Valószínűségszámítás röpzh kérdések megoldásokkal

Csercsik Dávid
2017 ősz

1. Ha $f : \Omega \to \mathbb{R}$, és $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ egy $\mathbb{R}$-beli Borel-halmaz, mit nevezünk B f-szerinti ősképének?
   MO $\overset{-1}{f} < B > \overset{\circ}{=} \left\{\omega \in \Omega | f(\omega) \in B\right\}$

2. Mit nevezünk mérhető függvénynek?
   MO $\left(\Omega, \mathfrak{F}\right)$ mérhető tér, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ fv mérhető ha $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ esetén
   $\overset{-1}{f} < B > \overset{\circ}{=} \left\{\omega \in \Omega | f(\omega) \in B\right\} \in \mathfrak{F}$
   avagy 'minden Borel halmaz ősképe $\mathfrak{F}$-beli'

3. Adjon meg egy mérhető teret, és mondjon példát rajta nem mérhető fv-re!
   MO (pl): Az alaphalmaz: $\Omega = \{kiscica, kiskutya\}$, a σ-algebra: $\mathfrak{F} = \{\emptyset, \Omega\}$ legyen $f : \Omega \to \mathbb{R}$ $\omega \in \Omega$-ra
   $$f(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{if } \omega = kiskutya \\ 0 & \text{if } \omega = kiscica \end{cases}$$
   Ekkor pl. bármilyen, az 1-et tartalmazó, de a 2-t nem tartalmazó Borel halmaz ősképe ($=\{kiskutya\}$) nem eleme a σ-algebrának.

4. Eseményalgebra (vagy szigma-algebra) tulajdonságai?
   MO:
   - zárt véges és megszámlálhatóan végtelen $\bigcup$-ra.
   - zárt különbségképzésre
   - Tartalmazza Ω-t (az alaphalmazt vagy eseményteret).

5. Legyen $\Omega = \{X, Y, Z\}$, $\mathfrak{F} = 2^{\Omega}$ (Ω minden részhalmaza), $\mu(A) = |A|$ (A elemszáma). Valószínűségi mérték-e $\mu(A)$?
   MO: Nem mivel Ω-n az értéke $3 \neq 1$.

6. Legyen $\Omega = \{X, Y, Z\}, \mathfrak{F} = 2^{\Omega}, \mu(A) = |A|$ (A elemszáma). Mérték-e $\mu(A)$?
   MO: Igen mivel pozitív, $\emptyset$-ra 0, és teljesül a σ-additivitás: megszámlálható unióra, diszkrét A_i-re $P(\bigcup A_i) = \sum_i P(A_i)$ - mert az unió elemszáma diszjunkt halmazok esetén az elemszámok összege.

7. Legyen $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ egy valószínűségi mező, és ξ egy val. változó. Mi ξ értelmezési tartománya?
MO: Ω

8. Adott $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ valószínűségi mező. Mikor mondjuk hogy 2 esemény független? Mikor mondjuk hogy egy eseményrendszer független?
MO: A és B független ha $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Eseményrendszer független ha az alkotó események páronként függetlenek.

9. Adott $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ valószínűségi mező. Hogyan definiáljuk az A esemény feltételes valószínűségét B szerint (másszóval a B-re vett feltételes valószínűségét)? Thf $P(B) \neq 0$.
MO:$P(A|B) \stackrel{\circ}{=} \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$,

10. Legyen $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ egy valószínűségi mező, és ξ egy valváltozó. Definiálja ξ eloszlásfüggvényét (adja meg az értelmezési tartományát, az értékkészletét, és a függvényt magát)!
MO:

$$F_\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad F_\xi(x) = P(\xi < x) = P(\{\omega \in \Omega | \xi(\omega) < x\}) = P(\overset{-1}{\xi} \langle] - \infty, x[\rangle)$$

ahol $] - \infty, x[$ a $-\infty, x$ nyílt intervallum jelölése - megj: a nyílt intervallum (a, b) típusú jelölését azért kerüljük, mert (a, b)-vel az a, b rendezett párt jelöljük. $\overset{-1}{\xi}$ pedig ξ ősképe.

11. Legyen $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ egy tetszőleges valószínűségi mező. Igaz-e hogy $P(A \bigcup B) = P(A) + P(B)$?
MO: Nem, általános esetben $P(A \bigcup B) = P(A) + P(B) - P(A \bigcap B)$

12. Sorolja fel az F_ξ eloszlásfüggvény tulajdonságait!
MO:
   - F_ξ monoton növekvő
   - $\lim\limits_{x \to \infty} F_\xi = 1$
   - $\lim\limits_{x \to -\infty} F_\xi = 0$
   - F_ξ balról folytonos.

13. Mikor mondjuk hogy egy ξ valváltozó hipergeometrikus eloszlású N, n, K paraméterekkel ($N \in \mathbb{N},\ K < N,\ K \in \mathbb{N}, k = 0, ..., K \quad k \in \mathbb{N}$)?
MO: Ha

$$P(\xi = k) = \frac{\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

14. Legyen $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ egy valószínűségi mező és $A \in \mathfrak{F}$. Hogyan definiáljuk a $\chi_A : \omega \to \mathbb{R}$ fv-t? (χ_A A karakterisztikus függvénye vagy indikátorfüggvénye)
MO:

$$\chi_A(\omega) \stackrel{\circ}{=} \begin{cases} 0 & \text{ha } \omega \in \Omega \setminus A \\ 1 & \text{ha } \omega \in A \end{cases}$$

15. Hogyan definiáljuk (a χ-vel jelölt karakterisztikus függvény fogalmának segítségével) a lépcsős vagy másnéven egyszerű függvényt?
MO: Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, $\big(\lambda_k\big)_{1\leq k\leq n}$ $\mathbb{R}$-beli véges rendszer[1]. Legyen $\big(A_k\big)_{1\leq k\leq n}$ $\mathfrak{F}$-beli (halmaz)rendszer.

$$f : \Omega \to \mathbb{R}, \quad f(\omega) \stackrel{\circ}{=} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \chi_{A_j}(\omega)$$

vagy (kevésbé precízen): Lépcsős üggvények lineáris kombinációja.

16. Mikor mondjuk hogy egy ξ valváltozó geometriai eloszlású p paraméterrel ($0 < p < 1$)?
MO: Ha
$$P(\xi = k) = p(1-p)^{k-1}$$

17. Mikor mondjuk hogy egy ξ valváltozó Poisson eloszlású $\lambda > 0$ paraméterrel?
MO: Ha
$$P(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

18. Legyen $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ egy valószínűségi mező, és ξ egy valváltozó. Hogyan definiáljuk ξ várható értékét?
MO:
$$E(\xi) \stackrel{\circ}{=} \int_\Omega \xi dP \quad \text{Ha } \exists$$

19. Hogyan szól a Markov-egyenlőtlenség?
MO:
$$P\left(\xi \geq \varepsilon\right) \leq \frac{E\big(\xi\big)}{\varepsilon} \tag{1}$$

20. Mi az (N, n, K) paraméterű hipergeometrikus eloszlású valváltozó várható értéke ($N \in \mathbb{N}$, $K < N \in \mathbb{N}$, $n < N \in \mathbb{N}$)?
MO: $E(\xi) = n\frac{K}{N}$

21. Mi az (n, p) paraméterű binomiális eloszlású valváltozó várható értéke ($n \in \mathbb{N}$, $0 < p < 1$)?
MO: $E(\xi) = np$

[1] $\mathbb{R}$-beli véges rendszer = véges sok valós szám

22. Legyen $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ val. mező, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ lépcsős függvény olyan, hogy

$$f \stackrel{\circ}{=} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \chi_{A_j}$$

ahol χ_{A_j} az A_j halmaz karakterisztikus függvénye (indikátorfüggvénye), $\lambda_j \in \mathbb{R}$, és $A_j \bigcap A_k = \emptyset$ ha $j \neq k$.

$$\int_\Omega f dP \stackrel{\circ}{=} ?$$

MO:

$$\int_\Omega f dP \stackrel{\circ}{=} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j P(A_j)$$

23. Mondjon példát $\mathbb{R}$-en nem Lebesgue-integrálható fv-re!
MO:

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad g(x) = \frac{1}{x} \quad ha \quad x \neq 0, \quad g(0) = 0$$

Mert a pozitív és a negatív rész is végtelen, nem létezik az integrál.

24. Abszolút folytonos-e $[0,1]$-en a Lebesgue mértékre a számláló mérték?
MO: Nem hiszen pl. bármely csak $(x_1, x_2, ..., x_n)$ $0 \leq x_i \leq 1$ értéket tartalmazó X halmazra $\lambda(X) = 0 \neq \mu_1(X) = n$ ahol $\mu_1(X)$ a számláló mérték.

25. Legyen az $(\Omega, \mathfrak{F})$ mérhető tér $= (\mathbb{R}, 2^{\mathbb{R}})$. σ-véges-e $\mathfrak{F}$-en a számláló mérték?
MO: Nem, mert nem létezik olyan $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ $\mathfrak{F}$-ben haladó sorozat, hogy

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n = \Omega \quad \& \quad \mu(A_n) < \infty \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Nem tudom $\mathbb{R}$-et lefedni egyenként véges sok elemből álló halmazok sorozatával (akármilyen hosszú intervallumot sem tudok).

26. Legyen $\Omega = [0,1]$, $\mathfrak{F} = \mathfrak{B}_{[0,1]}$. Legyen továbbá μ_1 az $\frac{1}{4}$-re koncentrált, μ_2 pedig a $\frac{3}{4}$-re koncentrált Dirac-mérték ($\mu_1(A) = 1$ ha $\frac{1}{4} \in A$ és 0 egyébként, $\mu_2(A) = 1$ ha $\frac{3}{4} \in A$ és 0 egyébként). Szinguláris-e μ_1 μ_2-re? ($A \in \mathfrak{F}$)
MO: Igen mert

$$\exists \Omega_1, \Omega_2 \in \mathfrak{F} \quad \Omega_1 \bigcap \Omega_2 = \emptyset, \quad \Omega_1 \bigcup \Omega_2 = \Omega$$

és

$$\mu_1(\Omega_1) = 0 \quad \mu_2(\Omega_2) = 0$$

pl $\Omega_1 = [0, \frac{1}{2}[$, $\Omega_2 = [\frac{1}{2}, 1]$

27. Mikor mondjuk, hogy μ_1 mérték abszolút folytonos a μ_2 mértékre nézve?
MO:
$$(\forall A \in \mathfrak{F})\,(\mu_2(A) = 0 \Rightarrow \mu_1(A) = 0)$$

28. Mikor mondjuk, hogy μ_1 mérték szinguláris a μ_2 mértékre nézve?
MO: Ha $\exists \Omega_1,\ \Omega_2 \in \mathfrak{F}$ hogy $\Omega_1 \bigcap \Omega_2 = \emptyset, \Omega_1 \bigcup \Omega_2 = \Omega$ valamint igaz hogy $\mu_1(\Omega_1) = 0$ és $\mu_2(\Omega_2) = 0$.

29. Legyen $(\omega, \mathfrak{F}, P)$ val mező, $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ valváltozó, Q_ξ ξ eloszlása és $\lambda_\mathbb{R}$ a Lebesgue-mérték. Mikor mondjuk hogy ξ folytonos eloszlású?
MO: Ha $Q_\xi \ll \lambda_\mathbb{R}$

30. Legyen $(\omega, \mathfrak{F}, P)$ val mező, $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ folytonos eloszlású valváltozó, Q_ξ a ξ valváltozó eloszlása és $\lambda_\mathbb{R}$ a Lebesgue-mérték. Definiálja ξ sűrűségfüggvényét!
MO: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ mérhető olyan hogy $\forall A \in \mathfrak{B}_\mathbb{R}$-re
$$Q_\xi(A) = \int_A f d\lambda_\mathbb{R}$$

31. Mit mond ki a Radon-Nikodym tétel?
MO: $(\Omega, \mathfrak{F})$ mérhető tér, $\mu, \nu : \mathfrak{F} \to \mathbb{R}$ mértékek, és $\mu \ll \nu$ (μ abszolút folytonos ν-re nézve). Ekkor $\exists!$ (egyértelműen létezik) $f : \Omega \to \mathbb{R}_+$ mérhető fv, hogy $\forall A \in \mathfrak{F}$-re
$$\mu(A) = \int_A f d\nu = \int_\Omega (\chi_A f) d\nu$$
Ahol χ_A az A halmaz karakterisztikus függvénye. Ekkor $f-et$ a μ mérték ν szerinti RN (Radon-Nikodym) deriváltjának hívjuk.

32. Sorolja fel a sűrűségfüggvény tulajdonságait!
MO:
   - $f \geq 0$
   - $\int_\mathbb{R} f d\lambda = Q_\xi(\mathbb{R}) = 1$

33. Folytonos valószínűségi változó esetén mi az összefüggés az eloszlásfüggvény és a sűrűségfüggvény között (hogyan határozhatom meg az F_ξ eloszlásfüggvény értékét az x pontban, ha ismert az f sűrűségfüggvény)?
MO:
$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x) dx$$
ahol f ξ sűrűségfüggvénye.

34. Mikor mondjuk hogy ξ standard normális eloszlású?
MO: Ha a sűrűségfüggvénye
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

35. Folytonos valószínűségi változó esetén mi az összefüggés a várható érték és a sűrűségfüggvény között?
MO:
$$E(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$
ahol f ξ sűrűségfüggvénye.

36. Mikor mondjuk hogy ξ exponenciális eloszlású?
MO: Ha a sűrűségfüggvénye
$$f(x) = \alpha e^{-\alpha x} \quad ha \quad x > 0 \quad ,0 \quad ha \quad x \leq 0$$

37. ξ egy valváltozó. Definiálja ξ szórását, ha $E(\xi)$ ξ várható értéke.
MO:
$$\sigma(\xi) = \sqrt{E\big((\xi - E(\xi))^2\big)}$$

38. Legyen ξ egy valváltozó, melynek sűrűségfüggvénye
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} b} e^{\frac{-x^2+2ax-a^2}{2b^2}}$$
Mi ξ várható értéke és szórása?
MO: a és b (normális eloszlás: $m = a$, $\sigma = b$).

39. Hogy szól a Csebisev-egyenlőtlenség?
MO: Legyen ξ egy valváltozó és legyen $E(\xi)$ véges. Ekkor
$$P\left(|\xi - E(\xi)| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\sigma^2(\xi)}{\varepsilon^2}$$

40. Mutasson példát olyan függvényre, mely $\mathbb{R}$-en Lebesgue integrálható, de nem Riemann-integrálható!
MO: Dirichlet fv, másnéven a racionális számok karakterisztikus fv-e: $\chi_{\mathbb{Q}}$: Racionális számokon 1-et vesz fel, máshol 0-t. Mivel a rac. számok megszámlálhatóan sokan vannak, a Lebesgue-integrál 0, de a Riemann integrál nem létezik, mivel a felső közelítő összeg minden intervallumra az intervallum hossza (mivel minden intervallumban van racionális szám), az alsó pedig 0.

41. Folytonos valószínűségi változó esetén mi az összefüggés a sűrűsűgfüggvény és a szórásnégyzet között, ha a valószínűségi változó várható értéke 0?
MO:
$$\sigma^2(\xi) = V(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx$$
ahol f ξ sűrűségfüggvénye.

42. Legyenek ξ és η valváltozók ($\xi, \eta: \ \Omega \to \mathbb{R}$). Legyen $\mathfrak{F}_\xi$ a ξ és $\mathfrak{F}_\eta$ az η által generált σ algebra. Mikor mondjuk hogy ξ és η függetlenek?
MO: Ha $\forall \left(A_k\right)_{1\leq k\leq n}$ $n \in \mathbb{N}^+$ $\mathfrak{F}_\xi$-beli és $\left(B_j\right)_{1\leq j\leq m}$ $m \in \mathbb{N}^+$ $\mathfrak{F}_\eta$-beli rendszer független (bármit veszek az $\left(A_k\right)_{1\leq k\leq n}$ rendszerből és bármit a $\left(B_j\right)_{1\leq j\leq n}$, rendszerből, azok függetlenek)

43. Határozza meg az alábbi peremeloszlásokból az együttes eloszlást, ha ξ és η függetlenek!

$\xi \backslash \eta$	0	1	ξ perem
0	?	?	3/4
1	?	?	1/4
η perem	1/3	2/3	

MO:

$\xi \backslash \eta$	0	1	ξ perem
0	1/4	1/2	3/4
1	1/12	1/6	1/4
η perem	1/3	2/3	

44. Mutasson példát arra hogy a peremeloszlásokból nem határozható meg egyértelműen az együttes eloszlás!

MO: Pl.

$\xi \backslash \eta$	-1	0	1	ξ perem
-1	$\frac{1}{8}+a$	0	$\frac{1}{8}-a$	$\frac{1}{4}$
0	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{8}-a$	0	$\frac{1}{8}+a$	$\frac{1}{4}$
η perem	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	

45. Ha ξ egy kétdimentiós valváltozó, milyen határértékekkel kapcsolatos tulajdonságok teljesülnek az $F_\xi(x, y)$ (együttes) eloszlásfüggvényre?

MO:

$$\lim_{x \to -\infty} F_\xi(x, y) = 0 \qquad \lim_{y \to -\infty} F_\xi(x, y) = 0 \qquad \lim_{x,y \to +\infty,+\infty} F_\xi(x, y) = 1$$

46. Ha ξ egy kétdimenziós vektor értékű valószínűségi változó, melynek (együttes) sűrűségfüggvénye $f(x, y)$, akkor mi az $I \times J$ téglalapba esés valószínűsége? ($I = [a, b], \quad J = [c, d]$)

MO:

$$P(\eta \in I, \quad \gamma \in J) = \int_{I \times J} f(x, y)dxdy = \int_a^b \int_c^d f(x, y)dxdy$$

47. Legyen $\xi(\xi_1, \xi_2) : \omega \to \mathbb{R}$ valváltozó, melynek a sűrűságfüggvénye $f_{\xi_1,\xi_2}(x, y)$. Hogyan határozzuk meg az $f_{\xi_1}(x)$ marginális sűrűségfüggvényt?

MO:

$$f_{\xi_1}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi_1,\xi_2}(x, y)dy$$

48. Hogyan definiáljuk ξ és η valváltozók kovarianciáját?

MO:

$$cov(\xi,\eta) = E\left(\left(\xi - E(\xi)\right)\left(\eta - E(\eta)\right)\right)$$

49. Legyenek ξ és η valváltozók. Tegyük fel hogy a következő várható értékek léteznek, és ismertek: $E(\xi\eta),\ E(\xi),\ E(\eta)$. Mikor mondjuk hogy ξ és η korrelálatlanok?

MO: Ha

$$cov(\xi,\eta) = E(\xi\eta) - E(\xi)E(\eta) = 0$$

50. Legyenek ξ és η valváltozók. Tegyük fel hogy a $\sigma^2(\xi)$ és $\sigma^2(\eta)$ szórásnégyzetek, valamint $cov(\xi,\eta)$ létezik és ismert. $\sigma^2(\xi+\eta) =$?

MO:

$$\sigma^2(\xi+\eta) = \sigma^2(\xi) + \sigma^2(\eta) + 2cov(\xi,\eta)$$

Legyenek a ξ diszkrét valváltozó lehetséges értékei $x_1,\ x_2, ..., x_n$ és a megfelelő valószínűségek $p_1,\ p_2, ..., p_n$. Ekkor az $\eta = h(\xi)$ valváltozó lehetséges értékei a $y_1 = h(x_1),\ y_2 = h(x_2), ...$ számok. Hogyan számolhatóak az η lehetséges értékeihez tartozó valószínűségek?

MO:

$$P(\eta = y_k) = \sum_{h(x_i)=y_k} P(\xi = x_i) = \sum_{h(x_i)=y_k} p_i$$

51. Legyen ξ folytonos eloszlású valváltozó, sűrűségfv-e: $f(x)$, és legyen $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ szigorúan monoton és differenciálható. Legyen $\eta = h(\xi)$. Mi lesz η sűrűségfüggvénye?

MO:

$$g(y) = f(h^{-1}(y))\left|\frac{dh^{-1}(y)}{dy}\right|$$

52. Legyen (ξ,η) egy 2 dimenziós vektor valváltozó, az együttes sűrűségfüggvény $f_{(\xi,\eta)}(x,y)$, η peremsűrűségfüggvénye pedig $f_\eta(y)$. Hogyan definiáljuk a ξ valváltozó $\eta = z$ feltétel melletti feltételes sűrűségfüggvényét?

MO:

$$f_{\xi|\eta=z}(x) \stackrel{\circ}{=} \frac{f_{(\xi,\eta)}(x,z)}{f_\eta(z)}$$

53. Ha ξ és η folytonos valváltozók, hogyan definiáljuk a $\xi = z$ feltétel melletti feltételes eloszlásfüggvényét?

MO:

$$F^*(x|z) = \lim_{h\to 0}\left(P(\xi < x,\ z < \eta < z+h)\right)$$

ha $\exists$

54. Legyen a (ξ, η) diszkrét valószínűségi vektorváltozó (együttes) eloszlásfüggvénye $F(x, y)$, és η peremeloszlás-függvénye $F_\eta(y)$, valamint tegyük fel hogy $F_\eta(y_j) \neq F_\eta(y_i)$. Hogyan számolható ki a $P(\xi < x | y_i < \eta < y_j)$ valószínűség?

MO:

$$P(\xi < x|y_i < \eta < y_j) = F^*(x|y_i < \eta < y_j) = \frac{F(x, y_j) - F(x, y_i)}{F_\eta(y_j) - F_\eta(y_i)}$$

55. Ha ξ, η folytonos vektorértékű valváltozó, hogyan definiáljuk a ξ valváltozó η-ra vonatkoztatott regressziós függvényét?

MO:

$$r(z) \stackrel{\circ}{=} E(\xi|\eta = z)$$

56. Hogyan definiáljuk $f : \Omega \to \mathbb{R}$ függvény 2-normáját, ha $f \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathfrak{F}, P)$

MO:

$$||f||_2 \left(\stackrel{\circ}{=} \int_\Omega |f|^2 dP \right)^{1/2}$$

57. Legyen $(\omega, \mathfrak{F}, P)$ val mező. Mikor mondjuk hogy ξ és η ugyanazon ekvivalencia-osztályba tartoznak $(\xi \sim \eta)$?

MO: Ha P-szerint csak 0-mértékű halmazon térnek el egymástól:

$$\dot{f} \stackrel{\circ}{=} \{h : \Omega \to \mathbb{R} | h \text{ mérhető, és } h = f \text{ 1 vallal}\}$$

58. Hogyan szól az 1 vallal egyenletes konvergencia definíciója? **MO:**

Legyen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ L^p-beli fv sorozat, $f \in L^p$.
$f_n \to f$ 1 vallal egyenletesen (m.m. egyenletesen), ha

$$(f_n - f) \in L^\infty \ \forall n \in \mathbb{N} \text{ és } ||f_n - f||_\infty \to 0 \quad (n \to +\infty)$$

59. Mikor mondjuk hogy $f_n \to f$ 1 vallal? **MO:** $f_n \to f$ 1 vallal, azaz $f_n \xrightarrow{mm} f$ P.m.m., ha

$$\exists A \in \mathfrak{F} \text{ hogy } P(\Omega \setminus A) = 0 \text{ és } f_n(\omega) \to f(\omega) \ \ \forall \omega \in A\text{-ra}$$

mással, val. mező és valváltozó esetén:

$$P(\{\omega \in \Omega | \xi_n(\omega) \to \xi(\omega)\}) = 1$$

60. Mikor mondjuk hogy $f_n \to f$ L_p-ben? **MO:**

$$f_n \xrightarrow{L_p} f \text{ ha } ||f_n - f||_p \to 0 \text{ ,azaz } \left(\int_\Omega |f_n - f|^p dP \right)^{1/p} \to 0$$

61. $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ val mező, $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ val vált sorozat Ω-n, $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ val vált. Mikor mondjuk hogy $\xi_n \to \xi$ sztochasztikusan?

MO: ha

$$\forall \varepsilon > 0 : P(|\xi_n - \xi| > \varepsilon) \to 0$$

azaz

$$P\left(\left\{\omega \in \Omega \middle| \, |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| > \varepsilon\right\}\right) \to 0$$

62. $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ val mező, $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ val vált sorozat Ω-n, $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ val vált. Mikor mondjuk hogy $\xi_n \to f$ eloszlásban?

MO: ha

$$P\left(\xi_n < x\right) \to P(\xi < x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ melyre } x \to P(\xi < x)(= F_\xi(x)) \text{ folytonos fv}$$

röviden: $F_{\xi_n(x)} \to F_\xi(x)$

63. Hogyan szól a centrális határeloszlás tétel?

MO:

$\xi_1,\ \xi_2,\ ,\xi_3, ...$ független, azonos eloszlású valváltozók, $\sigma^2(\xi_j) < \infty$. Ekkor

$$\frac{\sum_{j=1}^{n} \xi_j - nE(\xi_1)}{\sqrt{n}\sigma(\xi_1)} \quad \to \quad N(0,1) \quad \text{ eloszlásban}$$

64. Mit mond ki a nagy számok Bernoulli féle gyenge törvénye? (segítség: olyan valváltozók sorozatátlagának konvergenciájára vonatkozik, melyek csak 0 és 1 értéket vehetnek fel) Milyen típusú konvergenciára vonatkozik?

MO: Ha $(\xi_j)_{j\in\mathbb{N}^+}$ függetlenek, valamint $P(\xi_j = 1) = p$ és $P(\xi_j = 0) = 1 - p$ ahol $p \in]0, 1[$ akkor

$$\frac{\sum_{j=1}^{n} \xi_j}{n} \to p \quad \text{sztohasztikusan, ahol } p \text{ a konstans } p \text{ értékű függvény}$$

65. Az 1 dimenziós szimmetrikus bolyongásról szóló DeMoivre-Laplace tétel a következőképpen szól:

$$S_n \mathrel{\overset{\circ}{=}} \sum_{j=1}^{n} \xi_j \ \text{ ekkor } \ P\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} < b\right) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{b} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad \text{ eloszlásban}$$

Milyen értékeket vehet fel ξ_j és milyen valószínűséggel?

MO: $P(\xi_j = 1) = P(\xi_j = -1) = \frac{1}{2}$