T	**1.**
F	T	F	T	**2.**
F	T	T	F	**3.**
T	F	F	T	**4.**
T	F	T	F	**5.**
T	T	F	F	**6.**
T	T	T	F	**7.**

- Kanonikus „standard” igazság tábla:
000 – 111 -ig (3 változó esetén)

Logikai operátorok és igazság táblázatuk (NOT)

- Jel: $\mathrm{NOT\ A} = \overline{A}$
- Formális definíció igazságtáblával:

A	NOT A
0	1
1	0

- Def:
  - ha A hamis, NOT A igaz
  - ha A igaz, NOT hamis

Logikai operátorok és igazság táblázatuk (AND)

- Jel: B **AND** C = B·C
- Formális definíció igazságtáblával:

B	C	B·C
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

- Def: B·C értéke pontosan akkor ‘igaz’ ha ‘B’ és ‘C’ is egyszerre ‘igaz’, különben hamis

Logikai operátorok és igazság táblázatuk (OR)

- Jel: B **OR** C = B**+**C
- Formális definíció igazságtáblával:

B	C	B+C
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

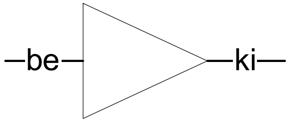
- Def: B**+**C értéke pontosan akkor ‘igaz’ ,ha ‘B’ és ‘C’ közül legalább az egyik ‘igaz’, különben hamis

Egy ill. kétváltozós logikai függvények bemutatása és szabványos jelöléseik

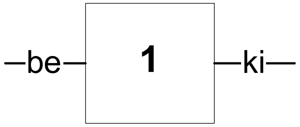
Egyváltozós logikai függvények:

- Jelmásoló (jel-erősítés):

be	ki
0	0
1	1



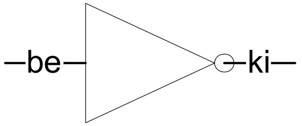
Nemzetközi szabvány

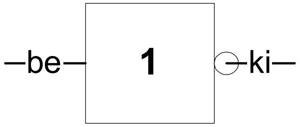


Magyar szabvány

- Negálás - Inverter (NOT):

be	ki
0	1
1	0

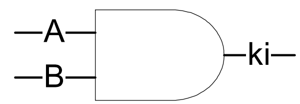


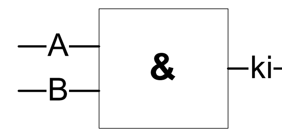


Kétváltozós logikai függvények:

- ÉS (AND):

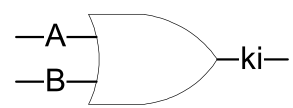
A	B	ki
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

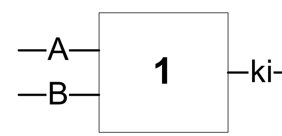




- VAGY (OR):

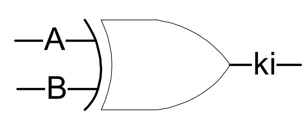
A	B	ki
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

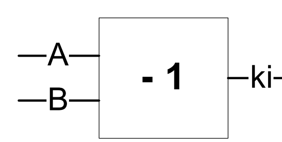




- Antivalencia (XOR):

A	B	ki
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

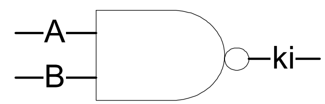


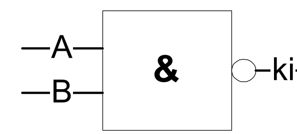


Kétváltozós log.függv. (folyt.):

- NEM-ÉS (NAND):

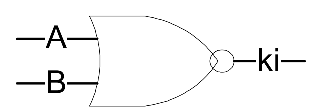
A	B	ki
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

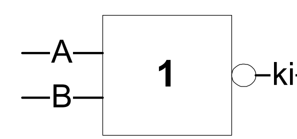




- NEM-VAGY (NOR):

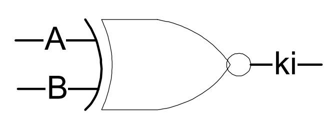
A	B	ki
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

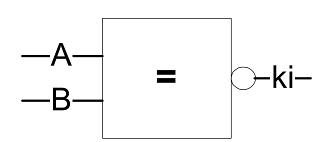




- Ekvivalencia (NXOR):

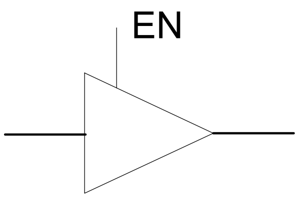
A	B	ki
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1



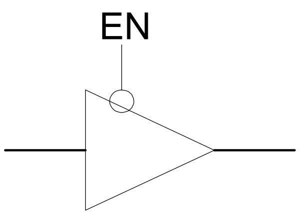


Tri-State Buffer:

- buszok esetén használatos: kommunikációs irány változhat
  - Driver: egyirányú kommunikációra
  - Transceiver: kétirányú kommunikációra
- 3 állapota lehet:
  - magas: ‘1’
  - alacsony: ‘0’ (normál TTL szintek)
  - nagy impedanciás áll: ‘Z’ – mindkét kimeneti tranzisztor zár



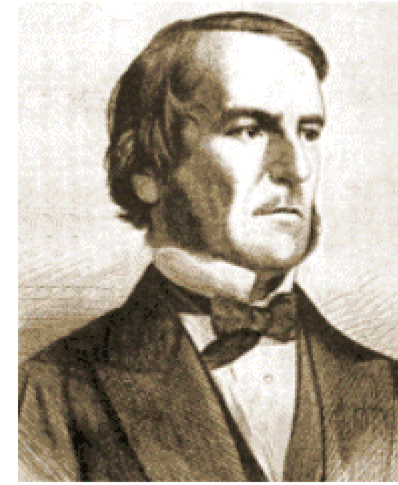
High-true enable



Low-true enable

Boole algebra

Boole-algebra



(1815-1864)

- Logikai operátorok algebrája
- George Boole: először mutatott hasonlóságot az általa vizsgált logikai operátorok és a már jól ismert aritmetikai operátorok között.
- HW tervezés alacsonyabb absztrakciós szintjén rendkívül fontos szerepe van. (Specifikáció + egyszerűsítés)

Boole algebra elemei:

- A vizsgált 3 alapművelet: AND, OR, NOT
- Tulajdonságaik (AND, OR esetén):
  - Kommutatív: $A+B=B+A$, $A \cdot B=B \cdot A$
  - Asszociatív: $A+(B+C)=(A+B)+C=A+B+C$
    $A \cdot (B \cdot C)=(A \cdot B) \cdot C=A \cdot B \cdot C$
  - Disztributív: $A \cdot (B+C)=A \cdot B+A \cdot C$,
    $A+(B \cdot C)=(A+B) \cdot (A+C)$
- Operátor precedencia (csökkenő sorrendben):
  - NOT
  - AND
  - OR
  - átzárójelezhetőség!

Boole algebrai azonosságok!

$1.)\overline{\overline{A}} = A$

$2.) A + 0 = A$

$3.) A + 1 = 1$

$4.) A + A = A$

$5.) A + \overline{A} = 1$

$6.) A \cdot 1 = A$

$7.) A \cdot 0 = 0$

$8.) A \cdot A = A$

$9.) A \cdot \overline{A} = 0$

$10.) A + A \cdot B = A$

$11.) A \cdot (A + B) = A$

$12.) A \cdot B + A \cdot \overline{B} = A$

$13.) (A + B) \cdot (A + \overline{B}) = A$

$14.) A + \overline{A} \cdot B = A + B$

$15.) A \cdot (\overline{A} + B) = A \cdot B$

$16.) A + B \cdot C = (A + B) \cdot (A + C)$

$17.) A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$

De-Morgan azonosságok:

$18.) \overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$

$19.) \overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$

Boole-algebrai azonosság igazolása igazságtáblával

- Pl: De Morgan

$$\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$$

A	B	A·B	NOT (A·B)
0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

Dualitás elve

A	B	NOT A	NOT B	NOT(A) + NOT(B)
0	0	1	1	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	1
1	1	0	0	0

- Példa: egyszerűsítésre

$$\overline{A \cdot (B + C \cdot (B + \overline{A}))} \overset{?}{=} \overline{A} + \overline{B}$$

Logikai egyenletek megadása igazság-táblázatokból

- Pl:

sor	A	B	W
0	0	0	0
1	0	1	0
2	1	0	1
3	1	1	0

W pontosan akkor lesz **igaz**, ha A igaz és B hamis, egyébként W **hamis** lesz. Vagyis egyenletként kifejezve:

$$W = A \cdot \overline{B}$$

- Pl:

sor	A	B	Y
0	0	0	1
1	0	1	0
2	1	0	1
3	1	1	1

Y pontosan akkor lesz **igaz**, ha A és B is hamis, vagy A igaz és B hamis, vagy A és B is igaz, egyébként W **hamis** lesz. Vagyis egyenletként kifejezve:

$$Y = \overline{A} \cdot \overline{B} + A \cdot \overline{B} + A \cdot B \Rightarrow \overline{B} + A \cdot B \Rightarrow \overline{B} + A$$

$$\overline{Y} = \overline{A} \cdot B$$

1.) Sum-of-Products (szorzat„termek” összege)

- Szorzat (AND) termek összeg (OR) kapcsolata
- Emberi szemléletmódhoz közelebb áll: a táblázat soraiból azokat a függvényértékeket (Y) vesszük amelyek ‘1’-esek
- Def: Triviális forma: ha egy változó egy adott szorzat termben vagy ponáltan, vagy negáltan legfeljebb egyszer szerepel.
  Ezt hívják még **mintermnek (m_i)** vagy **kanonikus szorzat termnek** is.
  - Pl: *valós / triviális* / kanonikus formulák: $A, \overline{A}, A \cdot B, \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C}$
  - Pl: érvénytelen formulák (de ettől még Boole kifejezés), ami jelenti azt is, hogy tovább egyszerűsíthetők:

$$A \cdot \overline{A}, \overline{A} \cdot B \cdot B \cdot \overline{C}$$

Diszjunktív Normál Forma:

- Jel: $Y(DNF): \sum_{i=0}^{2^n-1} m_i$
- n változó esetén 2^n lehetséges minterm van.
- Képzésük: az igazságtáblázatból azoknak a mintermeknek a VAGY kapcsolatát vesszük, ahol függvényértékek sorában (*Y*) ‘1’ -es szerepel, vagy ahol a függvény komplemensének ($\overline{Y}$) értéke ‘0’.
- minterm: m_i (i. sora a kanonikus táblának, ahol Y értéke ‘1’).

Példa: DNF felírása

- Igazságtábla:

sor	A	B	Y
0	0	0	1
1	0	1	0
2	1	0	1
3	1	1	1

- Kapott egyenlet: $Y = \overline{A} \cdot \overline{B} + A \cdot \overline{B} + A \cdot B = m_0 + m_2 + m_3$

  [0 0] [1 0] [1 1]

- Komplemens: $\overline{Y} = \overline{A} \cdot B = m_1$

  [0 1]

2.) Product-of-Sums: összeg„termek” szorzata

- összeg (OR) termek szorzat (AND) kapcsolata
- **Maxterm** (**M$_i$**): olyan kanonikus összeg term, amelyben mindegyik logikai változó pontosan egyszer fordul elő, ponált, vagy negált alakban.
  - Valós maxterm: $\overline{A}+B+\overline{C}$, de nem valós: $\overline{A}+\overline{C}$
  - Kanonikus forma: $W=(P+Q+R)(P+\overline{Q}+\overline{R})$
  - Nem kanonikus forma: $W=(P+Q)(P+\overline{Q}+\overline{R})$
- Gyakorlatban kevésbé használt forma.

KNF: Konjunktív Normál Forma

- Jel: $W(KNF) = \prod_{i=0}^{2^n-1} M_i$
- Képzésük: a kanonikus igazságtábla azon maxtermjeinek ÉS kapcsolatát vesszük, ahol a függvény (W) értéke '0', vagy a komplemens függvény ($\overline{W}$) értéke '1'.
- Pl: $W = \overline{A} + \overline{B}$ vagy

$$\overline{W} = (A+B)\cdot(\overline{A}+B)\cdot(A+\overline{B}) \overset{disztributív}{=} \overline{\overline{A\cdot B}} = A\cdot B$$

- Maxterm (M_i): az igazságtáblázat i. sora, ahol a kimeneti függvényérték '0'.

Példák: KNF

- Legyen: $M_i = \overline{A} + B + \overline{C}$ ahol a kimeneti függvényérték hamis volt. Ez az M_i maxterm igaz A,B,C változók értékének kombinációjára, kivéve egyet, ahol A=1, B=0, C=1. Tehát [101]=5. → M_5 (táblázat 5.sora)
- Legyen: $M_i = A + B + C$ ahol a kimeneti függvényérték hamis volt. Ez az M_i maxterm igaz A,B,C változók értékének kombinációjára, kivéve egyet, ahol A=0, B=0, C=0. Tehát [000]=0. → Így M_0 (táblázat 0.sora)

Példa: KNF felírása

- Igazságtábla

sor	J	K	L	W
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	1
3	0	1	1	1
4	1	0	0	0
5	1	0	1	0
6	1	1	0	0
7	1	1	1	0

- Igazságtáblából kapjuk, hogy:

$$W(KNF) = (J + K + L) \cdot (\overline{J} + K + L) \cdot (\overline{J} + K + \overline{L}) \cdot (\overline{J} + \overline{K} + L) \cdot (\overline{J} + \overline{K} + \overline{L})$$

$$W(KNF) = [000] \cdot [100] \cdot [101] \cdot [110] \cdot [111] = M_0 \cdot M_4 \cdot M_5 \cdot M_6 \cdot M_7$$

$$W(DNF) = (\overline{J} \cdot \overline{K} \cdot L) + (\overline{J} \cdot K \cdot \overline{L}) + (\overline{J} \cdot K \cdot L)$$

$$W(DNF) = [001] + [010] + [011] = m_1 + m_2 + m_3$$

Igazságtábla felírása logikai kifejezésekből I.

- a.) DNF-ből: felírás egyszerű
  - Kanonikus mintermből: egy sor képződik (ahol Y igaz),
  - Nem kanonikus, kevesebb változót tartalmazó termből: több sor is képződhet, mivel egy ilyen term egy adott logikai változó ponált és negált értékére is igaz kimeneti eredményt (Y) ad,
  - Egy sorhoz több term is tartozhat!

Példa: DNF -> Igazságtábla

- Eredeti egyenlet:

$$Y(DNF) = \underbrace{J \cdot \overline{K}}_{\text{term1}} + \underbrace{\overline{J} \cdot K \cdot L}_{\text{term2}} + \underbrace{J \cdot K \cdot \overline{L}}_{\text{term3}} + \underbrace{K \cdot L}_{\text{term4}}$$

kanonikus (minterm)

- Kapott igazságtábla:

sor	J	K	L	W	
0	0	0	0	0	
1	0	0	1	0	
2	0	1	0	0	
3	0	1	1	1	**term2 és term4**
4	1	0	0	1	**term1**
5	1	0	1	1	**term1**
6	1	1	0	1	**term3**
7	1	1	1	1	**term4**

Igazságtábla felírása logikai kifejezésekből II.

- b.) KNF-ből: felírás nehezebb (az egyes logikai változók negált értékeit kell venni)
  - Kanonikus maxtermből: egy sor képződik (ahol Y hamis),
  - Nem kanonikus, kevesebb változót tartalmazó termből: több sor is képződhet, mivel egy ilyen term egy adott logikai változó ponált és negált értékére is hamis kimeneti eredményt (Y) ad,
  - Egy sorhoz több term is tartozhat!

Példa: KNF -> Igazságtábla

- Eredeti egyenlet:

$$G(KNF) = (\underbrace{\overline{A}+B+C}_{\text{term1}}) \cdot (\underbrace{\overline{A}+B}_{\text{term2}}) \cdot (\underbrace{\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}}_{\text{term3}})$$

kanonikus (maxterm)

- Kapott igazságtábla:

sor	A	B	C	G	
0	0	0	0	1	
1	0	0	1	1	
2	0	1	0	1	
3	0	1	1	1	
4	1	0	0	0	term1 és term2
5	1	0	1	0	term2
6	1	1	0	1	
7	1	1	1	0	term3

Igazság táblák tömörebb felírási formája

- Eml: Kanonikus ig. táblánál: n változó -> 2^n sor (összes lehetséges változó kombináció felírásával)
- Egyszerűsített / tömörebb felírás:
  - „**X**”: Don’t Care változó két értéke: 0 és 1 is lehet.
- Pl: $$Y = \underbrace{J \cdot \overline{K}}_{\text{term1}} + \underbrace{\overline{J} \cdot K \cdot L}_{\text{term2}} + \underbrace{J \cdot K \cdot \overline{L}}_{\text{term3}} + \underbrace{K \cdot L}_{\text{term4}}$$

term2 és term3: kanonikus (minterm)

J	K	L	Y	
0	0	0	0	
0	0	1	0	
0	1	0	0	
X	1	1	1	**term2 és term4**
1	0	X	1	**term1**
1	1	0	1	**term3**

Term1: L don’t care (0 v. 1)

Term4: J dont’care (1 v. 0)

NTSH: Nem Teljesen Specifikált Hálózat (Don’t Care kimenet)

- Bizonyos bemeneti kombinációkra ugyanazt a kimeneti eredményt kapjuk (irreleváns)
- Jele: „–” Don’t care kimeneti állapot
- Pl.

A	B	Y
0	X	1
1	0	-
1	1	0

ha ‘–’=1, $Y = \overline{A} + A \cdot \overline{B} = \overline{A} + \overline{B}$

ha ‘–’=0, $Y = \overline{A}$

KARNOUGH TÁBLÁK

Karnough táblák

- Korai időszakban: logikai elemek hatalmas, nehezen tervezhető, nagy energiát disszipáló eszközökből álltak
- Logikai kifejezések egyszerűsítése. Ma: HW olcsó elemekből épül fel. Cél: az áramköri minimalizáció (modularitás, egyszerűség)

Technológia / tervezési stílusok fejlődtek

↕

„Glue” ragasztó logika: egyszerűsödött egyenlet felírás

↕

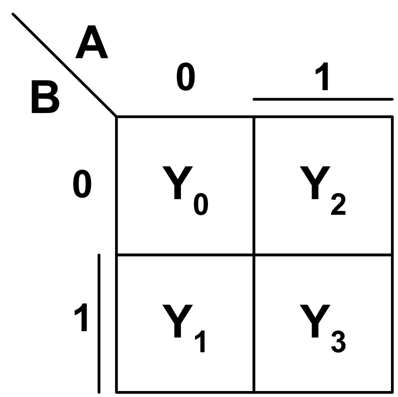
Nagy áramköri komplexitás, sebesség

- **K-Map / Veicht diagram**: grafikus ábrázolási és egyszerűsítési mód, a kanonikus igazságtábla egy újrarendezett formája (több forma is létezik, és fontos a betűk, cimkék sorrendje)

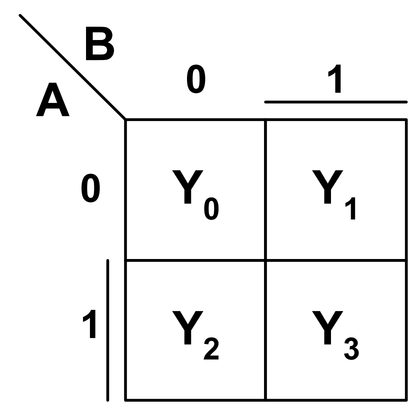
Karnough tábla felírása igazság táblázatból

- Igazságtábla mindenegyes sorának kimeneti értékéhez (Y_i) a Karnough tábla egy négyzete feleltethető meg.
- Pl. n=2 változó esetén lehetséges táblák:

sor	A	B	Y
0	0	0	Y0
1	0	1	Y1
2	1	0	Y2
3	1	1	Y3



könyvbeli jelölés



általános jelölés

Karnough táblák

- n=2, 3, 4 változóval még könnyű felírni (>4 változó felett már más technikát használunk)
- Pl: n=3 változó esetén lehetséges táblákra:

			B	B	
				A	A
C \ AB		00	01	11	10
	0	Y_0	Y_2	Y_6	Y_4
C	1	Y_1	Y_3	Y_7	Y_5

			C	C	
				B	B
A \ BC		00	01	11	10
	0	Y_0	Y_1	Y_3	Y_2
A	1	Y_4	Y_5	Y_7	Y_6

Karnough táblák

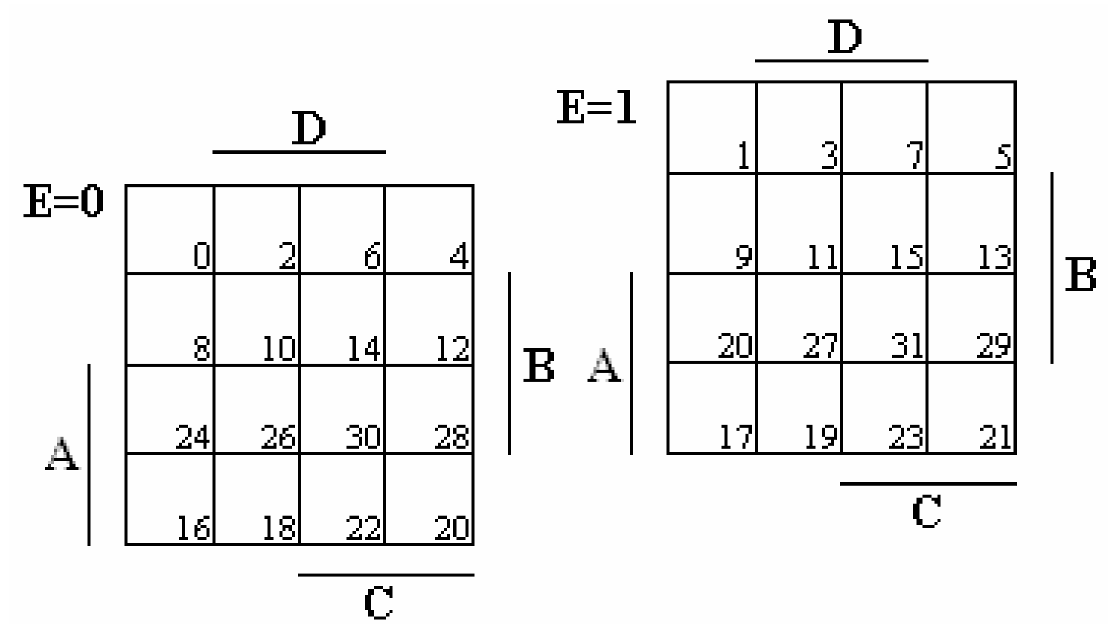
- Pl: n=4 változó esetén lehetséges táblákra:

				A	A	
	CD \ AB	00	01	11	10	
	00	Y_0	Y_4	Y_{12}	Y_8	
	01	Y_1	Y_5	Y_{13}	Y_9	D
C	11	Y_3	Y_7	Y_{15}	Y_{11}	D
C	10	Y_2	Y_6	Y_{14}	Y_{10}	
			B	B		

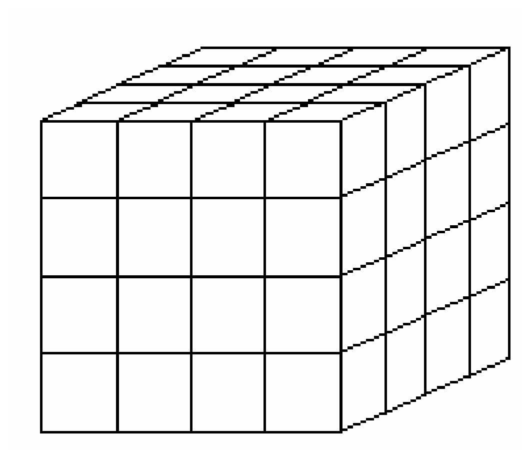
				C	C	
	AB \ CD	00	01	11	10	
	00	Y_0	Y_1	Y_3	Y_2	
	01	Y_4	Y_5	Y_7	Y_6	B
A	11	Y_{12}	Y_{13}	Y_{15}	Y_{14}	B
A	10	Y_8	Y_9	Y_{11}	Y_{10}	
			D	D		

Karnough táblák

- n= 5 változó esetén



- n=6 változó esetén



Boole függvény ábrázolási módjai

- Boole-algebrai kifejezés: $Y = \overline{A} \cdot \overline{B} + A \cdot \overline{B}$

- Igazságtábla:

sor	A	B	Y
0	0	0	1
1	0	1	0
2	1	0	1
3	1	1	0

- Karnough tábla:

A \ B	0	1
0	1	0
1	1	0

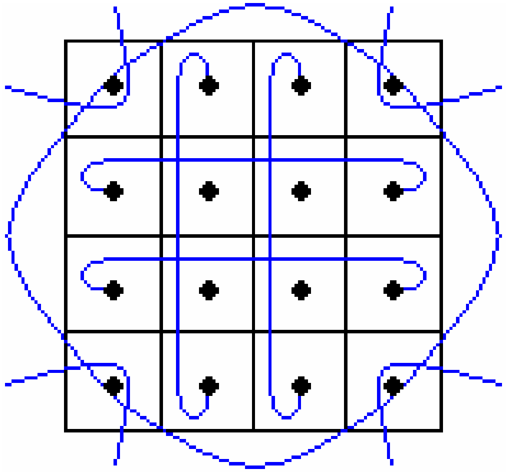
Szomszédosság – adjacencia

- Def: Ha egy Karnough táblában két szomszédos (adjacent) cella csak egy változó értékében különbözik (egységnyi távolság)!
- Pl. $Y_3 = \overline{A} \cdot B \cdot C$ és $Y_7 = A \cdot B \cdot C$

		C	C	
			B	B
A \ BC	00	01	11	10
0	0 0	0 1	1 3	0 2
A 1	0 4	0 5	1 7	0 6

Egyszerűsítés Karnough táblákkal

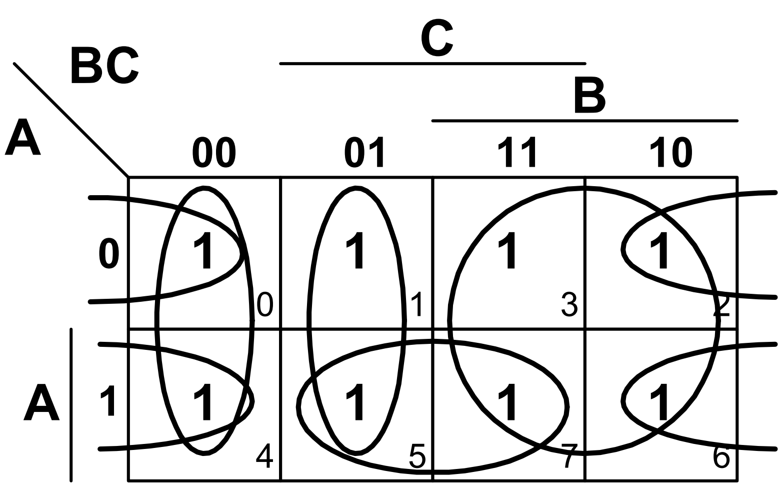
- Tömörítés szabályai:
  - 2^{n} (n=0,1,2..) term vonható be egy tömbbe,
  - Egyetlen term több tömbben is szerepelhet (átlapolódás lehetséges)
  - Egyik tömb, a másikat nem tartalmazhatja teljes mértékben, (redundancia)
  - Mindig a lehető legnagyobb lefedéseket keressük, és haladjunk a legkisebb méretű tömbök/lefedések felé
  - Don’t care (‘-’) kimeneti függvényértékeket a jobb lefedésnek megfelelően kell megválasztani (NTSH)
  - Egymás mellett lévő (adjacens) sorokra és oszlopokra érvényes:



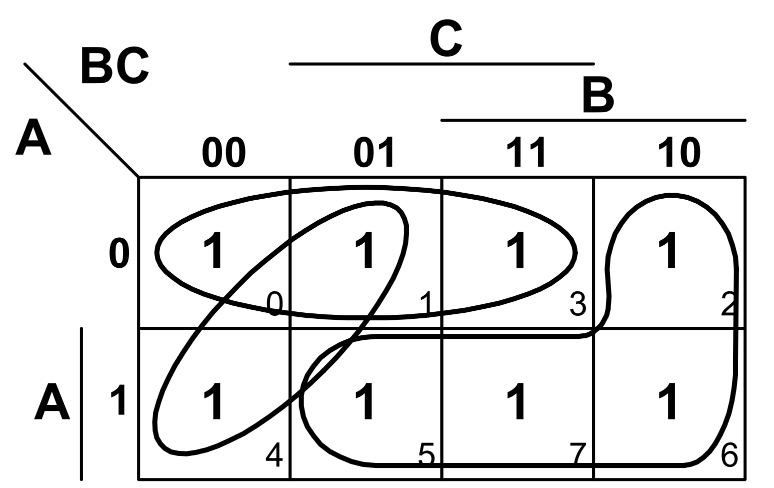
Példa: Karnough táblák egyszerűsítése

- érvényes

érvénytelen



Nem összes, de lehetséges egyszerűsítések - érvényes



Átlós, és nem 2^n számú ‘1’-es lefedés érvénytelen

Lehetséges módszerek Karnough tábla értelmezésére:

- M1: $Y(DNF)$ ‘1’-esek lefedésével képzett (normál, eddig használt ált. módszer)
- M2: $\overline{Y}(DNF)$ ‘0’-k lefedésével képzett inverz függvény felírás
- M3: $Y(KNF)$ ‘0’-k lefedésével képzett
- M4: $\overline{Y}(KNF)$ ‘1’-esek lefedésével képzett inverz függvény felírás

- Ajánlott: fejezetek végén a feladatok (Exercises) részek áttekintése.