

Valószínűségszámítás vizsgatételek

Vághy Mihály

Tartalomjegyzék

1. Tétel	6
1.1. Eseménytér	6
1.1.1. Esemény	6
1.2. σ -algebra	6
1.2.1. Következmény	6
1.2.2. Példa azonos eseménytér feletti különböző σ -algebrákra	6
2. Tétel	7
2.1. Eloszlás	7
2.2. Eloszlásfüggvény	7
2.2.1. Tulajdonságok	7
2.3. Diszkrét eloszlású valószínűségi változó	7
2.3.1. Képtér	7
2.3.2. Eloszlás	7
2.3.3. Eloszlásfüggvény	7
3. Tétel	8
3.1. Független események	8
3.2. Független eseményrendszer	8
3.3. Feltételes valószínűség	8
3.4. Teljes valószínűség tétel	8
3.5. Bayes tétel	8
4. Tétel	9
4.1. Binomiális eloszlás	9
4.1.1. Példa	9
4.2. Poisson eloszlás	9
4.3. Kapcsolat a binomiális és a Poisson eloszlás között	9
5. Tétel	10
5.1. Geometrikus eloszlás	10
5.1.1. Példa	10
5.1.2. Várható érték	10
5.2. Hipergeometrikus eloszlás	10
5.2.1. Példa	10
6. Tétel	11
6.1. Diszkrét eloszlású valószínűségi változó	11
6.1.1. Képtér	11
6.1.2. Várható érték kiszámítása	11
6.2. Binomiális eloszlás	11
6.2.1. Várható érték	11
6.3. Poisson eloszlás	11
6.3.1. Várható érték	11
7. Tétel	12
7.1. Valószínűségi változó	12
7.1.1. Eloszlás	12
7.2. Folytonos eloszlású valószínűségi változó	12
7.2.1. Sűrűségfüggvény	12
7.2.1.1. Tulajdonságok	12
7.2.2. Intervallumba esés valószínűsége	12
7.2.3. Kapcsolatos a sűrűségfüggvény és az eloszlásfüggvény között	12

8. Tétel	13
8.1. Folytonos eloszlású valószínűségi változó	13
8.2. Várható érték kiszámítása	13
8.3. Exponenciális eloszlás	13
8.3.1. Tétel	13
8.3.2. Várható érték	13
9. Tétel	14
9.1. Normális eloszlás	14
9.1.1. Standard normális eloszlás	14
9.1.1.1. Kapcsolat a normális és a standard normális eloszlás között	14
10. Tétel	15
10.1. Szórás, szórásnégyzet	15
10.1.1. Kiszámítása	15
10.1.1.1. Diszkrét eset	15
10.1.1.2. Folytonos eset	15
10.2. k oldalú szabályos testtel való dobás szórása	15
11. Tétel	16
11.1. Mérhető tér	16
11.2. Mérhető függvény	16
11.2.1. Példa nem mérhető függvényre	16
11.3. Mérték	16
11.3.1. Példa mértékekre	16
11.4. Valószínűségi mérték	16
11.5. Valószínűségi mező	16
11.6. Valószínűségi változó	16
12. Tétel	17
12.1. Indikátorfüggvény	17
12.2. Lépcsős függvény	17
12.3. Lépcsős függvény adott halmaz feletti és mérték szerinti integrálja	17
12.4. Várható érték	17
12.4.1. Kiszámítása diszkrét esetben	17
12.5. Markov egyenlőtlenség	17
13. Tétel	18
13.1. Külső Lebesgue-mérték	18
13.2. Mértékek abszolút folytonossága	18
13.3. Mértékek szingularitása	18
13.4. Radon-Nikodym tétel	18
14. Tétel	19
14.1. Valószínűségi változó által generált σ -algebra	19
14.1.1. Valószínűségi változó által generált σ -algebra	19
14.2. Független valószínűségi változók	19
14.2.1. Független valószínűségi változók várható értéke	19
14.2.2. Független valószínűségi változók szórása	19
14.2.3. Független valószínűségi változók együttes eloszlása	19

15. Tétel	20
15.1. Vektor értékű valószínűségi változó	20
15.1.1. Eloszlás	20
15.1.2. Eloszlásfüggvény	20
15.1.2.1. Tulajdonságok	20
15.1.2.2. Peremeloszlás-függvények diszkrét esetben	20
15.2. Folytonos vektor értékű valószínűségi változók	20
15.2.1. Összefüggés a peremsűrűség-függvények és az együttes sűrűségfüggvény között független esetben	21
15.2.2. Peremsűrűség-függvények	21
15.2.3. Intervallumba esés valószínűsége	21
16. Tétel	22
16.1. Kovariancia	22
16.1.1. Kovariancia kiszámítása	22
16.1.1.1. Diszkrét eset	22
16.1.1.2. Folytonos eset	22
16.1.2. Kovariancia független esetben	22
16.1.3. Valószínűségi változó standardizáltja	22
16.2. Korrelációs együttható	22
17. Tétel	23
17.1. Diszkrét eset	23
17.2. Folytonos eset	23
17.2.1. Lineáris transzformáció	23
18. Tétel	24
18.1. Diszkrét feltételes eloszlás eloszlásfüggvénye	24
18.2. Folytonos feltételes eloszlás eloszlásfüggvénye	24
18.2.1. Sűrűségfüggvény	24
18.2.2. Várható érték	24
18.2.2.1. Regressziós függvény	24
19. Tétel	25
19.1. 1-valószínűséggel megegyező valószínűségi változók	25
19.2. $\mathcal{L}^p$ tér	25
19.3. p -norma	25
19.4. Konvergencia-fajták $\mathcal{L}^p$ terekben	25
19.4.1. 1-valószínűséggel egyenletes konvergencia	25
19.4.2. 1-valószínűséggel konvergencia	25
19.4.3. $\mathcal{L}^p$ -ben való konvergencia	25
19.4.4. Sztochasztikus konvergencia	25
19.4.5. Eloszlásban való konvergencia	26
19.4.6. Konvergencia-fajták közti összefüggés	26
19.5. Centrális határeloszlás tétel	26
19.6. DeMoivre-Laplace tétel	26
20. Tétel	27
20.1. Minta	27
20.1.1. Középérték	27
20.1.2. Empirikus szórás	27
20.1.2.1. Korrigált empirikus szórásnégyzet	27
20.1.3. Középpont	27
20.1.4. Medián	27
20.1.5. Terjedelem	27
20.1.6. Empirikus eloszlásfüggvény	27

20.1.7. Empirikus sűrűségfüggvény	27
20.2. Becslés	28
20.2.1. Tulajdonságok	28
20.3. Maximum likelihood estimation	28
20.4. Konfidenciaintervallum	28
20.4.1. Normális eloszlás ismert szórással	28
20.4.2. Nem normális eloszlás ismert szórással	29

1. Tétel

1.1. Eseménytér

Eseménytérnek nevezünk egy Ω nemüres halmazt.

1.1.1. Esemény

Események az eseménytér részhalmazai. Elemi események az eseménytér egyelemű részhalmazai.

1.2. σ -algebra

$\mathcal{F}$ legyen Ω részhalmazainak olyan rendszere, hogy

1. $\mathcal{F}$ zárt a véges és a megszámlálhatóan végtelen unióra
2. $\mathcal{F}$ zárt a különbségképzésre
3. $\Omega \in \mathcal{F}$.

Ekkor $\mathcal{F}$ egy σ -algebra, az elemeit pedig eseménynek nevezzük.

1.2.1. Következmény

Ha $\mathcal{F}$ egy σ -algebra, akkor zárt a komplementerképzésre és a metszetre is, hiszen

$$\begin{aligned} A^C &= \Omega \setminus A \\ A \cap B &= (A^C \cup B^C)^C = \Omega \setminus ((\Omega \setminus A) \cup (\Omega \setminus B)). \end{aligned}$$

1.2.2. Példa azonos eseménytér feletti különböző σ -algebrákra

Legyen $\Omega = \{1, 2\}$. Ekkor legyen

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1 &= \{\emptyset, \{1, 2\}\} \\ \mathcal{F}_2 &= \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}. \end{aligned}$$

2. Tétel

2.1. Eloszlás

Adott $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ valószínűség mező és $\xi : (\Omega, \mathcal{F}, P) \mapsto \mathbb{R}$ valószínűségi változó. Ekkor $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ ξ eloszlása

$$Q_{\xi}(A) = P(\xi^{-1}(A)).$$

2.2. Eloszlásfüggvény

Adott $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ valószínűségi mező és $\xi : (\Omega, \mathcal{F}, P) \mapsto \mathbb{R}$ valószínűségi változó. Ekkor ξ eloszlásfüggvénye $F_{\xi} : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$

$$F_{\xi}(x) = P(\xi < x) = P(\omega \in \Omega | \xi(\omega) < x) = P(\xi^{-1}((-\infty, x))) = Q_{\xi}((-\infty, x)).$$

2.2.1. Tulajdonságok

Adott $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ valószínűség mező és $\xi : (\Omega, \mathcal{F}, P) \mapsto \mathbb{R}$ valószínűségi változó, melynek eloszlásfüggvénye F_{ξ} . Ekkor

1. F_{ξ} monoton nő
2. F_{ξ} balról folytonos
- 3.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F_{\xi}(x) = 0$$

- 4.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F_{\xi}(x) = 1.$$

2.3. Diszkrét eloszlású valószínűségi változó

Egy valószínűségi változót diszkrétnek nevezünk, ha legfeljebb megszámlálhatóan végtelen sok értéket vesz fel.

2.3.1. Képtér

Adott $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ valószínűség mező és $\xi : (\Omega, \mathcal{F}, P) \mapsto \mathbb{R}$ valószínűségi változó. Ekkor ξ képtere

$$\text{Im } \xi = \{\xi_n | n \in \mathbb{N}\} = \{\xi(\omega) | \omega \in \Omega\}.$$

2.3.2. Eloszlás

Adott $\xi : (\Omega, \mathcal{F}, P) \mapsto \mathbb{R}$ diszkrét eloszlású valószínűségi változó. Ekkor $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ ξ eloszlása

$$Q_{\xi}(A) = P(\xi^{-1}(A)) = \sum_{\xi_i \in \xi^{-1}(A)} P(\xi = \xi_i).$$

2.3.3. Eloszlásfüggvény

Adott $\xi : (\Omega, \mathcal{F}, P) \mapsto \mathbb{R}$ diszkrét eloszlású valószínűségi változó. Ekkor

$$F_{\xi}(x) = Q_{\xi}((-\infty, x)) = \sum_{\xi_i < x} P(\xi = \xi_i).$$

3. Tétel

3.1. Független események

Adott $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ valószínűségi mező. $A, B \in \mathcal{F}$ függetlenek pontosan akkor, ha $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

3.2. Független eseményrendszer

Adott $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ valószínűségi mező. Ekkor az $(A_k)_{k \leq n \in \mathbb{N}}$ eseményrendszer független, ha az A_k események páronként függetlenek. Ekkor

$$P\left(\bigcap_{k=1}^n A_k\right) = \prod_{k=1}^n P(A_k).$$

3.3. Feltételes valószínűség

Adott $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ valószínűségi mező. Ekkor $A \in \mathcal{F}$ feltételes valószínűsége $B \in \mathcal{F}$ szerint

$$P_B(A) = P(A|B) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

3.4. Teljes valószínűség tétel

Adott $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ valószínűségi mező és $(B_k)_{k \leq n \in \mathbb{N}}$ teljes eseményrendszer, melyre $\forall P(B_k) > 0$. Ekkor $\forall A \in \mathcal{F}$ esetén

$$P(A) = \sum_{k=1}^n P(A|B_k)P(B_k).$$

Bizonyítás

Tudjuk, hogy

$$A = A \cap \Omega = A \cap \left(\bigcup_{k=1}^n B_k\right) = \bigcup_{k=1}^n (A \cap B_k) \implies P(A) = \sum_{k=1}^n P(A \cap B_k)$$

és $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \implies P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$. Ekkor

$$P(A) = \sum_{k=1}^n P(A \cap B_k) = \sum_{k=1}^n P(A|B_k)P(B_k).$$

3.5. Bayes tétel

Adott $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ valószínűségi mező és $(B_k)_{k \leq n \in \mathbb{N}}$ teljes eseményrendszer, melyre $\forall P(B_k) > 0$. Ekkor $\forall A \in \mathcal{F}$ esetén

$$P(B_k|A) = \frac{P(A|B_k)P(B_k)}{P(A)} = \frac{P(A|B_k)P(B_k)}{\sum_{j=1}^n P(A|B_j)P(B_j)}.$$

Bizonyítás

Tudjuk, hogy $P(B_k|A)P(A) = P(B_k \cap A) = P(A \cap B_k) = P(A|B_k)P(B_k)$. Ebből

$$P(B_k|A) = \frac{P(A|B_k)P(B_k)}{P(A)}.$$

4. Tétel

4.1. Binomiális eloszlás

Azt mondjuk, hogy $\xi : (\Omega, \mathcal{F}, P) \mapsto \mathbb{R}$ valószínűségi változó (n, p) paraméterű binomiális eloszlású, ha

$$P(\xi = k)_{k \leq n} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Ekkor

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 0 \\ \sum_{m=0}^k \binom{n}{m} p^m (1-p)^{n-m}, & \text{ha } k < x \leq k+1. \\ 1, & \text{ha } x > n. \end{cases}$$

4.1.1. Példa

Valószínűségyszámításból egy hallgató p valószínűséggel megy át. Ekkor n hallgatóból átment hallgatók száma binomiális eloszlású.

4.2. Poisson eloszlás

Azt mondjuk, hogy $\xi : (\Omega, \mathcal{F}, P) \mapsto \mathbb{R}$ valószínűségi változó λ paraméterű Poisson eloszlású, ha

$$P(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

4.3. Kapcsolat a binomiális és a Poisson eloszlás között

A Poisson eloszlás közelíti, illetve határértékben felveszi a binomiális eloszlást ha $np = \lambda$ állandó (tehát a várható értékük azonos).

Bizonyítás

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} P(\xi = k) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n!}{(n-k)!}}{n^k} \frac{\lambda^k}{k!} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \end{aligned}$$

5. Tétel

5.1. Geometrikus eloszlás

Azt mondjuk, hogy $\xi : (\Omega, \mathcal{F}, P) \mapsto \mathbb{R}$ valószínűségi változó p paraméterű geometrikus eloszlású, ha

$$P(\xi = k) = p(1 - p)^{k-1}.$$

5.1.1. Példa

Valószínűségszámításból egy hallgató p valószínűséggel megy át. Ekkor annak a valószínűsége, hogy hanyadik hallgató megy át először, geometrikus eloszlású.

5.1.2. Várható érték

ξ p paraméterű geometrikus eloszlású valószínűség változó várható értéke $\frac{1}{p}$.

Bizonyítás

Tudjuk, hogy $P(\xi = k) = p(1 - p)^{k-1}$. Ekkor

$$E(\xi) = \sum_{k=0}^n kp(1 - p)^{k-1} = p \sum_{k=1}^n k(1 - p)^{k-1}.$$

Tudjuk, hogy $\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$ ha $x \in (-1, 1)$. Ezen felül tudjuk, hogy egy hatványsor a konvergenciahalmaz belső pontjaiban tagonként differenciálható, tehát

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{1-x} = \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1}.$$

Mivel $1 - p \in (-1, 1)$, így

$$E(\xi) = \frac{p}{(1 - (1 - p))^2} = \frac{1}{p}.$$

5.2. Hipergeometrikus eloszlás

Azt mondjuk, hogy $\xi : (\Omega, \mathcal{F}, P) \mapsto \mathbb{R}$ valószínűségi változó (N, K, n) paraméterű hipergeometrikus eloszlású, ha

$$P(\xi = k) = \frac{\binom{K}{k} \binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

5.2.1. Példa

Valószínűségszámításból K darab fiú és $N - K$ darab lány vizsgázik. Feltéve, hogy ugyanakkora valószínűséggel mennek át, annak a valószínűsége, hogy pontosan k hallgató megy át, hipergeometrikus eloszlású.

6. Tétel

6.1. Diszkrét eloszlású valószínűségi változó

Egy valószínűségi változót diszkrétnek nevezünk, ha legfeljebb megszámlálhatóan végtelen sok értéket vesz fel.

6.1.1. Képtér

Adott $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ valószínűség mező és $\xi : (\Omega, \mathcal{F}, P) \mapsto \mathbb{R}$ valószínűségi változó. Ekkor ξ képtere

$$\text{Im } \xi = \{\xi_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{\xi(\omega) \mid \omega \in \Omega\}.$$

6.1.2. Várható érték kiszámítása

Adott $\xi : (\Omega, \mathcal{F}, P) \mapsto \mathbb{R}$ valószínűségi változó és képtere

$$\text{Im } \xi = \{\xi_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{\xi(\omega) \mid \omega \in \Omega\}.$$

Ekkor

$$E(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n P(\xi = \xi_n).$$

6.2. Binomiális eloszlás

Azt mondjuk, hogy $\xi : (\Omega, \mathcal{F}, P) \mapsto \mathbb{R}$ valószínűségi változó (n, p) paraméterű binomiális eloszlású, ha

$$P(\xi = k)_{k \leq n} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

6.2.1. Várható érték

ξ (n, p) paraméterű binomiális eloszlású valószínűségi változó várható értéke np .

Bizonyítás

Tudjuk, hogy $P(\xi = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$. Ekkor

$$E(\xi) = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = np \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-1-(k-1)}$$

hiszen $\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}$ (elnyelési tulajdonság).

$$E(\xi) = np \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-1-(k-1)} = np \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{n-1-k} = np$$

6.3. Poisson eloszlás

Azt mondjuk, hogy $\xi : (\Omega, \mathcal{F}, P) \mapsto \mathbb{R}$ valószínűségi változó λ paraméterű Poisson eloszlású, ha

$$P(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

6.3.1. Várható érték

ξ λ paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változó várható értéke λ .

Bizonyítás

Tudjuk, hogy $P(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$. Ekkor

$$E(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda} = \lambda \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \lambda.$$

7. Tétel

7.1. Valószínűségi változó

Adott $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ valószínűségi mező. Ekkor a $\xi : (\Omega, \mathcal{F}, P) \mapsto \mathbb{R}$ mérhető függvényt valószínűségi változónak nevezzük.

7.1.1. Eloszlás

Adott $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ valószínűség mező és $\xi : (\Omega, \mathcal{F}, P) \mapsto \mathbb{R}$ valószínűségi változó. Ekkor $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ ξ eloszlása

$$Q_{\xi}(A) = P(\xi^{-1}(A)).$$

7.2. Folytonos eloszlású valószínűségi változó

Adott $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ valószínűségi mező és $\xi : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ valószínűségi változó. Azt mondjuk, hogy ξ folytonos eloszlású, ha $Q_{\xi} \ll \lambda_{\mathbb{R}}$.

7.2.1. Sűrűségfüggvény

Adott ξ folytonos eloszlású valószínűségi változó. Ekkor $\exists! f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ olyan mérhető függvény, hogy $\forall A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ esetén

$$Q_{\xi}(A) = \int_A f \, d\lambda_{\mathbb{R}}.$$

Ekkor f a ξ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye, illetve a Q_{ξ} eloszlás sűrűségfüggvénye.

7.2.1.1. Tulajdonságok

Adott ξ folytonos eloszlású valószínűség változó f_{ξ} sűrűségfüggvénnyel.

1. $f_{\xi} \geq 0$

- 2.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi} \, dt = \int_{\mathbb{R}} f_{\xi} \, d\lambda_{\mathbb{R}} = Q_{\xi}(\mathbb{R}) = P(\xi^{-1}(\mathbb{R})) = 1$$

7.2.2. Intervallumba esés valószínűsége

Adott $\xi : (\Omega, \mathcal{F}, P) \mapsto \mathbb{R}$ folytonos eloszlású valószínűségi változó és $[a, b] \subset \mathbb{R}$ intervallum. Ekkor

$$P(a < \xi < b) = P(a \leq \xi < b) = P(a < \xi \leq b) = P(a \leq \xi \leq b) = F_{\xi}(b) - F_{\xi}(a) = \int_a^b f_{\xi}(x) \, dx.$$

7.2.3. Kapcsolatos a sűrűségfüggvény és az eloszlásfüggvény között

Adott $\xi : (\Omega, \mathcal{F}, P) \mapsto \mathbb{R}$ folytonos eloszlású valószínűségi változó. Ekkor

$$F_{\xi}(x) = \int_{-\infty}^x f_{\xi}(t) \, dt$$

illetve

$$F'_{\xi}(x) = f_{\xi}(x).$$

8. Tétel

8.1. Folytonos eloszlású valószínűségi változó

Adott $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ valószínűségi mező és $\xi : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ valószínűségi változó. Azt mondjuk, hogy ξ folytonos eloszlású, ha $Q_\xi \ll \lambda_{\mathbb{R}}$.

8.2. Várható érték kiszámítása

Adott ξ folytonos eloszlású valószínűségi változó várható értéke

$$E(\xi) = \int_{\Omega} \xi \, dP = \int_{\mathbb{R}} \text{id}_{\mathbb{R}} \, dQ_\xi = \int_{\mathbb{R}} \text{id}_{\mathbb{R}} \frac{dQ_\xi}{d\lambda_{\mathbb{R}}} \, d\lambda_{\mathbb{R}} = \int_{-\infty}^{\infty} x f_\xi(x) \, dx.$$

8.3. Exponenciális eloszlás

Azt mondjuk, hogy a ξ folytonos eloszlású valószínűségi változó α paraméterű exponenciális eloszlású, ha

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x}, & \text{ha } x > 0 \\ 0, & \text{ha } x \leq 0. \end{cases}$$

8.3.1. Tétel

Adott ξ α paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó. Ekkor f_ξ valóban sűrűségfüggvény.

Bizonyítás

Tudjuk, hogy $f_\xi \geq 0$. Ezen felül

$$\int_{-\infty}^{\infty} \alpha e^{-\alpha x} \, dx = \int_0^{\infty} \alpha e^{-\alpha x} \, dx = -e^{-\alpha x} \Big|_0^{\infty} = 1$$

tehát f_ξ valóban sűrűségfüggvény.

8.3.2. Várható érték

ξ α paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó várható értéke $\frac{1}{\alpha}$.

Bizonyítás

$$E(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_\xi(x) \, dx = \int_0^{\infty} x \alpha e^{-\alpha x} \, dx = -x e^{-\alpha x} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \, dx = -\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha x} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{\alpha}$$

9. Tétel

9.1. Normális eloszlás

Azt mondjuk, hogy a ξ folytonos eloszlású valószínűségi változó (m, σ) paraméterű normális eloszlású, ha

$$f_{\xi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}.$$

9.1.1. Standard normális eloszlás

Azt mondjuk, hogy a ξ folytonos eloszlású valószínűségi változó standard normális eloszlású, ha $(m = 0, \sigma = 1)$ paraméterű normális eloszlású. Ekkor

$$f_{\xi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

és

$$\Phi(x) = F_{\xi}(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

9.1.1.1. Kapcsolat a normális és a standard normális eloszlás között

Adott $\xi(m, \sigma)$ normális eloszlású valószínűségi változó eloszlásfüggvénye visszavezethető standard normális eloszlására.

Bizonyítás

$$F_{\xi}(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} dt \stackrel{\substack{z=\frac{t-m}{\sigma} \\ dt=\sigma dz}}{=} \int_{-\infty}^{\frac{x-m}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{z^2}{2}} \sigma dz = \int_{-\infty}^{\frac{x-m}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)$$

10. Tétel

10.1. Szórás, szórásnégyzet

Adott $\xi : (\Omega, \mathcal{F}, P) \mapsto \mathbb{R}$ valószínűségi változó véges várható értékkel. Ekkor ξ szórása

$$\sigma(\xi) = \sqrt{E\left((\xi - E(\xi))^2\right)}.$$

ξ szórásnégyzete vagy varianciája

$$\sigma^2(\xi) = E\left((\xi - E(\xi))^2\right).$$

10.1.1. Kiszámítása

Adott ξ valószínűségi változó. Ekkor

$$\sigma^2(\xi) = E(\xi^2) - E^2(\xi).$$

Bizonyítás

$$\begin{aligned}\sigma^2(\xi) &= E\left((\xi - E(\xi))^2\right) = E(\xi^2 - 2E(\xi)\xi + E^2(\xi)) = E(\xi^2) - 2E(E(\xi)\xi) + E(E^2(\xi)) = \\ &= E(\xi^2) - 2E(\xi)E(\xi) + E^2(\xi) = E(\xi^2) - E^2(\xi)\end{aligned}$$

10.1.1.1. Diszkrét eset

Adott $\xi : (\Omega, \mathcal{F}, P) \mapsto \mathbb{R}$ diszkrét eloszlású valószínűségi változó és képtere

$$\text{Im } \xi = \{\xi_n | n \in \mathbb{N}\} = \{\xi(\omega) | \omega \in \Omega\}.$$

Ekkor

$$\sigma^2(\xi) = E(\xi^2) - E^2(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n^2 P(\xi = \xi_n) - \left(\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n P(\xi = \xi_n) \right)^2.$$

10.1.1.2. Folytonos eset

Adott ξ folytonos eloszlású valószínűségi változó szórásnégyzete

$$\sigma^2(\xi) = E(\xi^2) - E^2(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_{\xi}(x) dx - \left(\int_{-\infty}^{\infty} x f_{\xi}(x) dx \right)^2.$$

10.2. k oldalú szabályos testtel való dobás szórása

Legyen a dobás eredményét jelző valószínűségi változó ξ . Tudjuk, hogy $\forall P(\xi = n) = \frac{1}{k}$. Ekkor

$$\begin{aligned}\sigma^2(\xi) &= \sum_{n=1}^k n^2 P(\xi = n) - \left(\sum_{n=1}^k n P(\xi = n) \right)^2 = \frac{1}{k} \sum_{n=1}^k n^2 - \frac{1}{k^2} \left(\sum_{n=1}^k n \right)^2 = \\ &= \frac{1}{k} \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} - \frac{1}{k^2} \frac{k^2(k+1)^2}{4} = \frac{2(k+1)(2k+1) - 3(k+1)^2}{12} = \frac{k^2 - 1}{12}\end{aligned}$$

11. Tétel

11.1. Mérhető tér

Adott Ω eseménytér és $\mathcal{F} \subset 2^\Omega$ σ -algebra. Ekkor az $(\Omega, \mathcal{F})$ rendezett párt mérhető térnek nevezzük.

11.2. Mérhető függvény

Adott $(\Omega, \mathcal{F})$ mérhető tér. $f : (\Omega, \mathcal{F}) \mapsto \mathbb{R}$ függvény mérhető, ha $\forall B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ esetén

$$f^{-1}(B) := \{\omega \in \Omega \mid f(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}$$

teljesül.

11.2.1. Példa nem mérhető függvényre

Legyen $\Omega = \{1, 2\}$, $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1, 2\}\}$ és f identitásfüggvény. Ekkor

$$f^{-1}(1) = \{1\} \notin \mathcal{F}.$$

11.3. Mérték

Adott $(\Omega, \mathcal{F})$ mérhető tér. $\mu : \mathcal{F} \mapsto \mathbb{R}$ függvény mérték, ha

1. $\forall A \in \mathcal{F}$ esetén $\mu(A) \geq 0$ teljesül
2. $\mu(\emptyset) = 0$
3. $\forall (A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ páronként diszjunkt halmazrendszerre teljesül a σ -additivitás, azaz

$$\mu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n).$$

11.3.1. Példa mértékekre

1. Nullmérték mindenhez 0-t rendel.
2. Számláló mérték elemszámot rendel.
3. x -re koncentrált Dirac-mérték

$$\mu(A) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in A \\ 0, & \text{ha } x \notin A. \end{cases}$$

11.4. Valószínűségi mérték

Adott $(\Omega, \mathcal{F})$ mérhető tér és $\mu : \mathcal{F} \mapsto \mathbb{R}$ mérték. Ha $\mu(\Omega) = 1$, akkor valószínűségi mértéknek nevezzük, jele P .

11.5. Valószínűségi mező

Adott $(\Omega, \mathcal{F})$ mérhető tér és P valószínűségi mérték. Ekkor az $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ rendezett hármast valószínűségi mezőnek nevezzük.

11.6. Valószínűségi változó

Adott $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ valószínűségi mező. Ekkor a $\xi : (\Omega, \mathcal{F}, P) \mapsto \mathbb{R}$ mérhető függvényt valószínűségi változónak nevezzük.

12. Tétel

12.1. Indikátorfüggvény

Adott $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ valószínűségi mező. Ekkor $A \in \mathcal{F}$ indikátorfüggvénye

$$\chi_A(\omega) = \begin{cases} 0, & \text{ha } \omega \notin A \\ 1, & \text{ha } \omega \in A. \end{cases}$$

12.2. Lépcsős függvény

Adott $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ valószínűségi mező, $(A_k)_{k \leq n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ rendszer és $(\lambda_k)_{k \leq n \in \mathbb{N}}$ rendszer. Ekkor $f : (\Omega, \mathcal{F}, P) \mapsto \mathbb{R}$ lépcsős függvény

$$f(\omega) := \sum_{k=1}^n \lambda_k \chi_{A_k}(\omega).$$

12.3. Lépcsős függvény adott halmaz feletti és mérték szerinti integrálja

Adott $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ valószínűségi mező és $f : (\Omega, \mathcal{F}, P) \mapsto \mathbb{R}$ olyan lépcsős függvény, hogy

$$f(\omega) := \sum_{k=1}^n \lambda_k \chi_{A_k}(\omega)$$

és az A_k halmazok páronként diszjunktak. Ekkor

$$\int_{\Omega} f \, dP := \sum_{k=1}^n \lambda_k P(A_k).$$

12.4. Várható érték

Adott $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ valószínűségi mező és $\xi : (\Omega, \mathcal{F}, P) \mapsto \mathbb{R}$ valószínűségi változó. Ekkor ξ várható értéke

$$E(\xi) = \int_{\Omega} \xi \, dP.$$

12.4.1. Kiszámítása diszkrét esetben

Adott $\xi : (\Omega, \mathcal{F}, P) \mapsto \mathbb{R}$ diszkrét eloszlású valószínűségi változó és képtere

$$\text{Im } \xi = \{\xi_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{\xi(\omega) \mid \omega \in \Omega\}.$$

Ekkor

$$E(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n P(\xi = \xi_n).$$

12.5. Markov egyenlőtlenség

Adott ξ valószínűségi változó és $\varepsilon > 0 \in \mathbb{R}$ skálár. Ekkor

$$P(\xi \geq \varepsilon) \leq \frac{E(\xi)}{\varepsilon}.$$

Bizonyítás

$$E(\xi) = \int_{\Omega} \xi \, dP \geq \int_{\{\xi \geq \varepsilon\}} \xi \, dP \geq \int_{\{\xi \geq \varepsilon\}} \varepsilon \, dP = \varepsilon \int_{\{\xi \geq \varepsilon\}} dP = \varepsilon P(\xi \geq \varepsilon) \implies P(\xi \geq \varepsilon) \leq \frac{E(\xi)}{\varepsilon}$$

13. Tétel

13.1. Külső Lebesgue-mérték

Tetszőleges $A \subset \mathbb{R}$ külső Lebesgue-mértéke

$$\bar{\lambda}(A) := \inf \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \lambda(I_n) \mid A \subset \bigcup_{n=0}^{\infty} I_n \right\}$$

ahol $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ halmazrendszer, $\lambda(I_n)$ pedig az intervallum hossza.

13.2. Mértékek abszolút folytonossága

Adott $(\Omega, \mathcal{F})$ mérhető tér és $\mu_1, \mu_2 : \mathcal{F} \mapsto \mathbb{R}$ mértékek. Azt mondjuk, hogy μ_1 abszolút folytonos μ_2 -re nézve, azaz $\mu_1 \ll \mu_2$, ha $\forall A \in \mathcal{F}$ esetén $\mu_2(A) = 0 \implies \mu_1(A) = 0$.

13.3. Mértékek szingularitása

Adott $(\Omega, \mathcal{F})$ mérhető tér és $\mu_1, \mu_2 : \mathcal{F} \mapsto \mathbb{R}$ mértékek. Azt mondjuk, hogy μ_1 szinguláris μ_2 -re nézve, azaz $\mu_1 \perp \mu_2$, ha $\exists \Omega_1, \Omega_2 \in \mathcal{F}$ olyan halmazok, hogy $\Omega_1 \cup \Omega_2 = \Omega$ és $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ és $\mu_1(\Omega_1) = 0$ és $\mu_2(\Omega_2) = 0$.

13.4. Radon-Nikodym tétel

Adott $(\Omega, \mathcal{F})$ mérhető tér és $\mu, \nu : \mathcal{F} \mapsto \mathbb{R}$ olyan mértékek, hogy $\mu \ll \nu$. Ekkor $\exists f : \Omega \mapsto \mathbb{R}_+$ olyan mérhető függvény, hogy $\forall A \in \mathcal{F}$ esetén

$$\mu(A) = \int_A f \, d\nu = \int_{\Omega} \chi_A f \, d\nu.$$

Ekkor $f = \frac{d\mu}{d\nu}$ a μ mérték ν szerinti Radon-Nikodym deriváltja.

14. Tétel

14.1. Valószínűségi változó által generált σ -algebra

Adott $\xi : (\Omega, \mathcal{F}, P) \mapsto \mathbb{R}$ valószínűségi változó által generált σ -algebra $\mathcal{F}_\xi = \mathcal{F}_{\xi^{-1}(\mathcal{B}_{\mathbb{R}})}$.

14.1.1. Valószínűségi változó által generált σ -algebra

Adott $\xi : (\Omega, \mathcal{F}, P) \mapsto \mathbb{R}$ valószínűségi változó által generált σ -algebra $\mathcal{F}_\xi = \mathcal{F}_{\xi^{-1}(\mathcal{B}_{\mathbb{R}})}$.

14.2. Független valószínűségi változók

Adott $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ valószínűségi mező és $\xi, \mu : (\Omega, \mathcal{F}, P) \mapsto \mathbb{R}$ valószínűségi változók. Ekkor ξ, μ függetlenek, ha $\forall (A_k)_{k \leq n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}_\xi$ és $\forall (B_j)_{j \leq m \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}_\mu$ rendszerek függetlenek, azaz $\forall (A_k, B_j) \in (A_k) \times (B_j)$ független.

14.2.1. Független valószínűségi változók várható értéke

Ha ξ, η független valószínűségi változók, akkor

$$E(\xi\eta) = E(\xi)E(\eta).$$

14.2.2. Független valószínűségi változók szórása

Ha ξ, η független valószínűségi változók, akkor

$$\sigma^2(\xi + \eta) = \sigma^2(\xi) + \sigma^2(\eta).$$

Bizonyítás

$$\begin{aligned} \sigma^2(\xi + \eta) &= E((\xi + \eta)^2) - E^2(\xi + \eta) = E(\xi^2 + 2\xi\eta + \eta^2) - E^2(\xi) - 2E(\xi)E(\eta) - E^2(\eta) = \\ &= E(\xi^2) - E^2(\xi) + E(\eta^2) - E^2(\eta) = \sigma^2(\xi) + \sigma^2(\eta) \end{aligned}$$

14.2.3. Független valószínűségi változók együttes eloszlása

Adottak $(\xi_k)_{k \leq n \in \mathbb{N}}$ független valószínűségi változók együttes eloszlása

$$Q_\xi = \prod_{i=1}^n Q_{\xi_i}.$$

15. Tétel

15.1. Vektor értékű valószínűségi változó

Adott $\xi : (\Omega, \mathcal{F}, P) \mapsto \mathbb{R}^n$ valószínűségi változó

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$$

ahol $\forall \xi_i : (\Omega, \mathcal{F}, P) \mapsto \mathbb{R}$.

15.1.1. Eloszlás

$\xi : (\Omega, \mathcal{F}, P) \mapsto \mathbb{R}^n$ vektor értékű valószínűségi változó eloszlása

$$Q_\xi(A) = P(\xi^{-1}(A)).$$

15.1.2. Eloszlásfüggvény

$\xi : (\Omega, \mathcal{F}, P) \mapsto \mathbb{R}^n$ vektor értékű valószínűségi változó eloszlásfüggvénye $F_\xi : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$

$$F_\xi(x) = P(\omega \in \Omega \mid \forall \xi_i(\omega) < x_i) = P\left(\xi^{-1}\left(\prod_{i=1}^n (-\infty, x_i)\right)\right) = Q_\xi\left(\prod_{i=1}^n (-\infty, x_i)\right).$$

15.1.2.1. Tulajdonságok

Adott $\xi : (\Omega, \mathcal{F}, P) \mapsto \mathbb{R}^n$ vektor értékű valószínűségi változó és $a < b \in \mathbb{R}^n$.

1. F_ξ minden változójában monoton nő
2. F_ξ minden változójában balról folytonos
- 3.

$$\forall \lim_{x_i \rightarrow -\infty} F_\xi(x) = 0$$

- 4.

$$\lim_{\forall x_i \rightarrow \infty} F_\xi(x) = 1$$

- 5.

$$\sum_{\varepsilon \in \{0,1\}^n} (-1)^{|\varepsilon|} F_\xi(a\varepsilon + b(1-\varepsilon)) \geq 0$$

ahol $|\varepsilon|$ az ε 1-es koordinátáinak száma.

15.1.2.2. Peremeloszlás-függvények diszkrét esetben

Adott $\xi = \begin{pmatrix} \eta \\ \gamma \end{pmatrix}$ diszkrét eloszlású vektor értékű valószínűségi változó peremeloszlásai

$$P(\eta = i) = \sum_k P(\eta = i, \gamma = k) \quad P(\gamma = k) = \sum_i P(\eta = i, \gamma = k).$$

15.2. Folytonos vektor értékű valószínűségi változók

Azt mondjuk, hogy $\xi : (\Omega, \mathcal{F}, P) \mapsto \mathbb{R}^n$ vektor értékű valószínűségi változó folytonos eloszlású, ha $Q_\xi \ll \lambda_{\mathbb{R}^n}$.

15.2.1. Összefüggés a peremsűrűség-függvények és az együttes sűrűségfüggvény között független esetben

Adott ξ folytonos eloszlású vektor értékű valószínűségi változó. Ha $\forall \xi_i$ függetlenek, akkor

$$f_{\xi}(x) = \prod_{i=1}^n f_{\xi_i}(x_i).$$

15.2.2. Peremsűrűség-függvények

Adott $\xi = \begin{pmatrix} \eta \\ \gamma \end{pmatrix}$ folytonos eloszlású vektor értékű valószínűségi változó f_{ξ} sűrűségfüggvénnyel. Ekkor

$$f_{\eta}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi}(x, y) dy \quad f_{\gamma}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi}(x, y) dx.$$

15.2.3. Intervallumba esés valószínűsége

Adott $\xi = \begin{pmatrix} \eta \\ \gamma \end{pmatrix}$ folytonos eloszlású vektor értékű valószínűségi változó f_{ξ} sűrűségfüggvénnyel. Ekkor

$$P(\eta \in I, \gamma \in J) = \iint_{I \times J} f_{\xi}(x, y) d(x, y).$$

16. Tétel

16.1. Kovariancia

Adottak ξ, η valószínűségi változók. Ekkor ξ és η kovarianciája

$$\text{cov}(\xi, \eta) = E\left((\xi - E(\xi))(\eta - E(\eta))\right).$$

16.1.1. Kovariancia kiszámítása

Adottak ξ, η valószínűségi változók. Ekkor

$$\text{cov}(\xi, \eta) = E(\xi\eta) - E(\xi)E(\eta).$$

Bizonyítás

$$\begin{aligned} \text{cov}(\xi, \eta) &= E\left((\xi - E(\xi))(\eta - E(\eta))\right) = E(\xi\eta - \xi E(\eta) - \eta E(\xi) + E(\xi)E(\eta)) = \\ &= E(\xi\eta) - 2E(\xi)E(\eta) + E(\xi)E(\eta) = E(\xi\eta) - E(\xi)E(\eta) \end{aligned}$$

16.1.1.1. Diszkrét eset

Adottak $\xi, \eta : (\Omega, \mathcal{F}, P) \mapsto \mathbb{R}$ diszkrét eloszlású valószínűségi változók kovarianciája

$$\text{cov}(\xi, \eta) = \sum_i \sum_j \xi_i \eta_j P(\xi = \xi_i, \eta = \eta_j) - \left(\sum_i \xi_i P(\xi = \xi_i)\right) \left(\sum_j \eta_j P(\eta = \eta_j)\right).$$

16.1.1.2. Folytonos eset

Adottak ξ, η folytonos eloszlású valószínűségi változók kovarianciája

$$\text{cov}(\xi, \eta) = \iint_{\mathbb{R}^2} xy f_{(\xi, \eta)}(x, y) \, d(x, y) - \left(\int_{\mathbb{R}} x f_{\xi}(x) \, dx\right) \left(\int_{\mathbb{R}} y f_{\eta}(y) \, dy\right).$$

16.1.2. Kovariancia független esetben

Ha ξ, η független valószínűségi változók, akkor $\text{cov}(\xi, \eta) = 0$.

Bizonyítás

$$\text{cov}(\xi, \eta) = E(\xi\eta) - E(\xi)E(\eta) = 0.$$

16.1.3. Valószínűségi változó standardizáltja

Adott $\xi : (\Omega, \mathcal{F}, P) \mapsto \mathbb{R}$ valószínűségi változó standardizáltja $\hat{\xi} = \frac{\xi - E(\xi)}{\sigma(\xi)}$.

16.2. Korrelációs együttható

Adott ξ, η valószínűségi változók korrelációja

$$\text{corr}(\xi, \eta) = \frac{\text{cov}(\xi, \eta)}{\sigma(\xi)\sigma(\eta)}.$$

17. Tétel

17.1. Diszkrét eset

Adott ξ diszkrét eloszlású valószínűségi változó és $h : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$. Ekkor az $\eta = h(\xi)$ valószínűségi változóra

$$P(\eta = \eta_i) = \sum_{h(\xi_j) = \eta_i} P(\xi = \xi_j).$$

17.2. Folytonos eset

Adott ξ folytonos eloszlású valószínűségi változó és $h : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ szigorúan monoton, differenciálható függvény. Ekkor az $\eta = h(\xi)$ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

$$f_\eta(x) = f_\xi(h^{-1}(x)) \left| \frac{dh^{-1}(x)}{dx} \right|.$$

Bizonyítás

Tegyük fel először, hogy h szigorúan monoton nő. Ekkor

$$\{\eta < x\} = \{h(\xi) < x\} = \{\xi < h^{-1}(x)\}$$

így

$$F_\eta(x) = P(\eta < x) = P(\xi < h^{-1}(x)) = F_\xi(h^{-1}(x))$$

amiből

$$f_\eta(x) = F'_\eta(x) = F'_\xi(h^{-1}(x)) = f_\xi(h^{-1}(x)) \frac{dh^{-1}(x)}{dx} = f_\xi(h^{-1}(x)) \left| \frac{dh^{-1}(x)}{dx} \right|$$

hiszen h szigorúan monoton nő, így a derivált pozitív.

Most tegyük fel, hogy h szigorúan monoton csökken. Ekkor

$$\{\eta < x\} = \{h(\xi) < x\} = \{\xi > h^{-1}(x)\}$$

így

$$F_\eta(x) = P(\eta < x) = P(\xi > h^{-1}(x)) = 1 - F_\xi(h^{-1}(x))$$

amiből

$$f_\eta(x) = F'_\eta(x) = -F'_\xi(h^{-1}(x)) = -f_\xi(h^{-1}(x)) \frac{dh^{-1}(x)}{dx} = f_\xi(h^{-1}(x)) \left| \frac{dh^{-1}(x)}{dx} \right|$$

hiszen h szigorúan monoton csökken, így a derivált negatív.

17.2.1. Lineáris transzformáció

Adott ξ folytonos eloszlású valószínűségi változó és $\eta = a\xi + b$. Tehát $h(x) = ax + b$, amiből $h^{-1}(x) = \frac{x-b}{a}$, illetve $\left| \frac{dh^{-1}(x)}{dx} \right| = \frac{1}{|a|}$. Tehát

$$f_\eta(x) = \frac{1}{|a|} f_\xi\left(\frac{x-b}{a}\right).$$

18. Tétel

18.1. Diszkrét feltételes eloszlás eloszlásfüggvénye

Adott $\xi = \begin{pmatrix} \eta \\ \gamma \end{pmatrix}$ diszkrét eloszlású vektor értékű valószínűségi változó. Ekkor

$$F^*(x|y_i < \gamma < y_j) = P(\xi < x|y_i < \gamma < y_j) = \frac{F_\xi(x, y_j) - F_\xi(x, y_i)}{F_\gamma(y_j) - F_\gamma(y_i)}.$$

18.2. Folytonos feltételes eloszlás eloszlásfüggvénye

Adott $\xi = \begin{pmatrix} \eta \\ \gamma \end{pmatrix}$ folytonos eloszlású vektor értékű valószínűségi változó. Ekkor

$$F^*(x|z) = P(\eta \in I|\gamma = z) = \begin{cases} \int_I \frac{f_\xi(x, z)}{f_\gamma(z)} dx & f_\gamma(z) \neq 0 \\ 0 & f_\gamma(z) = 0. \end{cases}$$

18.2.1. Sűrűségfüggvény

Adott $\xi = \begin{pmatrix} \eta \\ \gamma \end{pmatrix}$ folytonos eloszlású vektor értékű valószínűségi változó. Ekkor

$$f_{(\eta|\gamma=z)}(x) = \frac{f_\xi(x, z)}{f_\gamma(z)}.$$

18.2.2. Várható érték

Adott $\xi = \begin{pmatrix} \eta \\ \gamma \end{pmatrix}$ folytonos eloszlású vektor értékű valószínűségi változó. Ekkor

$$E(\eta|\gamma = z) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{(\eta|\gamma=z)}(x) dx.$$

18.2.2.1. Regressziós függvény

Adott $\xi = \begin{pmatrix} \eta \\ \gamma \end{pmatrix}$ vektor értékű valószínűségi változó. Az η γ -ra vonatkoztatott regressziós függvény

$$r(z) = E(\eta|\gamma = z).$$

19. Tétel

19.1. 1-valószínűséggel megegyező valószínűségi változók

Adott $\xi, \eta : (\Omega, \mathcal{F}, P) \mapsto \mathbb{R}$ valószínűségi változók 1-valószínűséggel megegyeznek, ha

$$P(\omega \in \Omega \mid \xi(\omega) = \eta(\omega)) = 1.$$

Ekkor azt mondjuk, hogy $\xi = \eta$ P-majdnem mindenütt.

19.2. $\mathcal{L}^p$ tér

Adott $p \in [1, \infty)$

$$\mathcal{L}_{\mathbb{R}}^p(\Omega, \mathcal{F}, P) = \left\{ f : (\Omega, \mathcal{F}, P) \mapsto \mathbb{R} \mid f \text{ mérhető, } \int_{\Omega} |f|^p dP < \infty \right\}.$$

19.3. p -norma

Adott $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$

$$\|f\|_p = \begin{cases} \left(\int_{\Omega} |f|^p dP \right)^{\frac{1}{p}} & p \in [1, \infty) \\ \sup_{\omega \in \Omega \setminus A} |f(\omega)| & p = \infty \end{cases}$$

19.4. Konvergencia-fajták $\mathcal{L}^p$ terekben

Adott $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{L}^p$ függvénysorozat és $f \in \mathcal{L}^p$, illetve $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ valószínűségi mező, $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ valószínűségi változósorozat és ξ valószínűségi változó.

19.4.1. 1-valószínűséggel egyenletes konvergencia

Azt mondjuk, hogy $f_n \rightarrow f$ 1-valószínűséggel egyenletesen, ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{\infty} = 0.$$

Ekkor $f_n \xrightarrow{m.m.e.} f$.

19.4.2. 1-valószínűséggel konvergencia

Azt mondjuk, hogy $f_n \rightarrow f$ 1-valószínűséggel, ha

$$P(\omega \in \Omega \mid f_n(\omega) \rightarrow f(\omega)) = 1.$$

Ekkor $f_n \xrightarrow{m.m.} f$.

19.4.3. $\mathcal{L}^p$ -ben való konvergencia

Azt mondjuk, hogy $f_n \rightarrow f$ $\mathcal{L}^p$ -ben, ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_p = 0.$$

Ekkor $f_n \xrightarrow{\mathcal{L}^p} f$.

19.4.4. Sztochasztikus konvergencia

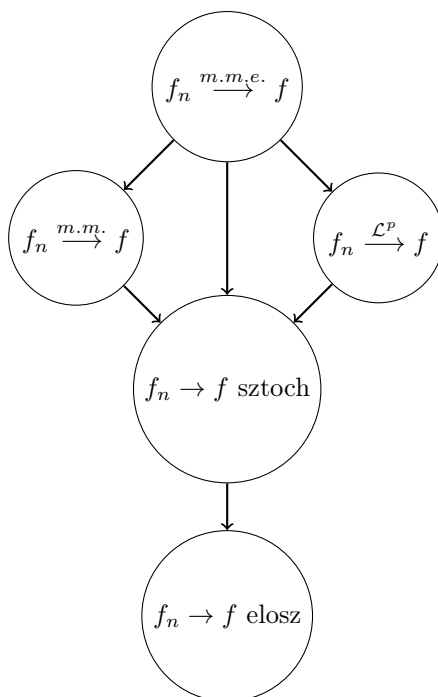
Azt mondjuk, hogy $\xi_n \rightarrow \xi$ sztochasztikusan, ha $\forall \varepsilon > 0$ esetén

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\omega \in \Omega \mid |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| > \varepsilon) = 0.$$

19.4.5. Eloszlásban való konvergencia

Azt mondjuk, hogy $\xi_n \rightarrow \xi$ eloszlásban, ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{\xi_n}(x) = F_{\xi}(x).$$

19.4.6. Konvergencia-fajták közti összefüggés**19.5. Centrális határeloszlás tétele**

Adottak $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók. Ekkor

$$P\left(\frac{\sum_{i=1}^n \xi_i - nE(\xi_1)}{\sqrt{n}\sigma(\xi_1)} < x\right) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

19.6. DeMoivre-Laplace tétele

A (n, p) paraméterű binomiális eloszlás sztochasztikusan konvergál a $(np, \sqrt{np(1-p)})$ paraméterű normális eloszláshoz.

20. Tétel

20.1. Minta

Mintának nevezzük a (ξ_i) mintavételi változók összességét. A nagyság szerint növekvő sorrendbe rendezett elemeket (ξ_i^*) -al jelöljük.

20.1.1. Középérték

A minta középértéke

$$\bar{\xi} = \frac{\sum_{i=1}^n \xi_i}{n}.$$

20.1.2. Empirikus szórás

A minta empirikus szórása

$$\sigma_n = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\xi_i - \bar{\xi})^2}{n}}.$$

20.1.2.1. Korrigált empirikus szórásnégyzet

A minta korrigált empirikus szórásnégyzete

$$s_n^2 = \frac{n}{n-1} \sigma_n^2.$$

20.1.3. Középpont

A minta középpontja

$$\frac{\xi_1^* + \xi_n^*}{2}.$$

20.1.4. Medián

A minta mediánja

$$\begin{cases} \xi_k^* & n = 2k - 1 \\ \frac{\xi_k^* + \xi_{k+1}^*}{2} & n = 2k \end{cases}.$$

20.1.5. Terjedelem

A minta terjedelme

$$\xi_n^* - \xi_1^*.$$

20.1.6. Empirikus eloszlásfüggvény

A minta empirikus eloszlásfüggvénye

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & x \leq \xi_1^* \\ \frac{k}{n} & \xi_k^* < x \leq \xi_{k+1}^* \\ 1 & \xi_n^* < x \end{cases}.$$

20.1.7. Empirikus sűrűségfüggvény

A minta empirikus sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \frac{k(x+h) - k(x)}{nh}$$

ahol $k(x)$ azon mintaelemek száma, melyek értéke kisebb, mint x .

20.2. Becslés

Adott

1. ξ megfigyelt valószínűségi változó
2. θ ξ eloszlása
3. (ξ_i) ξ -ből vett n -elemű minta.

A becslés célja, hogy készítsünk egy

$$\hat{\theta} = f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$$

függvényt, mellyel becsüljük θ -t.

20.2.1. Tulajdonságok

1. A becslés torzítatlan, ha $E(\hat{\theta}) = \theta$.
2. $\hat{\theta}_1$ hatásosabb, mint $\hat{\theta}_2$, ha $\sigma(\hat{\theta}_1) < \sigma(\hat{\theta}_2)$.
3. A $(\hat{\theta}_n)$ sorozat aszimptotikusan torzítatlan, ha $\lim_{n \rightarrow \infty} E(\hat{\theta}_n) = \theta$.
4. A becslés elégséges, ha a változók együttes feltételes eloszlása bármilyen $\hat{\theta} = y$ feltétel esetén nem tartalmazza a becsült θ paramétert.
5. A becslés konzisztens, ha torzítatlan és $\hat{\theta} \xrightarrow{m.m.} \theta$.

20.3. Maximum likelihood estimation

Az MLE során az $L(\theta)$ likelihood függvényt kell maximalizálnunk, ahol n független minta esetén

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i|\theta).$$

Hasonló elv alapján az $l(\theta)$ log likelihood függvény is elég maximalizálnunk, ahol

$$l(\theta) = \ln L(\theta) = \sum_{i=1}^n \ln f(x_i|\theta).$$

20.4. Konfidenciaintervallum

A $\hat{\theta}$ becsléshez tartozó $(\hat{\theta} - z, \hat{\theta} + z)$ konfidenciaintervallumról azt mondjuk, hogy $100(1-\alpha)\%$ -os megbízhatósági szinthez tartozik, ha $1 - \alpha$ valószínűséggel a ténylegesen meghatározott intervallum lefedi a becsült paraméter valódi értékét.

20.4.1. Normális eloszlás ismert szórással

Becsüljük $E(\xi) = m$ -t a középértékkel! Definiáljunk egy új változót

$$\eta = \frac{\bar{\xi} - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

így η standard normális eloszlású. Ekkor kell

$$P(-z < \eta < z) = \Phi(z) - \Phi(-z) = 2\Phi(z) - 1 = 1 - \alpha$$

amiből $\Phi(z) = 1 - \frac{\alpha}{2}$, amiből z meghatározható. Ekkor

$$-z < \frac{\bar{\xi} - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < z$$

$$\bar{\xi} - z \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < m < \bar{\xi} + z \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

tehát a konfidenciaintervallum

$$\left(\bar{\xi} - z \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{\xi} + z \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right).$$

20.4.2. Nem normális eloszlás ismert szórással

Becsüljük $E(\xi) = m$ -t a középértékkel! A centrális határeloszlás tételből

$$P\left(\frac{\sum_{i=1}^n \xi_i - nE(\xi_1)}{\sqrt{n}\sigma(\xi_1)} < z\right) \approx \Phi(z).$$

Tehát

$$P\left(\frac{|\bar{\xi} - m|}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < z\right) \approx 2\Phi(z) - 1 = 1 - \alpha$$

amiből a konfidenciaintervallum

$$\left(\bar{\xi} - z \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{\xi} + z \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right).$$