

Valószínűségszámítás

Csercsik Dávid

2017 ősz

1. Zárthelyi dolgozat megoldásokkal

1. Négyyszer dobok két kockával (egy piros és egy fehér). Mi az esélye hogy a 4 dobásból legalább 2-szer lesz az összeg 9? (4p)

MO:

Először azt kell kiszámolni mennyi az esélye hogy 2 kockával dobva 9 az összeg. A 9-es összeg a következő módokon jöhet ki: $3 - 6$, $4 - 5$, $5 - 4$, $6 - 3$. Az összes eset $6^2 = 36$, tehát $p = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$ (2p).

A megoldás ezután binomiális eloszlás p paraméterrel

$$\begin{aligned} P\{\text{legalább két alkalommal 9 az összeg}\} &= \\ \binom{4}{2} \left(\frac{1}{9}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{9}\right)^2 &+ \binom{4}{3} \left(\frac{1}{9}\right)^3 \left(1 - \frac{1}{9}\right)^1 + \left(\frac{1}{9}\right)^4 \\ &= 0.0636 \quad (2p) \end{aligned}$$

2. Az alábbi állítások közül melyek igazak (I) és melyek hamisak (H)? I válasz esetén indoklás, H válasz esetén ellenpélda szükséges, enélkül nem jár pont.

- (a) $(\Omega, \mathfrak{F})$ mérhető tér, tegyük fel hogy Ω véges sok valós számot tartalmaz (nem üres). $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Igaz-e hogy ha f az identitás, akkor f mindig mérhető? (2p)
- (b) Legyen $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ valószínűségi mező, és $\xi > 0$ valváltozó. Igaz-e hogy $A > 0$ esetén $\frac{P(\xi > A)A}{E(\xi)} \leq 1$? (2p)
- (c) Egy diák vizsgázik. 10 tétel van, a diák nem tudja a 6-os sorszámút, de a többit igen. A tanár 2 lehetőséget ajánl fel a 'tételhúzásra': Vagy egy 10 oldalú dobókockával dob, vagy 3 db 4 oldalúval¹ (megkülönböztethetőek), és az eredményből levonnak 2-t. Igaz-e hogy érdemes a diáknak egyik vagy másik módszert preferálnia? (2p)

¹Dobótetraéder

$$(d) \Omega = \{A, B\}, \quad \mathfrak{F} = 2^\Omega. \quad \mu(H) = \begin{cases} c_1 & \text{ha } H = \emptyset \\ c_2 & \text{ha } H = \{A\} \text{ vagy ha } H = \{B\} \\ c_3 & \text{ha } H = \{A, B\} \end{cases} \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$$

Igaz-e hogy meg tudjuk választani a c_1, c_2, c_3 értékeket úgy hogy μ valószínűségi mérték legyen? (2p)

MO:

(a) H: legyen pl $\Omega \stackrel{\circ}{=} \{1, 2\}$ $\mathfrak{F} \stackrel{\circ}{=} \{\emptyset, \Omega\}$. Ekkor pl az $[1/2, 3/2]$ Borel halmaz ösképe ($\{1\}$) nem $\mathfrak{F}$ -beli.

(b) I: Markov egyenlőtlenség.

(c) I: az első esetben annak a valószínűsége hogy a 6-ost húzza $\frac{1}{10}$. A Második esetben az összes eset száma $4^3 = 64$ ebből a kedvező(tlen) esetek:

3-3-2, 3-2-3, 2-3-3, 1-3-4, 1-4-3, 3-1-4, 3-4-1, 4-1-3, 4-3-1, 2-2-4, 2-4-2, 4-2-2
 $\rightsquigarrow P = \frac{12}{64} > \frac{1}{10}$

(d) I: $c_1 = 0, \quad c_2 = 0.5, \quad c_3 = 1$

3. Egy irodában 3 nyomtató van, ugyanazon okirat nyomtatására. Az első naponta 10 példányt nyomtat, a második napi 15-öt, a 3-ik napi 25-öt. Átlagosan hibás: az első gép esetében 0.3, a második esetében 0.9, illetve a harmadik esetében 0.5. Az egész napi mennyiségből találmra kiveszünk egy példányt, és hibásnak találjuk. Mennyi a valószínűsége, hogy az első gép készítette (5p)?

MO: B_i : Az iratot az i -ik nyomtató készítette. A : Az irat hibás.

$$P(B_1) = \frac{10}{50} \quad P(B_2) = \frac{15}{50} \quad P(B_3) = \frac{25}{50}$$

$$P(A|B_1) = \frac{0.3}{10} \quad P(A|B_2) = \frac{0.9}{15} \quad P(A|B_3) = \frac{0.5}{25}$$

$$P(A|B_1) = \frac{P(A \cap B_1)}{P(B_1)} \quad P(B_1|A) = \frac{P(A \cap B_1)}{P(A)} \rightsquigarrow P(B_1|A) = \frac{P(A|B_1)}{P(A)} P(B_1)$$

$P(A)$ -t a teljes valószínűség tételével kifejezve:

$$P(B_1|A) = \frac{P(A|B_1)P(B_1)}{\sum_{i=1}^3 P(A|B_i)P(B_i)} = \frac{\frac{0.3}{10} \frac{10}{50}}{\frac{0.3}{10} \frac{10}{50} + \frac{0.9}{15} \frac{15}{50} + \frac{0.5}{25} \frac{25}{50}} = 0.1765$$

4. Egy dobozban 4 piros és 3 fehér golyó van.

(a) Mi a valószínűsége hogy 3 kihúzott golyóból 1 fehér (3p)?

(b) Visszatevés nélkül húzunk a dobozból, amíg pirosat nem kapunk. Jelöljük Y -al a húzások számát. Adjuk meg Y eloszlását (3p)!

MO: ξ : hány fehér van a kihúzott 3 között

(a) Hipergeometrikus eloszlás ($N = 7, K = 3, n = 3$)

$$P(\xi = 1) = \frac{\binom{K}{k} \binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}} = \frac{\binom{3}{1} \binom{4}{2}}{\binom{7}{3}} = 0.5143$$

(b)

$$P(Y = 1) = \frac{4}{7} = 0.5714$$

$$P(Y = 2) = \frac{3}{7} \frac{4}{6} = 0.2857$$

$$P(Y = 3) = \frac{3}{7} \frac{2}{6} \frac{4}{5} = 0.1143$$

$$P(Y = 4) = \frac{3}{7} \frac{2}{6} \frac{1}{5} = 0.0286$$

5. Sándor a déltengeri kalóz, vitorláshajókat fosztogat. A zsákmány érte (aranytallérban) a hajótípustól függ: Halászhajó: 50, Caravel: 150, Galleon: 320, Fregatt: 500. Az egyes hajótípusok feltűnési gyakorisága (tegyük fel hogy egy nap legfeljebb egy hajóval találkozik) az alábbi táblázatban adott. Mi lesz Sándor napi zsákmányának várható értéke (2p) és szórása (2p)?

Halászhajó	5/10
Caravel	2/10
Galleon	1/6
Fregatt	2/30

MO:

$$E(\xi) = 50 \cdot \frac{15}{30} + 150 \cdot \frac{6}{30} + 320 \cdot \frac{5}{30} + 500 \cdot \frac{2}{30} + (0 \cdot \frac{2}{30}) = \frac{4250}{30} = 141.6667$$

$$E(\xi^2) = 50^2 \cdot \frac{15}{30} + 150^2 \cdot \frac{6}{30} + 320^2 \cdot \frac{5}{30} + 500^2 \cdot \frac{2}{30} + = 39483$$

$$\sigma^2(\xi) = E(\xi^2) - E^2(\xi) = 19414 \rightsquigarrow \sigma(\xi) = 139.33$$

6. Egy telefonközpontba egy óra alatt 0,04 valószínűséggel nem fut be hívás. Átlagosan hány hívás fut be egy óra alatt (3p)?

MO: Poission eo.

$$P(\xi = 0) = \frac{\lambda^0}{0!} e^{-\lambda} \rightsquigarrow 0.04 = e^{-\lambda} \rightsquigarrow \lambda = -\ln(0.04) \approx 3.2189$$

ami egyben a várható érték.