DISZKRÉT VALVÁLTOZÓK	ELOSZLÁS $F(X)=P(X=k)$	VÁRHATÓ ÉRTÉK EX	SZÓRÁS DX
EGYENLETES	$P(X=k)=\frac{1}{n}$, n=elemszám pl. kockadobás, érme...	ha $R(X)=\{1,2,\dots,N\}$ $EX=\frac{N+1}{2}$ ha $R(X)=\{a,a+k,a+2k,\dots,b\}$ $EX=\frac{a+b}{2}$	$D^2X=\frac{N^2-1}{12}$ ← nem kell $D^2X=k^2\left(\frac{N^2-1}{12}\right)$
BERNOULLI	$P(X=0)=p$ $0<p<1$ $P(X=1)=1-p$ X 0-t veszi fel p valséggel, 1-et 1-p-vel /vagy ford./	$EX=p$	$DX=\sqrt{p(1-p)}$
GEOMETRIAI	$P(X=k)=\underbrace{(1-p)^{k-1}}_{k-1\text{-szer nem ég ki}}\cdot\underbrace{p}_{1\text{-szer meg igen}}$ pl. izzó $\forall t$ időben p valséggel ég ki	$EX=\frac{1}{p}$	$DX=\frac{\sqrt{1-p}}{p}$ ← nem kell
HIPERGEO.	$P(X=k)=\frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$ pl. N golyó, M piros, N-M nem, n db-ot, visszatevés nélkül	$EX=\frac{Mn}{N}$	DX = túl bonyi
BINOMIÁLIS (ha n=1, akkor Bernoulli)	$P(X=k)=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}$ n elemből válasszunk k-t, visszatevéssel	$EX=n\cdot p$	$DX=\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}$
POISSON (binomiális közelítése)	$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}\cdot e^{-\lambda}$ pl. meghibásodások száma - ha n nagyon nagy v. nem tudjuk	$EX=\lambda=n\cdot p$	$DX=\sqrt{\lambda}$
ha ∀ kötél szakad... ÁLTALÁNOS ESET	(x_i, p_i) véges v. ∞ sorozat x_i: EX elemei, pl. kockadobás 1,2,3,...,6 p_i: lehetséges felvett értékek (valószínűsége hogy $X=x_i$) pl. kockadobás (1, 1/6) (2, 1/6) ⋮ (6, 1/6)	$EX=\sum_i x_i p_i$, ha a sor abs. konv.	$D^2X=EX^2-E^2X=\sum_i x_i^2 p_i-\left(\sum_i x_i p_i\right)^2$

(M) DISZKRÉT VAL. VÁLTOZÓKNAK ∄ sűrűségfv-e. (eloszlásfgv nem folytonos és nem deriválható)
Feladatban ált. (meglepő módon) diszkrét dolgokra kérdeznek: hibák száma, dobások száma, golyóhúzás, hány nap alatt ég ki az égő (idő nem folytonos), alkatrészek száma és azok meghibásodása, embereket választunk, stb.

(M) $P(X<3)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)$, $P(X>1)=1-P(X=0)-P(X=1)$

FOLYTONOS VAL. VÁLTOZÓK	ELOSZLÁS FGV $F(x)=P(X<x)$	integrálás / deriválás	SŰRŰSÉGFGV $f(x)$	VÁRHATÓ ÉRTÉK EX	SZÓRÁS DX
EGYENLETES	$F(x)=\begin{cases} 0 & x<a \\ \frac{x-a}{b-a} & x\in[a,b] \\ 1 & x>b \end{cases}$		$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{b-a} & x\in[a,b] \\ 0 & \text{egyéb} \end{cases}$	$\frac{a+b}{2}$	$DX=\frac{b-a}{\sqrt{12}}$
EXP.	$F(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ 1-e^{-\lambda x} & x\geq 0 \end{cases}$ ÖRÖKIFJÚSÁG: $P(X>y+z \mid X>z)=P(X>y)$		$f(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ \lambda\cdot e^{-\lambda x} & x\geq 0 \end{cases}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda}$
STANDARD NORMÁLIS	$\underbrace{\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\,dt}_{\Phi \text{ formula, } \exists \text{ táblázat}}$ $\Phi(x)+\Phi(-x)=1$		$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-x^2/2}$	$EX=0$	$DX=1$
				ha várható érték 0, és a szórás 1, akkor standard normális, különben standardizálni kell	
NORMÁLIS $EX=\mu$ $D^2X=\sigma^2$	$\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$ várh. érték (μ), szórás (σ) ez a standardizált		$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\cdot e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	$EX=\mu$	$D^2X=\sigma^2$
ÁLTALÁNOS ESET	$F(x)=P(X<x)$ $P(X\geq x)=1-P(X<x)=1-F(x)$ $P(a\leq X<b)=F(b)-F(a)$ Tul.-ok: 1, mon. nő 2, $\lim_{x\to\infty} F(x)=1$ $\lim_{x\to-\infty} F(x)=0$ 3, balról folytonos 		$f(x)=F'(x)$, ha $\exists$ tul.-ok: 1, folytonos véges sok szakadási pont kivételével 2, $f(x)\geq 0$ 3, $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx=1$ $\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt=F(x)=P(X<x)$	$EX=\int_{\mathbb{R}} x\cdot f(x)\,dx$	$D^2X=EX^2-E^2X=$ $\int_{\mathbb{R}} x^2\cdot f(x)\,dx-$ $-\left(\int_{\mathbb{R}} x\cdot f(x)\,dx\right)^2$

2-DIM DISZKRÉT VAL.VÁLT. EO.

X és Y együttes eloszlása:
$(x_i, y_j, q_{ij})_{i,j}$
ahol $q_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j)$
(x_i, p_i) : X szerinti marginális eo.
$p_i = \sum_j q_{ij}$

2-DIM FOLYTONOS VAL.VÁLT.

ELOSZLÁS

$F(x,y) = P(X<x, Y<y)$, $x,y \in R$

SŰRŰSÉG

$f(x,y) = \dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}$, ha $\exists$

tul-ok: $f(x,y) \geq 0$ és
$\int_{R^2} f(x,y)\, dx\, dy = 1$

$P((x,y)\in A) = \iint_A f(x,y)\, dA$, $A \subset R^2$

marginális sfgv.:

$f_X = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dy \qquad f_Y = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dx$

X és Y fgtlenek, ha $f_X \cdot f_Y = f(x,y)$

Feladatban:

pl. $f_X = \int_x^1 f(x,y)\, dy \qquad f_Y = \int_0^y f(x,y)\, dx$

integrálási határban van változó

határnak kezdet! másik változó szerint integrálunk

VÁRHATÓ ÉRTÉK

$EX = \int_0^1 x \cdot f_X\, dx$ VAGY $EX = \int_0^1 \int_0^y x \cdot f(x,y)\, dx\, dy$

azonos változó szerint

egyszer integrálom x-szer az x marginálist

kétszer integrálom x-szer a sfgv.

EX^2 = u.a. mint EX, csak x helyett x^2.
EY, EY^2 hasonlóan

$E(X,Y) = \int_0^1 \int_0^y x \cdot y \cdot f(x,y)\, dx\, dy$

ez csak példa, amúgy $-\infty$-től $+\infty$-ig

ha X és Y fgtlenek $\Rightarrow cov = 0$
$cov(X,X) = D^2X$

$D^2X = EX^2 - E^2X$

$cov(X,Y) = E(X,Y) - EX\,EY$

$\rho = corr(X,Y) = \dfrac{cov(X,Y)}{DX \cdot DY} \Rightarrow cov(X,Y) = \rho \cdot DX \cdot DY$

$D^2(X+Y) = D^2X + D^2Y + \underbrace{2 \cdot cov(X,Y)}_{2 \cdot \rho \cdot DX \cdot DY}$

$E^2(X+Y) = (EX+EY)^2$

kovariancia mátrix:

$\Sigma = \begin{pmatrix} D^2X & cov(X,Y) \\ cov(X,Y) & D^2Y \end{pmatrix}$

$E(Y|X) = EY + {DY}/{DX} \cdot \rho \cdot (X - EX)$

$D(Y|X) = DY \cdot \sqrt{1-\rho^2}$

CENTRÁLIS HATÁRELOSZLÁS TÉTEL

$$p(\Sigma X < x) = p\left(\frac{\Sigma x - n \cdot EX}{\sqrt{n \cdot D^2X}} < \frac{x - n \cdot EX}{\sqrt{n \cdot D^2X}}\right) = \phi\left(\frac{x - n \cdot EX}{\sqrt{n \cdot D^2 x}}\right)$$

ΣX ↓ összeg

ϕ ← std. norm. eloszlás

példa: $n = 10\,000$-szer dobunk kockával
Mi a valószínűsége, hogy a ~~dobott~~ értékek $\boxed{\text{összege}}$ a és b közé esik?

$$p(a < S < b) = p\left(\underbrace{\frac{a - 10000 \cdot \frac{7}{2}}{\sqrt{10\,000 \cdot \frac{35}{12}}}}_{*} < \frac{S - 10000 \cdot \frac{7}{2}}{\sqrt{10\,000 \cdot \frac{35}{12}}} < \underbrace{\frac{b - 10000 \cdot \frac{7}{2}}{\sqrt{10000 \cdot \frac{35}{12}}}}_{\heartsuit}\right) = \phi(\heartsuit) - \phi(*)$$

Kell: $EX = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + \ldots + 6 \frac{1}{6} = \frac{7}{2}$

$$EX^2 = \sum_{i=1}^{6} i^2 \frac{1}{6} = \frac{91}{6}$$

$$D^2X = EX^2 - E^2X = \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{35}{12}$$

P PARAM. N-ED RENDŰ BINOM. EO. STANDARDIZÁLTJA:

$$F(x) = P(X < x) = p\left(\frac{X - n \cdot p}{\underbrace{\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}}_{\text{binom. eo. } DX}} < \frac{x \cdot np}{\sqrt{n \cdot p\,(1-p)}}\right) = \phi\left(\frac{x - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

Pl. $n = 6000$-szer dobunk kockával, valószínűsége, hogy 6-osok $\boxed{\text{száma}}$ a és b közé esik?

$p = \frac{1}{6}$ ← 6-os valsége

$q = 1 - p = 5/6$

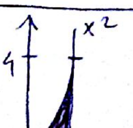
$$p(a < x < b) = \phi\left(\frac{b - 6000 \cdot \frac{1}{6}}{\sqrt{\underbrace{6000}_{n} \cdot \underbrace{\frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}}_{p \cdot (1-p)}}}\right) - \phi\left(\frac{a - 6000 \cdot \frac{1}{6}}{\sqrt{\underbrace{6000}_{n} \cdot \underbrace{\frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}}_{p \cdot (1-p)}}}\right)$$

FELTÉTELES VALSÉG

$$p(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \underbrace{\frac{P(B|A)\,P(A)}{P(B)}}_{\text{Bayes tétel}}$$

Ha A és B fgtlenek $\Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Hogyan írjunk fel normáltartományt?

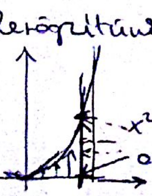
pl. ez:  (hogy ne csak 3szög legyen) :)

A WILD TARTOMÁNY APPEARED!

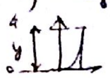
X szerinti:

1, először megvizsgáljuk x milyen „keretek" között mozog  ez most: $X \in [0,2]$

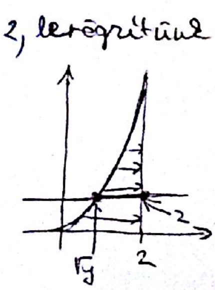
2, lerögzítünk egy tetsz értéket x-en és megnézzük, hogy itt hogyan változik y. Bármely pontot veszünk fel az x tengelyen, akkor legfeljebb x^2-ig mehet az y, tehát $y \in [0, x^2]$



Y szerinti: 1, megnézzük y mettől meddig megy.

 ez most $y \in [0,4]$

2, lerögzítünk egy tetszőleges y-t és megvizsgáljuk hogyan változik ezen x. Ehhez kell y inverz. Virtuóz matematikai átalakítások után:



$y = x^2$

$x = \sqrt{y}$

Tehát x megy $\sqrt{y}$-tól 2-ig: $x \in [\sqrt{y}, 2]$

X-NT: $x \in [0,2]$, $y \in [0, x^2]$

Y-NT: $y \in [0,4]$, $x \in [\sqrt{y}, 2]$

érdemesebb majd ezt választani mert itt 0 lesz az integrál alsó határa és az jó

(M) mindig a szerinti NT, amelyik változó rögzített

KOMBINATORIKA BASICS	ismétlés nélküli	ismétléses		
PERMUTÁCIÓ CSAK A SORREND	$P_n = n!$ n elemet rendezünk sorba, mindet felhasználjuk	$P_n^{k_1,k_2\ldots} = \frac{n!}{k_1!\cdot k_2!\ldots k_n!}$	ahol $k_1, k_2, \ldots k_n$ az ismétlődő elemek száma	n elemet rendezünk sorba, mindet felhasználjuk, de ezek között vannak azonosak
VARIÁCIÓ KIVÁLASZTÁS + SORREND	$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)$ n elemből k-t választunk, és a kiválasztott elemek összes lehetséges sorrendje	$V_n^{k(i)} = n^k$ → –"–, csak egy elemet többször is választhatunk		
KOMBINÁCIÓ CSAK A KIVÁLASZTÁS	$C_n^k = \frac{V_n^k}{P_k} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$ n elemből k-t, sorrend nélkül (közömbös) 1 elemet csak 1x	$C_n^{k(i)} = \binom{n+k-1}{k}$ → –"– 1 elemet többször is választhatunk		

Ⓜ jobb gondolkodni, mint képleteket tanulni