

2. Zárthelyi dolgozat megoldásokkal

1. A (ξ, η) kétdimenziós valószínűségi értékeit és eloszlását a következő táblázat tartalmazza. Határozza meg p értékét (1p), a peremeloszlásokat (1p), valamint ξ és η kovarianciáját (4p)! Független-e ξ és η (1p)?

$\xi \backslash \eta$	-1	1
1	3p	6p
2	2p	3p
3	4p	2p

MO:

$\xi \backslash \eta$	-1	1	ξ perem
1	3p	6p	9p
2	2p	3p	5p
3	4p	2p	6p
η perem	9p	11p	

$$p = 1/20$$

$$E(\xi) = 1 \cdot \frac{9}{20} + 2 \cdot \frac{5}{20} + 3 \cdot \frac{6}{20} = \frac{37}{20} = 1.85 \quad E(\eta) = -1 \cdot \frac{9}{20} + 1 \cdot \frac{11}{20} = \frac{2}{20} = 0.1$$

$$E(\xi\eta) = (1)(-1) \cdot \frac{3}{20} + (1)(1) \cdot \frac{6}{20} + (2)(-1) \cdot \frac{2}{20} + (2)(1) \cdot \frac{3}{20} + (3)(-1) \cdot \frac{4}{20} + (3)(1) \cdot \frac{2}{20} = -\frac{1}{20} = -0.05$$

$$\text{cov}(\xi, \eta) = E(\xi\eta) - E(\xi)E(\eta) = -\frac{1}{20} - \frac{37}{20} \cdot \frac{2}{20} = -\frac{94}{400} = -0.235$$

Nem függetlenek (a táblázatból is látszik és $\text{cov} \neq 0$)

2. Legyen

$$f(x) = \begin{cases} A(\sin(x) + 2\cos(x)), & \text{ha } 0 < x < \frac{\pi}{4}, \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$$

Milyen A érték esetén lesz f sűrűségfüggvény (3p)?

MO:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} A(\sin(x) + 2\cos(x)) dx = A [-\cos(x) + 2\sin(x)]_0^{\pi/4} = A \left[-\frac{\sqrt{2}}{2} + 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - (-1) \right] = 1$$

$$\leadsto A = \frac{1}{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

3. Legyen ξ sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}}, & \text{ha } 9 < x < 16, \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$$

(a) Határozza meg ξ várható értékét! (3p)

(b) Határozza meg ξ szórását! (3p)

MO:

$$E(\xi) = \int_{\mathbb{R}} x f(x) = \int_9^{16} \frac{1}{2} \sqrt{x} = \frac{1}{2} \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_9^{16} = \frac{1}{3} (64 - 27) = \frac{37}{3} = 12.333$$

$$E(\xi^2) = \int_{\mathbb{R}} x^2 f(x) = \int_9^{16} \frac{1}{2} x^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2} \frac{2}{5} \left[x^{\frac{5}{2}} \right]_9^{16} = \frac{1}{5} (1024 - 243) = \frac{781}{5} = 156.2$$

$$\sigma^2(\xi) = E(\xi^2) - E^2(\xi) = 156.2 - 12.333^2 = 4.0971 \rightsquigarrow \sigma = 2.0241$$

4. Legyen a (ξ, η) valváltozó együttes sűrűségfüggvénye

$$f(x, y) = \begin{cases} 24xy & \text{ha } x > 0, y > 0, x+y < 1 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

- Határozza meg az $f_{\eta}(y)$ peremsűrűség-függvényt (2p)!
- Adja meg a $P(\xi < u, \frac{1}{\sqrt{6}} < \eta < \frac{1}{2})$ valószínűséget, mint u függvényét, ha $u \in [\frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{\sqrt{6}}]$ (5p)!

MO:

•

$$f_{\eta}(y) = \int_0^{1-y} 24xy \, dx = [12x^2 y]_0^{1-y} = 12(1 - 2y + y^2)y = 12y - 24y^2 + 12y^3$$

•

$$P(\xi < u, \frac{1}{\sqrt{6}} < \eta < \frac{1}{2}) = \int_0^{\frac{1}{2}} \int_{\frac{1}{\sqrt{6}}}^{\frac{1}{2}} f(x, y) \, dy dx + \int_{\frac{1}{2}}^u \int_{\frac{1}{\sqrt{6}}}^{1-x} f(x, y) \, dy dx$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} [12xy^2]_{\frac{1}{\sqrt{6}}}^{\frac{1}{2}} dx + \int_{\frac{1}{2}}^u [12xy^2]_{\frac{1}{\sqrt{6}}}^{1-x} dx =$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} 12x \underbrace{\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6} \right)}_{\frac{1}{12}} dx + \int_{\frac{1}{2}}^u 12x \underbrace{\left(1 - 2x + x^2 - \frac{1}{6} \right)}_{x^2 - 2x + \frac{5}{6}} dx$$

$$= \underbrace{\left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{\frac{1}{2}}}_{\frac{1}{8}} + [4x^4 - 8x^3 + 5x^2]_{\frac{1}{2}}^u = \frac{1}{8} + 4u^4 - 8u^3 + 5u^2 - \underbrace{\left(\frac{4}{16} - \frac{8}{8} + \frac{5}{4} \right)}_{\frac{1}{2}}$$

$$4u^4 - 8u^3 + 5u^2 - \frac{3}{8}$$

5. Az alábbi állítások közül melyek igazak (I) és melyek hamisak (H)? I válasz esetén indoklás, H válasz esetén ellenpélda szükséges, enélkül nem jár pont.

- (a) Két valószínűségi változó szorzatának várható értéke egyenlő a várható értékek szorzatával (2p).
- (b) Két független valószínűségi változó összegének szórásnégyzete egyenlő a szórásnégyzeteik összegével (2p).
- (c) Egy valószínűségi változó négyzetének várható értéke egyenlő a várható értékének a négyzetével (2p).
- (d) Ha két valószínűségi változó kovarianciája 0, akkor függetlenek (2p).
- (e) Ha $F(x, y)$ egy kétdimenziós vektor valószínűségi változó eloszlás függvénye, $F(x, y) \rightarrow 0$ ha $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ (2p).
- (f) Ha ξ egy folytonos valószínűségi változó, melynek a sűrűségfüggvénye $f(x)$, akkor $\eta = \sqrt{\xi}$ sűrűségfüggvénye $g(y) = \sqrt{f(y)}$ (2p).
- (g) A számláló mértékre nézve minden valószínűségi mérték abszolút folytonos (2p).
- (h) Ha $\Omega = [0, 1]$ akkor nem létezik olyan mérték, amely a számláló mértékre szinguláris (2p).

MO:

- (a) H, lásd pl. a 2-es feladat (csak független esetben igaz).
- (b) I, előadáson beláttuk: kell többek közt hogy fgtln esetben $E(\xi\eta) = E(\xi)E(\eta)$.
- (c) H, pl egyenletes eloszlás $[-1, 1]$ -en vagy $[0, 1]$ -en.
- (d) H (előadáson láttunk példát)
- (e) H (legalább az egyik $-\infty$ -be kell tartson)
- (f) H Pl Egyenletes eloszlás $[0, 1]$ -en: $g(y) = f(h^{-1}(y)) \left| \frac{dh^{-1}(y)}{dy} \right| = 2y \neq \sqrt{1}$ (ha $y \in [0, 1]$) (mert $h = \sqrt{x} \rightsquigarrow h^{-1}(y) = y^2$)
- (g) I, mert a számláló mérték csak az üres halmazon 0, ahol viszont minden mérték 0.
- (h) H, de igen a null mérték (mindenhez 0-t rendel: nem kell valószínűségi mértéknek lennie).

6. A Gólya presszóban csapolt korsó sör mennyiségét (ξ) 485 ml várható értékű, 15 ml szórású normális eloszlású valószínűségi változónak tekinthetjük. Mennyi a valószínűsége hogy fél liternél több sört kapok (3p)? Maximum mekkora mennyiségű sört tartalmaz a lecsapolt korsók 90%-a (3p)?

MO:

$$\bullet 1 - F_{\xi}(500) = 1 - \Phi\left(\frac{500-485}{15}\right) = 1 - \Phi(1) = 1 - 0.8413 = 0.1587$$

- $F_{\xi}(x) = \Phi\left(\frac{x-485}{15}\right) = 0.9 \quad \Phi(1.28) \approx 0.9 \rightsquigarrow \frac{x-485}{15} = 1.28 \rightsquigarrow x = 504.2 \text{ ml}$

7. Legyen ξ 1 paraméterű exponenciális eloszlású, és $\eta = \ln(\xi)$ Mi lesz η sűrűségfüggvénye (5p)?

MO: $f(x) = e^{-x}$ ha $x > 0$ $h(x) = \ln(x) \rightsquigarrow h^{-1}(y) = e^y \rightsquigarrow \frac{dh^{-1}(y)}{dy} = e^y$

$$g(y) = \begin{cases} 0, & \text{ha } y \leq 0, \\ e^{-e^y} e^y = e^{1-e^y} & \text{ha } y > 0 \end{cases}$$