Beugró feladatok

I. Centrális határeloszlás tétel

$$\xi_i = \begin{cases} 1 & \text{ha az } i\text{-dik kísérletben A esemény bekövetkezik} \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

$$\Rightarrow E(\xi_i) = 1 \cdot p + 0(1-p) = p$$

$$\sigma^2(\xi_i) = 1^2 \cdot p + 0^2(1-p) - p^2 = p(1-p)$$

$$|E(\xi_i^2) - E^2(\xi_i)|$$

$$\xi = \sum_{i=1}^{n} \xi_i$$

$$\boxed{P\left(\frac{\xi - n \cdot E(\xi_i)}{\sqrt{n} \cdot \sigma(\xi_i)} < x\right) \approx \Phi(x)}$$

$$\Downarrow$$

$$P\left(\frac{\xi - np}{\sqrt{np(1-p)}} < x\right) \approx \Phi(x)$$

1. 300 egyforma gép, átlag 210 működik. Hány gép számára kell elegendő energia, ha azt szeretnénk, hogy 99%-os valószínűséggel minden működőképes gép működjön?

$$\left.\begin{array}{l} n = 300 \\ E(\xi) = 210 \end{array}\right\} E(\xi) = n \cdot p \Rightarrow p = \frac{E(\xi)}{n} = \frac{210}{300} = 0{,}7 = E(\xi_i)$$

$\Phi(x) = 0{,}99$ $\qquad \sigma^2(\xi_i) = p(1-p) = 0{,}7 \cdot 0{,}3 = 0{,}21$

$\xi = \sum_i \xi_i = ?$

$$P\left(\frac{\xi - n \cdot E(\xi_i)}{\sqrt{n} \cdot \sigma(\xi_i)} < x\right) \approx \Phi(x)$$

$$P\left(\frac{\xi - 300 \cdot 0{,}7}{\sqrt{300 \cdot 0{,}21}} < x\right) = P(\xi < x \cdot \sqrt{63} + 210) \approx \underbrace{\Phi(x) = 0{,}99}_{x = 2{,}33}$$

$$\Rightarrow \xi < 2{,}33 \cdot \sqrt{63} + 210 \approx 228{,}5$$

$\Rightarrow$ minimum 229 gépnek kell energia

2. Egy esemény bekövetkezésének a valsége 0,6. Ha 2000 kísérletet végzünk, mi lesz a valsége, hogy a relatív gyakorisága (ξ/n) 0,58 és 0,62 közé esik?

$$\boxed{\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)}$$

$p = 0{,}6 = E(\xi_i)$ $\qquad \sigma^2(\xi_i) = 0{,}6 \cdot 0{,}4 = 0{,}24$

$n = 2000$

$$P\left(0{,}58 < \frac{\xi}{2000} < 0{,}62\right) = ? = \overbrace{P(\xi < \overbrace{2000 \cdot 0{,}62}^{1240})}^{P_1} - \overbrace{P(\xi < \overbrace{0{,}58 \cdot 2000}^{1160})}^{P_2} = \underline{0{,}9328}$$

$$P_1 = P\left(\frac{\xi - n \cdot E(\xi_i)}{\sqrt{n} \cdot \sigma(\xi_i)} < \frac{1240 - 2000 \cdot 0{,}6}{\sqrt{2000 \cdot 0{,}24}}\right) \approx \Phi\left(\frac{1240 - 2000 \cdot 0{,}6}{\sqrt{2000 \cdot 0{,}24}}\right) = \Phi\left(\frac{40}{\sqrt{480}}\right) = 0{,}9664$$

$$P_2 = P\left(\frac{\xi - n \cdot E(\xi_i)}{\sqrt{n} \cdot \sigma(\xi_i)} < \frac{1160 - 2000 \cdot 0{,}6}{\sqrt{2000 \cdot 0{,}24}}\right) \approx \Phi\left(\frac{-40}{\sqrt{480}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{40}{\sqrt{480}}\right) = 0{,}0336$$

II. Maximum likelihood

ξ	0	1	2
$P(\xi=k)$	$\frac{a\theta}{b}$	$\frac{\theta}{c}$	$\frac{d(1-\theta)}{e}$

minta: $\underbrace{2,1,2,0,1}_{5db}$

1db nulla, 2db egyes, 2db kettes

$$L(\theta)=\left(\frac{a\theta}{b}\right)^1\cdot\left(\frac{\theta}{c}\right)^2\cdot\left(\frac{d(1-\theta)}{e}\right)^2$$

ln

$$l(\theta)=\ln\frac{a}{b}+\ln\theta+2(\ln 1/c+\ln\theta)+2(\ln\tfrac{d}{e}+\ln(1-\theta))=$$

$$=\underbrace{\ln a/b+2\ln 1/c+2\ln d/e}_{\text{konstans}-C}+3\ln\theta+2\ln(1-\theta)$$

deriválom θ szerint

$$\frac{d\,l(\theta)}{d\theta}=\frac{3}{\theta}-\frac{2}{1-\theta}=0$$

$$\Rightarrow 3-3\theta-2\theta=0$$

$$3=5\theta$$

$3/5=\theta \Rightarrow \theta$ ML becslése

III. Konfidencia intervallum

(1.) Normális eloszlás, ismert szórás

becsüljük $E(\xi)=m$-t

$\eta:\frac{\bar{\xi}-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ $\Rightarrow$ η standard normális ev.

$$\boxed{P(-z<\eta<z)}=\phi(z)-\phi(-z)=\phi(z)-(1-\phi(z))=\boxed{2\phi(z)-1}=1-\alpha$$

$\Rightarrow \phi(z)=1-\frac{\alpha}{2}$ |ahol α a hiba| $(z=\phi^{-1}(1-\frac{\alpha}{2}))$

$$\Rightarrow -z<\frac{\bar{\xi}-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}<z \Rightarrow \bar{\xi}-\underbrace{z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}_{\text{hiba}}<m<\bar{\xi}+z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

1. Egy áramköri elem méretének szórása 0,5 mm. Legalább hány mérés szükséges ahhoz, hogy a mérések átlagának hibája 95%-os valséggel 0,1 mm-nél kisebb legyen?

$\sigma=0,5$

$P=0,95$

hiba $<0,1$

$n=?$

$$P\left(\frac{\bar{\xi}-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}<z\right)=\underbrace{2\phi(z)-1=0,95}$$

$$\phi(z)=\frac{1,95}{2}\Rightarrow z=1,96$$

$$z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}<0,1\Rightarrow 1,96\cdot\frac{0,5}{\sqrt{n}}<0,1$$

$$\Rightarrow\left(\frac{1,96\cdot 0,5}{0,1}\right)^2<n\Rightarrow n=96,04$$

$\Rightarrow$ minimum 97 mérés kell

2.) Nem normális eloszlás, ismert szórással

ha az eloszlás nem normális, akkor CHT-val becsüljük

$$P\left(\frac{\sum \xi_i - nE(\xi_i)}{\sqrt{n}\,\sigma(\xi_i)} < x\right) \approx \Phi(x)$$

ezzel a $\Phi(x)$-szel tudok tovább számolni

$$P\left(\frac{\bar{\xi}-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < z\right) \approx 2\Phi(z)-1$$

$$\Rightarrow \left[\bar{\xi} - z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{\xi} + z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

3.) Normális eloszlás, ismeretlen szórással (=STUDENT)

$E(\xi)=m$-t becsüljük

mivel σ ismeretlen, ezért $\eta = \frac{\bar{\xi}-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$-t becsüljük

$$\Leftrightarrow \boxed{\tau = \frac{\bar{\xi}-m}{\frac{s_n}{\sqrt{n}}}}$$

- s_n: korrigált empirikus szórás
- τ: Student-féle t eloszlású $f=n-1$ szabadságfokkal

empirikus szórásnégyzet: $\frac{(\bar{\xi}-\xi_1)^2 + (\bar{\xi}-\xi_2)^2 + \ldots + (\bar{\xi}-\xi_n)^2}{n} = \sigma_n^2$

korrigált empirikus szórásnégyzet: $s_n^2 = \frac{n}{n-1}\cdot\sigma_n^2$

mintaátlag: $\bar{\xi} = \frac{\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n}{n}$

$\Rightarrow$ konfidencia intervallum: $\left]\bar{\xi} - t\frac{s_n}{\sqrt{n}}, \bar{\xi} + t\frac{s_n}{\sqrt{n}}\right[$

1. Adott a következő adatsor: 6,04 ; 5,89 ; 6,07 ; 6,15 ; 5,97
Határozd meg a várható értékre 90%-os konfidencia intervallumot!

$$\bar{\xi} = \frac{6{,}04 + 5{,}89 + 6{,}07 + 6{,}15 + 5{,}97}{5} = 6{,}024$$

$$\sigma_n = \sqrt{\frac{(6{,}024-6{,}04)^2 + (6{,}024-5{,}89)^2 + (6{,}024-6{,}07)^2 + (6{,}024-6{,}15)^2 + (6{,}024-5{,}97)^2}{5}} = 0{,}0884$$

$$s_n = \sqrt{\frac{n}{n-1}\sigma_n^2} = \sqrt{\frac{5}{4}\cdot 0{,}0884^2} = 0{,}0988$$

$f = n-1 = 4$ (szabadságfok) $\Rightarrow$ $t = 2{,}132$ (táblázatból)

$$\Rightarrow CI = \left]\bar{\xi} - t\frac{s_n}{\sqrt{n}}, \bar{\xi} + t\frac{s_n}{\sqrt{n}}\right[= \left]6{,}024 - 2{,}132\cdot\frac{0{,}0988}{\sqrt{5}}; 6{,}024 + 2{,}132\cdot\frac{0{,}0988}{\sqrt{5}}\right[$$