

Valószínűségszámítás

Csercsik Dávid

2016 ősz

2. Zárthelyi dolgozat megoldásokkal

1. Egy dobozban 25 darab 1-től 25-ig számozott cédula van. Véletlenszerűen kihúzzunk egyet. A rajta lévő számot (x) két szempontból vizsgáljuk: A ξ valószínűségi értéke legyen 0 ha $x < 10$, 1 ha $10 \leq x < 20$ és 2 egyébként. Az η valószínűségi értéke legyen 1 ha x prímszám, egyébként 0. Írjuk fel a (ξ, η) vektor valószínűségi eloszlását (ξ és η együttes eloszlását) (4p)!

MO:

$\xi \backslash \eta$	0	1
0	$\frac{5}{25}$	$\frac{4}{25}$
1	$\frac{6}{25}$	$\frac{4}{25}$
2	$\frac{5}{25}$	$\frac{1}{25}$

2. A (ξ, η) kétdimenziós valószínűségi lehetséges értékeit és eloszlását a következő táblázat tartalmazza. Határozza meg p értékét (1p), valamint ξ és η kovarianciáját (4p)!

$\xi \backslash \eta$	-1	1
1	$2p$	$4p$
2	$3p$	$3p$
3	$5p$	p

MO:

$$p = 1/18 \quad E(\xi) = 2 \quad E(\eta) = -\frac{1}{9}$$

$$E(\xi\eta) = (1)(-1)\frac{2}{18} + (1)(1)\frac{4}{18} + (2)(-1)\frac{3}{18} + (2)(1)\frac{3}{18} + (3)(-1)\frac{5}{18} + (3)(1)\frac{1}{18}$$

$$E(\xi\eta) = -\frac{5}{9}$$

$$\text{cov}(\xi, \eta) = E(\xi\eta) - E(\xi)E(\eta) = -\frac{5}{9} + \frac{2}{9} = -\frac{3}{9} = -\frac{1}{3}$$

3. Legyen

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{ha } 2 < x < A, \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$$

Milyen A érték esetén lesz f sűrűségfüggvény (4p)?

MO:

$$\int_2^A \frac{1}{x} = \ln(A) - \ln(2) = \ln\left(\frac{A}{2}\right) \rightsquigarrow A = 2e$$

4. Legyen ξ sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}}, & \text{ha } 4 < x < 9, \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$$

(a) Határozza meg ξ várható értékét! (4p)

(b) Határozza meg ξ szórását! (5p)

MO:

$$E(\xi) = \int_{\mathbb{R}} x f(x) = \int_4^9 \frac{1}{2} \sqrt{x} = \frac{1}{2} \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_4^9 = \frac{1}{3} (27 - 8) = \frac{19}{3}$$

$$E(\xi^2) = \int_{\mathbb{R}} x^2 f(x) = \int_4^9 \frac{1}{2} x^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2} \frac{2}{5} \left[x^{\frac{5}{2}} \right]_4^9 = \frac{1}{5} (243 - 32) = 42.2$$

$$\sigma^2(\xi) = E(\xi^2) - E^2(\xi) = 42.2 - \frac{19^2}{3^2} = 2.0889 \rightsquigarrow \sigma = 1.4453$$

5. Egy automata üdítőitalt adagol flakonokba. A flakonok ξ súlyát 300 gramm várható értékű, 3 szórású normális eloszlású valószínűségi változónak tekinthetjük. Mennyi a valószínűsége hogy egy flakon súlya 296 és 302 gramm közé esik (5p)?

MO:

$$\begin{aligned} P(A) &= F_{\xi}(302) - F_{\xi}(296) = \Phi\left(\frac{302 - 300}{3}\right) - \Phi\left(\frac{296 - 300}{3}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{2}{3}\right) - \Phi\left(-\frac{4}{3}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{2}{3}\right) - \left(1 - \Phi\left(\frac{4}{3}\right)\right) = 0.7454 + 0.9082 - 1 = 0.6536 \end{aligned}$$

6. Igazak-e a következő állítások? Indoklás vagy ellenpélda szükséges.

- (a) Két valószínűségi változó szorzatának várható értéke egyenlő a várható értékek szorzatával. (2p)
- (b) Két független valószínűségi változó összegének szórásnégyzete egyenlő a szórásnégyzeteik összegével. (2p)
- (c) Egy valószínűségi változó négyzetének várható értéke egyenlő a várható értékének a négyzetével. (2p)
- (d) Ha két valószínűségi változó kovarianciája 0, akkor függetlenek. (2p)
- (e) Ha $F(x, y)$ egy kétdimenziós vektor valószínűségi változó eloszlás függvénye, $F(x, y) \rightarrow 0$ ha $(x, y) \rightarrow (0, 0)$. (2p)

MO:

- (a) H, lásd 2-es feladat.
- (b) I, előadáson beláttuk: kell többek közt hogy fgtln esetben $E(\xi\eta) = E(\xi)E(\eta)$.
- (c) H, pl egyenletes eloszlás $[-1, 1]$ -en.
- (d) H Pl:

$\xi \backslash \eta$	-1	0	1
-1	0	1/4	0
0	1/4	0	1/4
1	0	1/4	0

$E(\xi) = E(\eta) = 0$, $E(\xi\eta) = 0 \rightsquigarrow cov(\xi, \eta) = 0$ de ξ és η nem fgtln, hiszen pl $P(\xi = 0, \eta = 1) = 1/4 \neq P(\xi = 0)P(\eta = 1) = 1/2 * 1/4 = 1/8$

- (e) H (igaz ha legalább az egyik $\rightarrow -\infty$)

7. Legyen ξ $[0, 1]$ -en egyenletes eloszlású. Mi lesz $\eta = 2\xi + 3$ eloszlása (4p)?

MO:

$$F(x) = P(\xi < x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 0, \\ x, & \text{ha } x \in]0, 1] \\ 1, & \text{ha } 1 < x \end{cases}$$

$$P(\eta < x) = P(2\xi + 3 < x) = P\left(\xi < \frac{x-3}{2}\right) \quad \frac{x-3}{2} \in [0, 1] \rightsquigarrow x-3 \in [0, 2] \rightsquigarrow x \in [3, 5]$$

$$G(y) = \begin{cases} 0, & \text{ha } y \leq 3, \\ \frac{1}{2}y - \frac{3}{2}, & \text{ha } y \in [2, 5] \\ 1, & \text{ha } 5 < y \end{cases}$$

8. Legyen a (ξ, η) vektor valószínűségi változó sűrűségfüggvénye $6e^{-2x-3y}$ ha $x > 0$, $y > 0$ és 0 egyébként.

- (a) Határozzuk meg a peremeloszlásokat (4p)!

- (b) Legyen $\alpha_1 = 2\xi - \eta - 4$, $\alpha_2 = \xi + \eta + 2$. Határozzuk meg (α_1, α_2) sűrűségfüggvényét (5p)!

MO:

(a)

$$\begin{aligned} f_\eta(y) &= \int_0^\infty f(x, y) dx = 6e^{-3y} \int_0^\infty e^{-2x} dx = 6e^{-3y} \left[-\frac{1}{2} e^{-2x} \right]_0^\infty = 3e^{-3y} \\ f_\xi(x) &= \int_0^\infty f(x, y) dy = 6e^{-2x} \int_0^\infty e^{-3y} dy = 6e^{-2x} \left[-\frac{1}{3} e^{-3y} \right]_0^\infty = 2e^{-2x} \end{aligned}$$

(b)

$$u = 2x - y - 4 \quad v = x + y + 2 \quad \rightsquigarrow x = \frac{u + v + 2}{3} \quad y = \frac{-u + 2v - 8}{3}$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{dx}{du} & \frac{dx}{dv} \\ \frac{dy}{du} & \frac{dy}{dv} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{vmatrix} \rightsquigarrow \det(J) = \frac{1}{3} \rightsquigarrow |\det(J)| = \left| \frac{1}{3} \right|$$

$$\begin{aligned} g(u, v) &= f\left(\frac{u + v + 2}{3}, \frac{-2 + 2v - 8}{3}\right) \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{3} 6 \exp\left(-2\left(\frac{u + v + 2}{3}\right) - 3\left(\frac{-u + 2v - 8}{3}\right)\right) \\ &= 2 \exp\left(\frac{u - 8v + 20}{3}\right) \end{aligned}$$

ha $v > 2$, $-v - 2 < u < 2v - 8$ és 0 egyébként.