

Valószínűségszámítás, Matematikai Statisztika Vizsga Jegyzet

Erdélyi Áron

2018.12.30.

Tartalomjegyzék

I	A Tételsor	4
1	Tétel: Eseménytér, σ-algebra, Mérhető függvény, Mérték	5
1.1	Ha adott az Ω eseménytér, hogyan definiáljuk az eseményalgebrát?	5
1.2	Miket nevezünk eseményeknek?	5
1.3	Mik a σ -algebra tulajdonságai?	5
1.4	Mutasson példát azonos eseménytér feletti különböző eseményalgebrákra!	5
1.5	Hogyan definiáljuk a generált σ -algebrát?	5
1.6	Mit nevezünk mérhető függvénynek?	5
1.7	Mit nevezünk mértéknek illetve valószínűségi mértéknek?	6
2	Tétel: Valószínűségi változó, eloszlás, eloszlásfüggvény	7
2.1	Mit nevezünk valószínűségi változónak?	7
2.2	Hogyan definiáljuk egy valószínűségi változó eloszlását?	7
2.3	Hogyan definiáljuk egy valószínűségi változó eloszlásfüggvényét?	7
2.4	Mi az összefüggés az eloszlás és az eloszlásfüggvény között?	7
2.5	Mik az eloszlásfüggvény tulajdonságai?	7
3	Tétel: Függetlenség, feltételes valószínűség, teljes valószínűség tétele, Bayes tétel	8
3.1	Hogyan definiáljuk az A esemény B eseményre vonatkoztatott feltételes valószínűségét?	8
3.2	Mit nevezünk teljes eseményrendszernek?	8
3.3	Mit mond ki a teljes valószínűség tétele?	8
3.4	Mit mond ki a Bayes tétel?	8
4	Tétel: Diszkrét eloszlások	9
4.1	Mikor mondjuk hogy egy valváltozó (n, p) -paraméterű binomiális eloszlású?	9
4.2	Mondjon példát binomiális eloszlású valószínűségi változóra!	9
4.3	Mikor mondjuk hogy egy valváltozó p paraméterű geometriai eloszlású?	9
4.4	Mondjon példát geometriai eloszlású valószínűségi változóra!	9
4.5	Mikor mondjuk hogy egy valváltozó hipergeometrikus eloszlású (N, n, k) paraméterekkel?	9
4.6	Mondjon példát hipergeometrikus eloszlású valváltozóra!	9
4.7	Mikor mondjuk hogy egy valószínűségi változó λ paraméterű Poisson eloszlású?	9
4.8	Mi a kapcsolat a binomiális és a Poisson eloszlás közt?	9
5	Tétel: Várható érték, diszkrét eloszlások várható értéke	11
5.1	Hogyan definiáljuk egy valószínűségi változó várható értékét?	11
5.2	Hogyan számoljuk ki egy diszkrét valváltozó várható értékét, ha ismert az eloszlása?	11
5.3	Mi az (n, p) paraméterű binomiális eloszlás várható értéke?	11
5.4	Mi a λ paraméterű Poisson eloszlás várható értéke?	11
5.5	Mi a p paraméterű geometriai eloszlás várható értéke?	11
5.6	Hogyan szól a Markov-egyenlőtlenség?	12
6	Tétel: Folytonos eloszlású valószínűségi változók, sűrűségfüggvény	13
6.1	Mikor mondjuk hogy egy ξ valváltozó folytonos eloszlású?	13
6.2	Mit nevezünk a folytonos eloszlású ξ valváltozó sűrűségfüggvényének?	13
6.3	Hogyan számoljuk ki egy ξ folytonos valváltozó $[a, b]$ intervallumba esésének valószínűségét sűrűségfüggvény, illetve eloszlásfüggvény segítségével?	13
6.4	Mi a kapcsolat a sűrűségfüggvény és az eloszlásfüggvény közt?	13
6.5	Milyen tulajdonságai vannak az f sűrűségfüggvénynek?	13
7	Tétel: Várható érték folytonos valószínűségi változó esetén, exponenciális eloszlás és várható értéke, normális eloszlás	14
7.1	Hogyan számoljuk ki a ξ folytonos valváltozó várható értékét ha adott a sűrűségfüggvénye?	14
7.2	Mikor mondjuk hogy egy ξ folytonos valváltozó α paraméterű exponenciális eloszlású?	14
7.3	Mutassa meg hogy exponenciális eloszlású valváltozó sűrűségfüggvénye valóban sűrűségfüggvény!	14
7.4	Mi egy α paraméterű exponenciális eloszlású ξ folytonos valváltozó várható értéke?	14
7.5	Mikor mondjuk hogy egy valváltozó normális eloszlású?	14

7.6	Hogyan számoljuk ki (m, σ paraméterű) normális eloszlású valváltozó eloszlásfüggvényének értékét egy adott pontban?	14
8	Tétel: Szórás és kiszámítása I	16
8.1	Hogyan definiáljuk egy ξ valváltozó szórását?	16
8.2	Mik a szórásnégyzet tulajdonságai?	16
8.3	Hogyan számítjuk ki a szórás általános esetben?	16
8.4	Hogyan számítjuk ki egy egyenletes eloszlású valószínűségi változó szórását?	16
8.5	Hogyan számítjuk ki egy Poisson eloszlású valószínűségi változó szórását?	17
9	Tétel: Szórás és kiszámítása II	18
9.1	Mit nevezünk egy valószínűségi változó k -ik momentumának?	18
9.2	Hogyan számítjuk ki az exponenciális eloszlás momentumait?	18
9.3	Hogyan számítjuk ki egy exponenciális eloszlású valószínűségi változó szórását?	18
9.4	Mit tudunk $\sigma^2(\xi + \eta)$ -ről ha ξ és η függetlenek?	18
9.5	Mit mond ki a Csebisev-egyenlőtlenség?	18
10	Tétel: Kovariancia és korreláció	19
10.1	Hogyan definiáljuk illetve hogyan számítjuk ki ξ és η valváltozók kovarianciáját?	19
10.2	Hogyan definiáljuk ξ valváltozó standardizáltját?	19
10.3	Hogyan definiáljuk ξ és η valváltozók korrelációs együtthatóját?	19
10.4	Mi a kovariancia és a függetlenség kapcsolata?	19
10.5	Hogyan számítjuk ki a kovarianciát diszkrét és folytonos esetben ha adott az eloszlás illetve az együttes sűrűségfüggvény?	20
II	B Tételsor	21
1	Tétel: Integrál és kiszámítása	22
1.1	Mit nevezünk a A halmaz karakterisztikus (indikátor) függvényének?	22
1.2	Mi a lépcsős függvény definíciója?	22
1.3	Mi az f lépcsős függvény integrálja a P mérték szerint Ω -n, ha f diszjunkt halmazok karakterisztikus függvényeinek lineáris kombinációja?	22
1.4	Hogyan definiáljuk egy általános $f : \Omega \rightarrow R$ függvény P mérték szerinti integrálját Ω felett?	22
2	Tétel: Lebesgue mérték, mértékek abszolút folytonossága és szingularitása	24
2.1	Mikor mondjuk hogy egy μ_1 mérték abszolút folytonos egy μ_2 mértékre nézve?	24
2.2	Mikor mondjuk hogy egy μ_1 mérték szinguláris egy μ_2 mértékre nézve?	24
2.3	Hogyan definiáljuk a Lebesgue-külső mértéket és a Lebesgue mértéket?	24
2.4	Mit tud mondani a Riemann (improprius) és Lebesgue integrálhatóság viszonyáról?	24
3	Tétel: Vektorértékű valószínűségi változók, diszkrét és folytonos esetben	26
3.1	Hogyan definiáljuk egy (ξ, η) 2 dimenziós valváltozó eloszlásfüggvényét?	26
3.2	Mik a többdimenziós valváltozók eloszlásfüggvényének tulajdonságai?	26
3.3	Mit nevezünk együttes és peremeloszlásnak diszkrét 2 dimenziós valváltozók esetén?	27
3.4	Hogyan számoljuk tartományba (téglalapba) esés valószínűségét 2 dim valváltozó esetén ha adott az együttes eloszlásfüggvény?	27
3.5	Ha (ξ, η) egy folytonos eloszlású 2 dim valváltozó, mik a peremsűrűségfüggvények és hogyan származtathatóak az együttes sűrűségfüggvényből?	28
3.6	Mi az összefüggés a peremsűrűségfüggvények és az együttes sűrűségfüggvény között ha ξ és η függetlenek?	28
3.7	Hogyan számoljuk tartományba (pl. téglalapba) esés valószínűségét 2 dim valváltozó esetén ha adott az együttes sűrűségfüggvény?	28
4	Tétel: Valószínűségi változók transzformáltjai	29
4.1	Ha adott egy ξ diszkrét valváltozó melynek lehetséges értékei $x_1, x_2, \dots$, ismerjük az eloszlását, és egy h függvény, hogyan számítjuk ki az $\eta = h(\xi)$ valváltozó eloszlását?	29
4.2	Ha ξ egy folytonos eloszlású valváltozó melynek a sűrűségfüggvénye $f(x)$, valamint $h(x)$ szigorúan monoton és differenciálható, hogyan számítjuk ki az $\eta = h(\xi)$ valváltozó sűrűségfüggvényét?	29
4.3	Mi lesz a transzformált valváltozó sűrűségfüggvénye ha a transzformáció lineáris?	29

5	Tétel: Feltételes eloszlás- és sűrűségfüggvény, feltételes várható érték	31
5.1	Hogyan definiáljuk a ξ valószínűségi vektorváltozó $y_i < \eta < y_j$ feltétel melletti eloszlásfüggvényét ha (ξ, η) diszkrét valószínűségi vektorváltozó?	31
5.2	Hogyan tudjuk meghatározni az értékét az együttes illetve a peremeloszlások segítségével?	31
5.3	Polytonos esetben hogyan definiáljuk $F^*(x z)$ -t?	31
5.4	Polytonos esetben hogyan definiáljuk ξ -nek az $\eta = z$ feltétel melletti feltételes sűrűségfüggvényét?	31
6	Tétel: L^p terek, konvergenciatípusok L^p terekben	32
6.1	Hogyan definiáljuk az $L^p_{\mathbb{R}}$ függvényteret?	32
6.2	Hogyan definiáljuk egy f függvény p -normáját?	32
6.3	Mi az L^p tér, milyen konvergenciatípusokat ismer L^p terekben, és milyen összefüggések állnak fent ezek közt?	32
7	Tétel: Centrális határeloszlás tétel, Nagy számok gyenge törvénye, Nagy számok erős törvénye	35
7.1	Mit mond ki a centrális határeloszlás tétel?	35
7.2	Mit mond ki a DeMoivre-Laplace tétel?	35
7.3	Mit mond ki a nagy számok gyenge törvénye?	35
8	Tétel: Statisztikai alapfogalmak, maximum likelihood elv	36
8.1	Hogyan definiáljuk az empirikus eloszlásfüggvényt?	36
8.2	Mit mond ki a Gilvenkó tétel?	36
8.3	Mi a becslésmélet alapproblémája?	36
8.4	Milyen tulajdonságokkal jellemezhető egy becslés?	36
8.5	A mintaátlag és az empirikus szórásnégyzet tulajdonságai	36
8.6	Mi a maximum likelihood elv?	37
8.7	Mi a konfidenciaintervallum, és hogyan számítható ki különféle esetekben?	37

Part I

A Tételsor

1 Tétel: Eseménytér, σ -algebra, Mérhető függvény, Mérték

1.1 Ha adott az Ω eseménytér, hogyan definiáljuk az eseményalgebrát?

Definíció: Legyen $\mathfrak{F}$ az Ω olyan részhalmaza, mely rendelkezik a köv. tulajdonságokkal:

1. $\mathfrak{F}$ zárt a megszámlálható (véges, vagy végtelen) unióra.
2. $\mathfrak{F}$ zárt a különbségképzésre.
3. $\Omega \in \mathfrak{F}$.

Ekkor ezt a részhalmaz rendszert σ -algebrának hívjuk.

1.2 Miket nevezünk eseményeknek?

Definíció: $\mathfrak{F}$ elemeit eseményeknek hívjuk.

Definíció: Ha Ω véges, az egyelemű részhalmazait elemi eseményeknek nevezzük.

1.3 Mik a σ -algebra tulajdonságai?

Állítás: Az $\mathfrak{F}$ σ -algebra tulajdonságai:

1. $\mathfrak{F}$ zárt a megszámlálható (véges, vagy végtelen) unióra.
2. $\mathfrak{F}$ zárt a különbségképzésre.
3. $\Omega \in \mathfrak{F}$.

1.4 Mutasson példát azonos eseménytér feletti különböző eseményalgebrákra!

Példa: Különböző σ -algebrák ugyanazon eseménytér felett:

1.

$$\mathfrak{F}_1 = \{\emptyset, \Omega\} = \{\emptyset, \{a, b, c, d\}\}$$

2.

$$\mathfrak{F}_2 = \{\emptyset, \Omega, \{a, b\}, \{c, d\}\}$$

3.

$$\mathfrak{F}_3 = 2^\Omega$$

1.5 Hogyan definiáljuk a generált σ -algebrát?

Definíció: A $\mathcal{H}$ által generált σ -algebra a legszűkebb Ω -beli σ -algebra ($\mathfrak{F}$), amire $\mathcal{H} \subseteq \mathfrak{F}$. Jele: $\mathfrak{F}_{\mathcal{H}}$.

1.6 Mit nevezünk mérhető függvénynek?

Definíció: Legyen $\Omega \neq \emptyset$, $\mathfrak{F} \subseteq 2^\Omega$. Ekkor az $(\Omega, \mathfrak{F})$ rendezett pár neve mérhető tér.

Definíció: $(\Omega, \mathfrak{F})$ mérhető tér, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ fv mérhető ha $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ esetén

$$f^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega \mid f(\omega) \in B\} \in \mathfrak{F},$$

avagy 'minden Borel halmaz ősképe $\mathfrak{F}$ -beli'.

1.7 Mit nevezünk mértéknek illetve valószínűségi mértéknek?

Definíció: Legyen $(\Omega, \mathfrak{F})$ mérhető tér. Egy $\mu : \mathfrak{F} \rightarrow \mathbb{R}$ fv mérték, ha

1. $\mu(A) \geq 0 \forall A \in \mathfrak{F}$.
2. $\mu(\emptyset) = 0$.
3. Teljesül az ún. σ -additivitás, azaz

$$\mu \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n),$$

$\forall (A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ $\mathfrak{F}$ -beli sorozatra, melyre $A_n \cap A_m = \emptyset, n \neq m$.

2 Tétel: Valószínűségi változó, eloszlás, eloszlásfüggvény

2.1 Mit nevezünk valószínűségi változónak?

Definíció: Ha μ egy mérték, és $\mu(\Omega) = 1$, akkor μ valószínűség, vagy valószínűségi mérték. Jelölése: P .

Definíció: Az $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ hármas valószínűségi mező, ha

1. $(\Omega, \mathfrak{F})$ mérhető tér,
2. $P : \mathfrak{F} \rightarrow \mathbb{R}_+$ valósz.

Definíció: Legyen $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ val. mező. Egy $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mérhető fv. neve valószínűségi változó.

2.2 Hogyan definiáljuk egy valószínűségi változó eloszlását?

Definíció: Legyen $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ val. mező, $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ val. vált., $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ξ eloszlása:

$$Q_\xi(A) = P(\xi^{-1}(A)).$$

2.3 Hogyan definiáljuk egy valószínűségi változó eloszlásfüggvényét?

Legyen $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ val. mező, $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ val. vált. A ξ eloszlás fv-e:

$$F_\xi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, F_\xi(x) = P(\xi < x) = P(\{\omega \in \Omega \mid \xi(\omega) < x\}) = P(\xi^{-1}(]-\infty, x[)).$$

2.4 Mi az összefüggés az eloszlás és az eloszlásfüggvény között?

Spec. eset: ha a halmaz, ami az eloszlás argumentuma egy félegyenes $(\xi < x)$:

$$F_\xi(x) = P(\xi < x) = P(\xi^{-1}(]-\infty, x[)) = Q_\xi(]-\infty, x[).$$

2.5 Mik az eloszlásfüggvény tulajdonságai?

Tétel: Az eloszlásfv. tulajdonságai:

1. Monoton nő.
2. $\lim_{x \rightarrow \infty} F_\xi(x) = 1$.
3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_\xi(x) = 0$.
4. F_ξ balról folytonos.

3 Tétel: Függetlenség, feltételes valószínűség, teljes valószínűség tétele, Bayes tétel

3.1 Hogyan definiáljuk az A esemény B eseményre vonatkoztatott feltételes valószínűségét?

Definíció: $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ val. mező, $A, B \in \mathfrak{F}$ függetlenek, ha $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Definíció: Legyen $B \in \mathfrak{F}$. Egy $A \in \mathfrak{F}$ feltételes valószínűsége B szerint (tíh $P(B) \neq 0$):

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P_B(A).$$

3.2 Mit nevezünk teljes eseményrendszernek?

Definíció: $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ teljes eseményrendszer, ha $A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$ és

$$\bigcup_{j=1}^n A_j = \Omega.$$

3.3 Mit mond ki a teljes valószínűség tétele?

Tétel: $B_1, \dots, B_n$ teljes eseményrendszer, és $\forall i$ -re $P(B_i) > 0$. $A \in \mathfrak{F}$ tetszőleges. Ekkor:

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A|B_i)P(B_i).$$

Bizonyítás:

$$A = A \cap \Omega = A \cap (B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n) = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \dots \cup (A \cap B_n) \Rightarrow P(A) = \sum_{i=1}^n P(A \cap B_i).$$

és mivel

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$$

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A|B_i)P(B_i).$$

3.4 Mit mond ki a Bayes tétel?

Tétel: $B_1, \dots, B_n$ teljes eseményrendszer, és $\text{for all } i$ -re $P(B_i) > 0$. $A \in \mathfrak{F}$ tetszőleges. $P(A) \neq 0$. Ekkor:

$$P(B_k|A) = \frac{P(A|B_k)P(B_k)}{\sum_{i=1}^n P(A|B_i)P(B_i)} = \frac{P(A|B_k)P(B_k)}{P(A)}.$$

Bizonyítás:

$$P(B_k|A) = \frac{P(B_k \cap A)}{P(A)}, \quad P(A|B_k) = \frac{P(A \cap B_k)}{P(B_k)}$$

$$P(B_k|A)P(A) = P(B_k \cap A) = P(A|B_k)P(B_k)$$

$$\Rightarrow P(B_k|A) = \frac{P(B_k \cap A)}{P(A)}.$$

4 Tétel: Diszkrét eloszlások

4.1 Mikor mondjuk hogy egy valváltozó (n, p) -paraméterű binomiális eloszlású?

Definíció: Azt mondjuk, hogy $\xi : (\Omega, \mathcal{F}, P) \rightarrow \mathbb{R}$ val. vált. (n, p) paraméterű binomiális eloszlású ($p \in]0, 1[$), ha

$$P(\xi = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad 0 \leq k \leq n.$$

4.2 Mondjon példát binomiális eloszlású valószínűségi változóra!

Példa: Húzzunk például egy pakli magyar kártyából egy lapot, nézzük meg, hogy makk-e a húzott lap színe, majd tegyük vissza, keverjük meg a paklit, és húzzunk újra. Ha a húzást mondjuk ötször ismétljük ezzel az eljárással, akkor a binomiális eloszlás adja meg annak a valószínűségét, hogy $k = 0, 1, 2, 3, 4$ vagy 5 esetben húztunk makkot.

4.3 Mikor mondjuk hogy egy valváltozó p paraméterű geometriai eloszlású?

Definíció: Azt mondjuk, hogy $\xi : (\Omega, \mathcal{F}, P) \rightarrow \mathbb{R}$ val. vált. p paraméterű geometriai eloszlású ($p \in]0, 1[$), ha

$$P(\xi = k) = p(1-p)^{k-1}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

4.4 Mondjon példát geometriai eloszlású valószínűségi változóra!

Példa: Dobókockával addig dobunk, míg hatos nem lesz. Mi várható, hányadikra sikerül?

4.5 Mikor mondjuk hogy egy valváltozó hipergeometrikus eloszlású (N, n, k) paraméterekkel?

Definíció: Azt mondjuk, hogy $\xi : (\Omega, \mathcal{F}, P) \rightarrow \mathbb{R}$ val. vált. (N, n, K) paraméterű hipergeometrikus eloszlású ($n \leq N, N, n, K \in \mathbb{N}$), ha

$$P(\xi = k) = \frac{\binom{K}{k} \binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

4.6 Mondjon példát hipergeometrikus eloszlású valváltozóra!

Példa: Egy cég egyszer használatos fecskendőket készít, naponta 2500 darabot. Közülük átlagosan 180 darab szokott selejtes lenni normál gyártási folyamat során. Egy 100 elemű mintát megvizsgálva mikor célszerű a gyártósorhoz szerelőt hívni?

4.7 Mikor mondjuk hogy egy valószínűségi változó λ paraméterű Poisson eloszlású?

Azt mondjuk, hogy $\xi : (\Omega, \mathcal{F}, P) \rightarrow \mathbb{R}$ val. vált. λ paraméterű Poisson eloszlású ($\lambda > 0$), ha

$$P(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

4.8 Mi a kapcsolat a binomiális és a Poisson eloszlás közt?

A Poisson eloszlás jól közelíti a binomiális eloszlást, ha n nagy és p kicsi, sőt a Poisson eloszlás a binomiális határértéke, ha $np = \lambda$ állandó és $n \rightarrow \infty$. Ekkor $p = \frac{\lambda}{n}$.

$$\begin{aligned} P(\xi = k) &= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \\ &= \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \frac{\lambda^k}{n^k} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \frac{\lambda^k}{k!} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \end{aligned}$$

Rögzített k esetén az első tényező 1-hez tart, ha $n \rightarrow \infty$, hiszen

$$\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k} = \frac{n}{n} \frac{n-1}{n} \dots \frac{n-k+1}{n} = 1 \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)$$

mind a k darab tényezője 1-hez tart. Az $\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k}$ hatványnak is 1 a határértéke, mert az alapja 1-hez tart, kitevője pedig konstans. Az utolsó tényező pedig

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x, x \in \mathbb{R} \Rightarrow \left(1 + \frac{-\lambda}{n}\right)^n \rightarrow e^{-\lambda}, n \rightarrow \infty.$$

Tehát

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\xi = k) = 1 \cdot 1 \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda},$$

ami valóban a Poisson eloszlás k indexű valószínűsége.

5 Tétel: Várható érték, diszkrét eloszlások várható értéke

5.1 Hogyan definiáljuk egy valószínűségi változó várható értékét?

Definíció: $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ val. mező, $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ val. vált.

A ξ val. vált. várható értéke (ha $\exists$):

$$E(\xi) = \int_{\Omega} \xi dP.$$

5.2 Hogyan számoljuk ki egy diszkrét valváltozó várható értékét, ha ismert az eloszlása?

Állítás: Legyen $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ diszkrét val. vált. Tfh. ξ integrálható ($\exists E(\xi)$). Ekkor

$$E(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n P(\xi = \xi_n),$$

ahol $\xi_n : \xi$ lehetséges értékei.

5.3 Mi az (n, p) paraméterű binomiális eloszlás várható értéke?

Állítás: Az (n, p) paraméterű binomiális eloszlás várható értéke $n \cdot p$.

Bizonyítás: Legyen ξ egy (n, p) paraméterű binomiális eloszlású val. vált. Tekintsünk rá úgy, mintha n darab (cinkelt) érmét dobánk fel. Az egyes érmék vagy fejek, vagy nem (a fej dobás valószínűsége p), és val. vált-nak tekinthetők $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$. Ha fej, akkor $\xi_j = 1$, egyébként 0. Ekkor az eredeti val. vált. értéke tekinthető egy származtatott értéknek:

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n.$$

Ekkor

$$E(\xi_j) = p \rightarrow E(\xi) = np.$$

5.4 Mi a λ paraméterű Poisson eloszlás várható értéke?

Állítás: A λ paraméterű Poisson eloszlás várható értéke λ .

Bizonyítás:

$$\begin{aligned} E(\xi) &= \sum_{j=0}^{\infty} \xi_j P(\xi = \xi_j) = \sum_{j=0}^{\infty} j \frac{\lambda^j}{j!} e^{-\lambda} = \sum_{j=1}^{\infty} j \frac{\lambda^j}{j!} e^{-\lambda} = \\ &= e^{-\lambda} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda^j}{(j-1)!} = e^{-\lambda} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^{j+1}}{j!} = e^{-\lambda} \lambda e^{\lambda} = \lambda. \end{aligned}$$

5.5 Mi a p paraméterű geometriai eloszlás várható értéke?

Állítás: A p paraméterű geometriai eloszlás várható értéke $\frac{1}{p}$.

Bizonyítás:

$$E(\xi) = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j P(\xi = \xi_j) = \sum_{j=1}^{\infty} j p (1-p)^{j-1} = p \sum_{j=1}^{\infty} j (1-p)^{j-1}$$

Tudjuk, hogy $\frac{1}{1-x}$ hatványsora a $] -1, 1[$ intervallumon

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{j=0}^{\infty} x^j.$$

Ebből

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1-x} \right) = \frac{d}{dx} \sum_{j=0}^{\infty} x^j$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{j=0}^{\infty} jx^{j-1} = \sum_{j=1}^{\infty} jx^{j-1}.$$

Legyen $x = (1-p)$. Ekkor a hatványsor konvergenciasugarán belül maradunk, így használhatjuk a fenti összefüggéseket. Ekkor

$$E(\xi) = p \frac{1}{(1-(1-p))^2} = \frac{1}{p}.$$

5.6 Hogyan szól a Markov-egyenlőtlenség?

Tétel: $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ val. mező, $\xi \geq 0 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ val. vált., $\varepsilon > 0$. Ekkor

$$P(\xi \geq \varepsilon) \leq \frac{E(\xi)}{\varepsilon}.$$

Bizonyítás:

$$E(\xi) = \int_{\Omega} \xi dP \geq \int_{\{\xi \geq \varepsilon\}} \xi dP \geq \int_{\{\xi \geq \varepsilon\}} \varepsilon dP = \varepsilon \int_{\{\xi \geq \varepsilon\}} 1 dP = \varepsilon P(\xi \geq \varepsilon).$$

6 Tétel: Folytonos eloszlású valószínűségi változók, sűrűségfüggvény

6.1 Mikor mondjuk hogy egy ξ valváltozó folytonos eloszlású?

Definíció: A $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ val. vált. folytonos eloszlású, ha $Q_\xi \ll \lambda_{\mathbb{R}}$, ahol $Q_\xi, \lambda_{\mathbb{R}} : \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}_+$.

6.2 Mit nevezünk a folytonos eloszlású ξ valváltozó sűrűségfüggvényének?

Állítás: Ha egy ξ folytonos eloszlású, akkor a Radon-Nikodym tétel miatt $\exists! f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mérhető, hogy

$$\forall A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} : Q_\xi(A) = \int_A f d\lambda_{\mathbb{R}}.$$

Definíció: A fenti állításban szereplő f a ξ val. vált. sűrűségfüggvénye.

6.3 Hogyan számoljuk ki egy ξ folytonos valváltozó $[a, b]$ intervallumba esésének valószínűségét sűrűségfüggvény, illetve eloszlásfüggvény segítségével?

Állítás:

$$P(a \leq \xi \leq b) = P(\xi \leq b) - P(\xi \leq a) = F_\xi(b) - F_\xi(a).$$

Állítás:

$$P(a \leq \xi \leq b) = P(\xi \leq b) - P(\xi \leq a) = \int_{-\infty}^b f dx - \int_{-\infty}^a f dx.$$

6.4 Mi a kapcsolat a sűrűségfüggvény és az eloszlásfüggvény közt?

Állítás:

$$P(\xi \leq a) = F_\xi(a) = \int_{-\infty}^a f dx.$$

6.5 Milyen tulajdonságai vannak az f sűrűségfüggvénynek?

Állítás: A sűrűségfv. tulajdonságai:

1. $f \geq 0$.
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f dx = \int_{\mathbb{R}} f d\lambda = Q_\xi(\mathbb{R}) = P(\xi^{-1}(\mathbb{R})) = 1$.

7 Tétel: Várható érték folytonos valószínűségi változó esetén, exponenciális eloszlás és várható értéke, normális eloszlás

7.1 Hogyan számoljuk ki a ξ folytonos valváltozó várható értékét ha adott a sűrűségfüggvénye?

Tétel:

$$E(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{\xi}(x) dx.$$

7.2 Mikor mondjuk hogy egy ξ folytonos valváltozó α paraméterű exponenciális eloszlású?

Definíció: $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ val. mező, $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ val. vált.

ξ α paraméterű ($\alpha > 0$) exponenciális eloszlású, ha

1. ξ folytonos eloszlású

2. ξ sűrűségfv-e:

$$\begin{cases} \alpha e^{-\alpha x} & \text{ha } x > 0 \\ 0 & \text{ha } x \leq 0 \end{cases}$$

7.3 Mutassa meg hogy exponenciális eloszlású valváltozó sűrűségfüggvénye valóban sűrűségfüggvény!

Bizonyítás:

1. Mivel a hatvány bázisa > 0 , ezért a fv. értéke mindenhol > 0 .

2.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \alpha e^{-\alpha x} dx = \alpha \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} dx = \alpha \left. \frac{e^{-\alpha x}}{-\alpha} \right|_0^{\infty} = -e^{-\alpha x} \Big|_0^{\infty} = 0 - (-1) = 1.$$

7.4 Mi egy α paraméterű exponenciális eloszlású ξ folytonos valváltozó várható értéke?

Állítás: α - paraméterű exponenciális eloszlás várható értéke $\frac{1}{\alpha}$

Bizonyítás:

$$E(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_0^{\infty} x \alpha e^{-\alpha x} dx = x(-e^{-\alpha x}) \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} dx = 0 - 0 + \frac{1}{-\alpha} e^{-\alpha x} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{\alpha}.$$

7.5 Mikor mondjuk hogy egy valváltozó normális eloszlású?

Definíció: Legyen $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ val. mező, $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ val. vált. (m, σ) paraméterű normális eloszlású, ha ξ folytonos eloszlású, és sűrűségfv-e:

$$f_{\xi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}.$$

7.6 Hogyan számoljuk ki (m, σ) paraméterű normális eloszlású valváltozó eloszlásfüggvényének értékét egy adott pontban?

Definíció: Legyen $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ val. mező, $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ val. vált. $(m = 0, \sigma = 1)$ paraméterű standard normális eloszlású, ha ξ folytonos eloszlású, és sűrűségfv-e:

$$f_{\xi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Ekkor eloszlásfv-ét Φ -vel jelöljük:

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Állítás: Minden normális eloszlású val. vált. eloszlásfv-e (F_ξ) visszavezethető standard normális eloszlásra, mert ha $\xi(m, \sigma)$ paraméterű normális eloszlású, akkor

$$F_\xi = \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right), \quad x \in \mathbb{R}$$

Bizonyítás:

$$F_\xi = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} dt.$$

Legyen

$$z = \frac{t-m}{\sigma} \Rightarrow t = m + \sigma z$$

$$t \rightarrow -\infty \Leftrightarrow z \rightarrow -\infty \quad t = x \Leftrightarrow z = \frac{x-m}{\sigma}$$

Ekkor a helyettesítéses integrál képletének segítségével:

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(t) dt = \int_a^b f(g(z)) g'(z) dz,$$

ahol $g(z) = m + \sigma z$, így $g'(z) = \sigma$:

$$F_\xi = \int_{-\infty}^{\frac{x-m}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{z^2}{2}} \sigma dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-m}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right).$$

8 Tétel: Szórás és kiszámítása I

8.1 Hogyan definiáljuk egy ξ valószínűségi szórását?

Definíció: $\xi : (\Omega, \mathcal{F}, P) \rightarrow \mathbb{R}$ val. vált. Tfh. $E(\xi)$ véges. Ekkor ξ szórását $\sigma(\xi)$ -vel, vagy $D(\xi)$ -vel jelöljük, és a következőképp definiáljuk:

$$\sigma(\xi) = \sqrt{E((\xi - E(\xi))^2)}.$$

Ennek megfelelően $\sigma^2(\xi)$ elnevezése szórásnégyzet.

8.2 Mik a szórásnégyzet tulajdonságai?

Állítás: A szórásnégyzet tulajdonságai:

1. $\sigma^2(\xi) \geq 0$.
2. $\sigma^2(a\xi + b) = a^2\sigma^2(\xi)$.

Bizonyítás:

1. Triviális.
- 2.

$$\begin{aligned}\sigma^2(a\xi + b) &= E(((a\xi + b) - E(a\xi + b))^2) = E((a\xi + b - aE(\xi) - E(b))^2) = E((a\xi + b - aE(\xi) - b)^2) = \\ &= E((a(\xi - E(\xi)))^2) = E(a^2(\xi - E(\xi))^2) = a^2E((\xi - E(\xi))^2) = a^2\sigma^2(\xi).\end{aligned}$$

8.3 Hogyan számítjuk ki a szórást általános esetben?

Állítás:

$$\sigma^2(\xi) = E(\xi^2) - E^2(\xi)$$

Bizonyítás:

$$\begin{aligned}\sigma^2(\xi) &= E((\xi - E(\xi))(\xi - E(\xi))) = E(\xi^2 - 2E(\xi)\xi + E^2(\xi)) = \\ &= E(\xi^2) - E(2E(\xi)\xi) + E(E^2(\xi)) = E(\xi^2) - 2E(\xi)E(\xi) + E^2(\xi) = E(\xi^2) - E^2(\xi).\end{aligned}$$

8.4 Hogyan számítjuk ki egy egyenletes eloszlású valószínűségi változó szórását?

Példa: Legyen ξ egyenletes eloszlású $[a, b]$ -n. Ekkor

$$f_\xi = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{ha } x \in [a, b] \\ 0 & \text{egy.} \end{cases}$$

Ekkor

$$\begin{aligned}E(\xi) &= \int_a^b x \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \frac{x^2}{2} \Big|_a^b = \frac{1}{b-a} \left(\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} \right) = \frac{(b+a)(b-a)}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}. \\ E(\xi^2) &= \int_a^b \frac{x^2}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \frac{x^3}{3} \Big|_a^b = \frac{(b^3 - a^3)}{3(b-a)} \\ \sigma^2(\xi) &= E(\xi^2) - E^2(\xi) = \frac{(b^3 - a^3)}{3(b-a)} - \left(\frac{b+a}{2} \right)^2 = \frac{(b-a)(a^2 + ab + b^2)}{3(b-a)} - \frac{b^2 + 2ab + a^2}{4} = \\ &= \frac{4a^2 + 4ab + 4b^2 - 3b^2 - 6ab - 3a^2}{12} = \frac{b^2 - 2ab + a^2}{12} = \frac{(b-a)^2}{12}.\end{aligned}$$

8.5 Hogyan számítjuk ki egy Poisson eloszlású valószínűségi változó szórását?

Példa: Ha ξ Poisson eloszlású val. vált., akkor

$$\begin{aligned} E(\xi^2) &= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{(k-1)!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} ((k-1) + 1) \frac{\lambda^k}{(k-1)!} = \\ &= \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda^2 e^{-\lambda} + \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda^2 + \lambda. \end{aligned}$$

Így

$$\sigma^2(\xi) = E(\xi^2) - E^2(\xi) = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.$$

9 Tétel: Szórás és kiszámítása II

9.1 Mit nevezünk egy valószínűségi változó k -ik momentumának?

Definíció: Legyen $k > 0$. A ξ val. vált. k -ik (0 középpontú) momentumának az $E(\xi^k)$ mennyiséget nevezzük - ha létezik.

9.2 Hogyan számítjuk ki az exponenciális eloszlás momentumait?

Példa: Legyen a ξ val. vált α paraméterű, exponenciális eloszlású. Ekkor a (0 középpontú) k -ik momentumai:

$$E(\xi^k) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f_{\xi}(x) dx = \int_0^{\infty} \alpha e^{-\alpha x} dx.$$

Parciális integrálással:

$$E(\xi^k) = -x^k e^{-\alpha x} \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -k x^{k-1} e^{-\alpha x} dx = \frac{k}{\alpha} \int_0^{\infty} x^{k-1} \alpha e^{-\alpha x} dx = \frac{k}{\alpha} E(\xi^{k-1}).$$

Tehát rekurzív képletet kapunk.

$$E(\xi^0) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi}(x) dx = 1, \quad \Rightarrow \quad E(\xi^1) = \frac{1}{\alpha} \quad \Rightarrow \quad E(\xi^2) = \frac{2}{\alpha^2} \dots$$

Általánosan:

$$E(\xi^k) = \frac{k!}{\alpha^k}.$$

9.3 Hogyan számítjuk ki egy exponenciális eloszlású valószínűségi változó szórását?

Példa: Legyen a ξ val. vált α paraméterű, exponenciális eloszlású. Ekkor a szórásnégyzete:

$$\sigma^2(\xi) = E(\xi^2) - E^2(\xi) = \frac{2}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha^2} = \frac{1}{\alpha^2}.$$

9.4 Mit tudunk $\sigma^2(\xi + \eta)$ -ről ha ξ és η függetlenek?

Állítás: Ha ξ és η független val. vált-ok, $E(\xi\eta) = E(\xi)E(\eta)$, ha a várható értékek léteznek.

Állítás: Ha ξ és η független val. vált-ok, $\sigma^2(\xi + \eta) = \sigma^2(\xi) + \sigma^2(\eta)$.

Bizonyítás:

$$\begin{aligned} \sigma^2(\xi) &= E(\xi^2) - E^2(\xi), \quad \sigma^2(\eta) = E(\eta^2) - E^2(\eta) \\ \sigma^2(\xi + \eta) &= E((\xi + \eta)^2) - E^2(\xi + \eta) = E(\xi^2 + 2\xi\eta + \eta^2) - E(\xi + \eta)E(\xi + \eta) = \\ &= E(\xi^2) + 2E(\xi)E(\eta) + E(\eta^2) - (E^2(\xi) + 2E(\xi)E(\eta) + E^2(\eta)) = \\ &= E(\xi^2) + E(\eta^2) - E^2(\xi) - E^2(\eta) = \sigma^2(\xi) + \sigma^2(\eta). \end{aligned}$$

9.5 Mit mond ki a Csebisev-egyenlőtlenség?

Állítás: Legyen ξ val. vált., $\varepsilon > 0$. Tfh $E(\xi)$ véges. Ekkor:

$$P(|\xi - E(\xi)| \geq \varepsilon) \leq \frac{E(|\xi - E(\xi)|^2)}{\varepsilon^2} = \frac{\sigma^2(\xi)}{\varepsilon^2}.$$

Bizonyítás:

$$\{|\xi - E(\xi)| \geq \varepsilon\} = \{|\xi - E(\xi)|^2 \geq \varepsilon^2\}$$

erre pedig használjuk a Markov-egyenlőtlenséget:

$$P(|\xi - E(\xi)|^2 \geq \varepsilon^2) \leq \frac{E(|\xi - E(\xi)|^2)}{\varepsilon^2}.$$

10 Tétel: Kovariancia és korreláció

10.1 Hogyan definiáljuk illetve hogyan számítjuk ki ξ és η valváltozók kovarianciáját?

Definíció: Legyenek ξ és η val. vált-ok. Tfh $\exists \sigma^2(\xi)$ és $\exists \sigma^2(\eta)$. Ekkor ξ és η kovarianciája: a $\beta = (\xi - E(\xi))(\eta - E(\eta))$ val. vált. várható értéke.

Jelölése: $cov(\xi, \eta) = E((\xi - E(\xi))(\eta - E(\eta)))$.

Állítás: A kovariancia tulajdonságai:

1. $cov(\xi, \xi) = \sigma^2(\xi)$.
2. $cov(\xi, \eta) = cov(\eta, \xi)$.
3. $\forall a \in \mathbb{R} : cov(a\xi, \eta) = acov(\xi, \eta)$.
4. $cov(\xi + \eta, \gamma) = cov(\xi, \gamma) + cov(\eta, \gamma)$.

Állítás:

$$cov(\xi, \eta) = E(\xi\eta) - E(\xi)E(\eta).$$

Bizonyítás:

$$\begin{aligned} cov(\xi, \eta) &= E((\xi - E(\xi))(\eta - E(\eta))) = E(\xi\eta - \xi E(\eta) - \eta E(\xi) + E(\xi)E(\eta)) = \\ &= E(\xi\eta) - E(\xi)E(\eta) - E(\eta)E(\xi) + E(\xi)E(\eta) = E(\xi\eta) - E(\xi)E(\eta). \end{aligned}$$

10.2 Hogyan definiáljuk ξ valváltozó standardizáltját?

Definíció: Egy ξ val. vált. standardizáltja: $\tilde{\xi} = \frac{\xi - E(\xi)}{\sigma(\xi)}$.

10.3 Hogyan definiáljuk ξ és η valváltozók korrelációs együtthatóját?

Definíció: Legyenek ξ és η val. vált-ok. Ekkor ξ és η korrelációja:

$$R(\xi, \eta) = corr(\xi, \eta) = \frac{cov(\xi, \eta)}{\sigma(\xi)\sigma(\eta)}.$$

Megjegyzés: A korreláció felfogható úgy is, mint a val. vált-ok standardizáltjának kovarianciája.

10.4 Mi a kovariancia és a függetlenség kapcsolata?

Állítás: Ha ξ és η függetlenek, akkor $cov(\xi, \eta) = 0$. ez fordított esetben nem feltétlenül igaz.

Állítás: Ha $\exists \sigma^2(\xi)$ és $\exists \sigma^2(\eta)$, akkor

$$\sigma^2(\xi \pm \eta) = \sigma^2(\xi) + \sigma^2(\eta) \pm 2cov(\xi, \eta).$$

Bizonyítás:

$$\begin{aligned} \sigma^2(\xi \pm \eta) &= E((\xi \pm \eta)^2) - (E(\xi \pm \eta))^2 = E(\xi^2 \pm 2\xi\eta + \eta^2) - (E^2(\xi) \pm 2E(\xi)E(\eta) + E^2(\eta)) = \\ &= E(\xi^2) \pm 2E(\xi\eta) + E(\eta^2) - E^2(\xi) \mp 2E(\xi)E(\eta) - E^2(\eta) = \sigma^2(\xi) + \sigma^2(\eta) \pm 2cov(\xi, \eta). \end{aligned}$$

Állítás: Ha ξ és η függetlenek, és $\exists \sigma^2(\xi)$ és $\exists \sigma^2(\eta)$, akkor

$$\sigma^2(\xi \pm \eta) = \sigma^2(\xi) + \sigma^2(\eta).$$

10.5 Hogyan számítjuk ki a kovarianciát diszkrét és folytonos esetben ha adott az eloszlás illetve az együttes sűrűségfüggvény?

Állítás: Kovariancia számítása diszkrét esetben:

$$\text{cov}(\xi, \eta) = \sum_i \sum_j x_i y_j (P(\xi = x_i, \eta = y_j)) - \left(\sum_i x_i P(\xi = x_i) \right) \left(\sum_j y_j P(\eta = y_j) \right),$$

ahol ξ_i és y_j a ξ és η val. vált-ok lehetséges értékei.

Állítás: Kovariancia folytonos esetben:

$$\text{cov}(\xi, \eta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy f_{\xi, \eta}(x, y) dx dy - \left(\int_{-\infty}^{\infty} x f_{\xi}(x) dx \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} y f_{\eta}(y) dy \right),$$

ahol $f_{\xi, \eta}(x, y)$ az együttes sűrűségfv, $f_{\xi}(x)$ és $f_{\eta}(y)$ a perem-sűrűségfv-ek, vagy marginálisok.

Part II

B Tételsor

1 Tétel: Integrál és kiszámítása

1.1 Mit nevezünk a A halmaz karakterisztikus (indikátor) függvényének?

Definíció: Legyen $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ val. mező, $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ val. vált. (így mérhető). Legyen $A \in \mathfrak{F}$. A karakterisztikus/indikátor fv-e:

$$\chi_A(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{ha } \omega \in \Omega \setminus A \\ 1 & \text{ha } \omega \in A \end{cases}$$

1.2 Mi a lépcsős függvény definíciója?

Definíció: Legyen $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ val. mező, $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ val. vált. (így mérhető). Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, $(\lambda_k)_{1 \leq k \leq n}$ $\mathbb{R}$ -beli véges rendszer. Legyen $(A_k)_{1 \leq k \leq n}$ $\mathfrak{F}$ -beli (halmaz)rendszer.

$$f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(\omega) = \sum_{j=1}^n \lambda_j \chi_{A_j}(\omega).$$

1.3 Mi az f lépcsős függvény integrálja a P mérték szerint Ω -n, ha f diszjunkt halmazok karakterisztikus függvényeinek lineáris kombinációja?

Definíció: Legyen $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ val. mező, $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ lépcsős fv. olyan, hogy:

$$f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(\omega) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \chi_{A_j}(\omega),$$

ahol $(A_k)_{1 \leq k \leq n}$ olyan $\mathfrak{F}$ -beli rendszer, hogy $A_j \cap A_k = \emptyset$, ha $j \neq k$, és $\alpha_j \in \mathbb{R}$. Ekkor

$$\int_{\Omega} f dP = \sum_{j=1}^n \alpha_j P(A_j).$$

1.4 Hogyan definiáljuk egy általános $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ függvény P mérték szerinti integrálját Ω felett?

Állítás: Legyen $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ mérhető, korlátos fv. $\Rightarrow \exists (f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ fv. sorozat, hogy

1. $\forall n \in \mathbb{N} : f_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ lépcsős.
2. $\forall n \in \mathbb{N}$ és $\omega \in \Omega$ esetén $f_n(\omega) \leq f_{n+1}(\omega)$ (azaz $(f_n(\omega))_{n \in \mathbb{N}}$ rögzített ω esetén monoton növekvő).
3. $\forall \omega \in \Omega : f_n(\omega) \rightarrow f(\omega)$, ahogy $n \rightarrow \infty$.

Definíció: Korlátos pozitív mérhető fv. integrálja:

$f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ mérhető és korlátos. Legyen $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \geq 0$ lépcsős fv. sorozat: f_n monoton növekvően tart f -hez. Ekkor

$$\int_{\Omega} f dP = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{\Omega} f_n dP \right).$$

Állítás: Legyen $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ mérhető, (nem feltétlenül korlátos) fv. $\Rightarrow \exists (f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ fv. sorozat, hogy

1. $f_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ mérhető és korlátos.
2. f_n monoton növekvően tart f -hez.

Definíció: Mérhető pozitív fv. integrálja:

$f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ mérhető. Legyen $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \geq 0$ mérhető, korlátos fv-k sorozata: f_n monoton növekvően tart f -hez. Ekkor

$$\int_{\Omega} f dP = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{\Omega} f_n dP \right) \in \overline{\mathbb{R}}_+,$$

ahol $\overline{\mathbb{R}}_+ = \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

Definíció: Függvény pozitív és negatív része:
 $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mérhető.

- $f^+ = \max\{f, 0\}$, azaz f pozitív része.
- $f^- = \max\{-f, 0\}$, azaz f negatív része.

Állítás: $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mérhető $\Leftrightarrow f^+$ és f^- mérhető.

Definíció: Mérhető fv integrálja:
 $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mérhető.

$$\int_{\Omega} f dP = \left(\int_{\Omega} f^+ dP \right) - \left(\int_{\Omega} f^- dP \right),$$

ha a jobb oldal értelmes (azaz legfeljebb az egyik tag végtelen).

- f integrálható, ha $\exists qint : \int_{\Omega} f dP \in \overline{\mathbb{R}}$.
- f végesen integrálható, ha $\int_{\Omega} f dP \in \mathbb{R}$.

2 Tétel: Lebesgue mérték, mértékek abszolút folytonossága és szingularitása

2.1 Mikor mondjuk hogy egy μ_1 mérték abszolút folytonos egy μ_2 mértékre nézve?

Definíció: $(\Omega, \mathfrak{F})$ mérhető tér. Legyen $\mu_1, \mu_2 : \mathfrak{F} \rightarrow \mathbb{R}_+$ mérték.
 μ_1 abszolút folytonos μ_2 -re, ha

$$(\forall A \in \mathfrak{F})(\mu_2(A) = 0 \Rightarrow \mu_1(A) = 0).$$

Jelölése $\mu_1 \ll \mu_2$.

2.2 Mikor mondjuk hogy egy μ_1 mérték szinguláris egy μ_2 mértékre nézve?

$(\Omega, \mathfrak{F})$ mérhető tér. Legyen $\mu_1, \mu_2 : \mathfrak{F} \rightarrow \mathbb{R}_+$ mérték.
 μ_1 syinguláris μ_2 -re, ha

$$\begin{aligned} \exists \Omega_1, \Omega_2 \in \mathfrak{F} \quad \Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset, \quad \Omega_1 \cup \Omega_2 = \Omega \\ \mu_1(\Omega_1) = 0 \text{ és } \mu_2(\Omega_2) = 0. \end{aligned}$$

Jelölés: $\mu_1 \perp \mu_2$.

2.3 Hogyan definiáljuk a Lebesgue-külső mértéket és a Lebesgue mértéket?

Definíció: Lebesgue-külső mérték:
 Legyen $A \subseteq \mathbb{R}$ tetszőleges.

$$\bar{\lambda}(A) = \inf \left(\sum_{n=0}^{\infty} \lambda(I_n) \mid A \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} I_n, \quad (I_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ intervallumok rendszere} \right)$$

Ahol $\lambda(I) : I$ hossza.
 $\bar{\lambda}(A) \geq 0$ (lehet ∞ is).

Állítás: $\exists \mathcal{M}_\lambda \subseteq 2^{\mathbb{R}}$ halmazrendszer, hogy

1. $\mathcal{M}_\lambda$ σ -algebra
2. $\mathcal{M}_\lambda \neq 2^{\mathbb{R}}$
3. $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \subseteq \mathcal{M}_\lambda$ (tartalmazza a borelleket)
4. $\bar{\lambda}|_{\mathcal{M}_\lambda} : \mathcal{M}_\lambda \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ mérték (ahol $\bar{\lambda}|_{\mathcal{M}_\lambda}$ jelentése: $\bar{\lambda}$ megszorítva $\mathcal{M}_\lambda$ -ra).

Definíció: Lebesgue mérték:

$$\lambda = \bar{\lambda}|_{\mathcal{M}_\lambda}.$$

2.4 Mit tud mondani a Riemann (improprius) és Lebesgue integrálhatóság viszonyáról?

Definíció: Lebesgue 0-mértékű halmaz:
 $A \in \mathcal{M}_\lambda$ Lebesgue-0 mértékű, ha $\lambda(A) = 0$.
 Ilyen például $\mathbb{N}$, vagy $\mathbb{Q}$.

Definíció: Lebesgue mérték szerinti integrál:

$$\int_{[a,b]} f d\lambda,$$

ahol $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mérhető fv (mérhető λ szerint, azaz $\forall$ Borel ösképe $\mathcal{M}_\lambda$ -beli).
 A konstrukció ugyan úgy felépíthető $\mathbb{R}$ -en λ szerint, mint $\int_{\Omega} f dP$ Ω -n P szerint.

Állítás: $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrálható $\Leftrightarrow f$ folytonos egy Lebesgue 0 mértékű halmazon kívül.
Ekkor

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} f d\lambda.$$

Tehát 'szép' fv-ek esetén a Lebesgue integrál megegyezik a hagyományos, Riemann integrállal.

3 Tétel: Vektorértékű valószínűségi változók, diszkrét és folytonos esetben

3.1 Hogyan definiáljuk egy (ξ, η) 2 dimenziós valváltozó eloszlásfüggvényét?

Definíció: Legyen $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ val. mező, $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k, (k \in \mathbb{N}^+)$ fv. mérhető, ha $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k) : \xi^{-1}(B) \in \mathfrak{F}$.

Definíció: Vektor értékű val. vált. alatt a

$$\xi(\omega) = (\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \dots, \xi_k(\omega))$$

vektort értjük, ahol $\omega \in \Omega$ és ξ_j -k val. vált-ok $1 \leq j \leq k$.

Definíció: Ekkor a várható érték a következő vektor, ha $\exists$:

$$E(\xi) = (E(\xi_1), E(\xi_2), \dots, E(\xi_k)).$$

Definíció: Vektor val. vált. (együttes) eloszlásfv-e alatt a következőt értjük:

$$F_\xi : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}, \quad F_\xi(t) = P\left(\xi^{-1}\left(\prod_{j=1}^k]-\infty, t_j[\right)\right),$$

ahol

$$t = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_k \end{pmatrix}$$

3.2 Mik a többdimenziós valváltozók eloszlásfüggvényének tulajdonságai?

Állítás: Vektor val. vált. eloszlásfv-ének tulajdonságai ($k \geq 2$ esetén):

1. F_ξ minden változóban monoton nő: Ha $x_i^* < x_i^{**}$, akkor

$$F_\xi(x_1, \dots, x_i^*, \dots, x_k) \leq F_\xi(x_1, \dots, x_i^{**}, \dots, x_k).$$

2. F_ξ minden változóban balról folytonos.

- 3.

$$\lim_{t_j \rightarrow -\infty} F_\xi(t) = 0 \quad \forall j = 1, \dots, k.$$

- 4.

$$\lim_{t_1, t_2, \dots, t_k \rightarrow \infty} F_\xi(t) = 1.$$

5. $\forall a, b \in \mathbb{R}^k$ ha $a < b$ (minden koordinátában):

$$\sum_{\epsilon \in \{0,1\}^k} (-1)^{|\epsilon|} F_\xi(a\epsilon + b(1-\epsilon)) \geq 0,$$

ahol $|\epsilon|$: ahány 1-es van ϵ -ban, $a\epsilon$ és $b(1-\epsilon)$ koordinátánkénti szorzatot jelöl, pl:

$$a\epsilon = \begin{pmatrix} a_1\epsilon_1 \\ a_2\epsilon_2 \\ \vdots \\ a_k\epsilon_k \end{pmatrix}.$$

3.3 Mit nevezünk együttes és peremeloszlásnak diszkrét 2 dimenziós valváltozók esetén?

Definíció: Vektor val. vált. eloszlása:

$$Q_\xi(B) = P(\xi^{-1}(B)).$$

Állítás: Tfh $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ a $\xi = (\eta, \gamma)$ val. vált. együttes eloszlásfv-e, $F_\eta(x)$ az η , $F_\gamma(y)$ pedig a γ val. vált. eloszlásfv-e. Ekkor:

$$F_\eta(x) = \lim_{y \rightarrow \infty} F(x, y) \quad F_\gamma(y) = \lim_{x \rightarrow \infty} F(x, y).$$

Definíció: Egy vektor értékű val. vált. bármely komponensének valószínűségeloszlását peremeloszlásnak nevezzük.

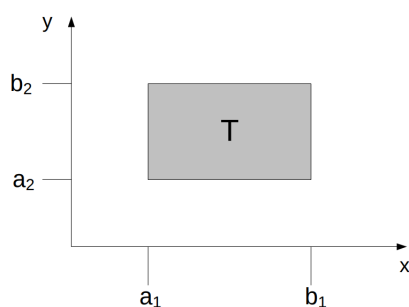
3.4 Hogyan számoljuk tartományba (téglalapba) esés valószínűségét 2 dim valváltozó esetén ha adott az együttes eloszlásfüggvény?

Állítás: Legyen (ξ, η) 2 dimenziós val. vált., melynek eloszlásfv-e: $F(x, y) = P(\xi < x, \eta < y)$. Ekkor:

$$P(a_1 \leq \xi \leq b_1, a_2 \leq \eta \leq b_2) = F(b_1, b_2) + F(a_1, a_2) - F(a_1, b_2) - F(b_1, a_2).$$

Bizonyítás: Jelöljük a ξ -hez tartozó értéket x -el, az η -hoz tartozó értéket y -al. Jelöljük T -vel a kérdéses eseményhez tartozó esetet:

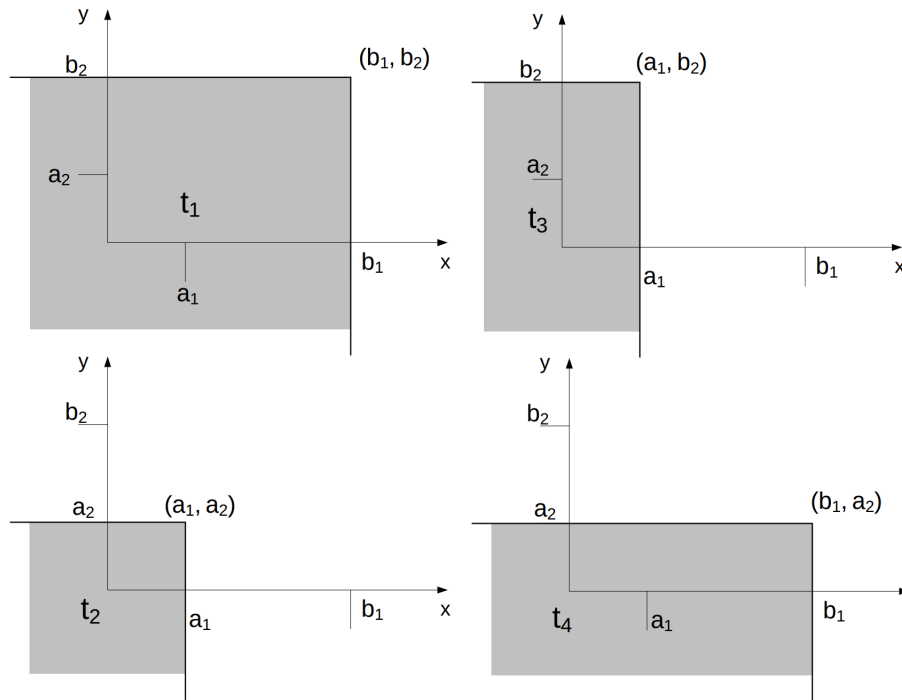
$$T = \{a_1 \leq \xi \leq b_1, a_2 \leq \eta \leq b_2\} :$$



Legyen ezen kívül:

$$\begin{aligned} t_1 &= \{\xi < b_1, \eta < b_2\} & t_3 &= \{\xi < a_1, \eta < b_2\} \\ t_2 &= \{\xi < a_1, \eta < a_2\} & t_4 &= \{\xi < b_1, \eta < a_2\} \end{aligned}$$

Ekkor



$$T = t_1(t_3 \cup t_4) \Rightarrow P(T) = P(t_1) - P(t_3 \cup t_4) = P(t_1) - (P(t_3) + P(t_4) - P(t_3 \cap t_4))$$

mivel $t_3 \cap t_4 = t_2$, ezért:

$$P(T) = P(t_1) - P(t_3) - P(t_4) + P(t_2) = F(b_1, b_2) - F(a_1, b_2) - F(b_1, a_2) + F(a_1, a_2).$$

3.5 Ha (ξ, η) egy folytonos eloszlású 2 dim valváltozó, mik a peremsűrűségfüggvények és hogyan származtathatóak az együttes sűrűségfüggvényből?

Állítás: Ha $\xi(\eta, \gamma) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ val. vált., $Q_\xi \ll \lambda_{\mathbb{R}^2}$, és a sűrűségfv-e $f_{(\eta, \gamma)}$, akkor

$$f_\eta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{(\eta, \gamma)}(x, y) dy \text{ és } f_\gamma(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{(\eta, \gamma)}(x, y) dx.$$

3.6 Mi az összefüggés a peremsűrűségfüggvények és az együttes sűrűségfüggvény között ha ξ és η függetlenek?

Állítás:

$$f_{(\eta, \gamma)}(x, y) = f_\eta(x) f_\gamma(y).$$

3.7 Hogyan számoljuk tartományba (pl. téglalapba) esés valószínűségét 2 dim valváltozó esetén ha adott az együttes sűrűségfüggvény?

Állítás: Legyen (ξ, η) 2 dimenziós val. vált., melynek sűrűségfv-e: $f_{\xi, \eta}(x, y)$. Ekkor:

$$\begin{aligned} P(a_1 \leq \xi \leq b_1, a_1 \leq \eta \leq b_2) = \\ = \int_{-\infty}^{b_2} \int_{-\infty}^{b_1} f_{(\xi, \eta)}(x, y) dx dy + \int_{-\infty}^{a_2} \int_{-\infty}^{a_1} f_{(\xi, \eta)}(x, y) dx dy - \int_{-\infty}^{b_2} \int_{-\infty}^{a_1} f_{(\xi, \eta)}(x, y) dx dy - \int_{-\infty}^{a_2} \int_{-\infty}^{b_1} f_{(\xi, \eta)}(x, y) dx dy. \end{aligned}$$

Bizonyítás: Hasonlóan az előzőhöz.

4 Tétel: Valószínűségi változók transzformáltjai

4.1 Ha adott egy ξ diszkrét valváltozó melynek lehetséges értékei $x_1, x_2, \dots$, ismerjük az eloszlását, és egy h függvény, hogyan számítjuk ki az $\eta = h(\xi)$ valváltozó eloszlását?

Definíció: Legyenek a ξ diszkrét val. vált. lehetséges értékei $x_1, x_2, \dots$ és a megfelelő valószínűségek $p_1, p_2, \dots$ (nem feltétlenül véges sok, lásd pl a geometriai eloszlást). Ekkor $\eta = h(\xi)$ val. vált. lehetséges értékei az $y_1 = h(x_1), y_2 = h(x_2), \dots$ számok, és a megfelelő valószínűségek:

$$P(\eta = y_k) = q_k = \sum_{h(x_i)=y_k} P(\xi = x_i) = \sum_{h(x_i)=y_k} p_i.$$

Megjegyzés: A szumma azért kell, mert h nem feltétlenül injektív.

4.2 Ha ξ egy folytonos eloszlású valváltozó melynek a sűrűségfüggvénye $f(x)$, valamint $h(x)$ szig mon és diffható, hogyan számítjuk ki az $\eta = h(\xi)$ valváltozó sűrűségfüggvényét?

Állítás: Ha h szig. mon., akkor az η val. vált. $y_k = h(x_k), k = 1, 2, \dots$ értékeihez tartozó eloszlás megegyezik a ξ val. vált. eloszlásával.

Állítás: Tfh h szig. mon. és diff-ható, ξ folytonos eloszlású val. vált., sűrűségfv-e: f . Ekkor $\eta = h(\xi)$ val. vált. sűrűségfv-e:

$$g(y) = f(h^{-1}(y)) \left| \frac{dh^{-1}(y)}{dy} \right|.$$

Bizonyítás: Tfh h szig. mon. nő. Ekkor az $\{\eta < y\} = \{h(\xi) < y\}$ esemény egyenlő a $\{\xi < h^{-1}(y)\}$ eseménnyel:

$$\{\eta < y\} = \{\omega \in \Omega | \eta(\omega) < y\} = \{\omega \in \Omega | h(\xi(\omega)) < y\} = \star.$$

Ha h növe:

$$\star = \omega \in \Omega | \xi(\omega) < h^{-1}(y).$$

Így η eloszlásfv-e:

$$G(y) = P(\eta < y) = P(h(\xi) < y) = P(\xi < h^{-1}(y)) = F(h^{-1}(y)),$$

ahol F a ξ val. vált. eloszlásfv-e. Ekkor a láncszabály alkalmazásával:

$$g(y) = G'(y) = \frac{dF(h^{-1}(y))}{dy} = f(h^{-1}(y)) \frac{dh^{-1}(y)}{dy},$$

ahol $\frac{dh^{-1}(y)}{dy} > 0$, mert h szig. mon. nő ($\Rightarrow h^{-1}$ szig. mon. nő).

Tfh h szig. mon. csökken. Ekkor az $\{\eta < y\} = \{h(\xi) < y\}$ esemény egyenlő a $\{\xi > h^{-1}(y)\}$ eseménnyel. Ekkor $\star = \{\omega \in \Omega | \xi(\omega) > h^{-1}(y)\}$. Ekkor

$$G(y) = P(\eta < y) = P(h(\xi) < y) = P(\xi > h^{-1}(y)) = 1 - P(\xi < h^{-1}(y)) = 1 - F(h^{-1}(y))$$

$$g(y) = G'(y) = -f(h^{-1}(y)) \frac{dh^{-1}(y)}{dy},$$

ahol $\frac{dh^{-1}(y)}{dy} < 0$, mert h szig. mon. csökken.

4.3 Mi lesz a transzformált valváltozó sűrűségfüggvénye ha a transzformáció lineáris?

Példa: Lineáris transzformáció: $\eta = a\xi + b$, ξ sűrűségfv-e f . Ekkor η sűrűségfv-e:

$$g(y) = \frac{1}{|a|} f\left(\frac{y-b}{a}\right),$$

mert $h(x) = ax + b \Rightarrow h^{-1} = \frac{y-b}{a}$.

Megjegyzés:

$$\left| \frac{dh^{-1}(y)}{dy} \right| = \frac{1}{|a|}, \quad f(h^{-1}(y)) = f\left(\frac{y-b}{a}\right).$$

5 Tétel: Feltételes eloszlás- és sűrűségfüggvény, feltételes várható érték

5.1 Hogyan definiáljuk a ξ valószínűségi $y_i < \eta < y_j$ feltétel melletti eloszlásfüggvényét ha (ξ, η) diszkrét valószínűségi vektorváltozó?

Definíció: A $\xi = x_i$ esemény $\eta = y_k$ feltétel melletti valószínűsége:

$$P(\xi = x_i | \eta = y_k) = \frac{P(\xi = x_i, \eta = y_k)}{P(\eta = y_k)}.$$

Megjegyzés: A számláló az együttes eloszlást megadó táblázat egy cellája, a nevező pedig η peremeloszlásnak 1 értéke.

Definíció: A ξ val. vált. $y_i < \eta < y_j$ feltétel melletti feltételes eloszlásfv-e:

$$F^*(x | y_i < \eta < y_j) = P(\xi < x | y_i < \eta < y_j).$$

5.2 Hogyan tudjuk meghatározni az értékét az együttes illetve a peremeloszlások segítségével?

Állítás: Legyen a (ξ, η) diszkrét vektor értékű val. vált. eloszlásfv-e $F(x, y)$, és η peremeloszlásfv-e:

$$F_\eta(y) = \lim_{x \rightarrow \infty} F(x, y).$$

Ekkor, ha feltesszük, hogy $F_\eta(y_j) \neq F_\eta(y_i)$, akkor

$$F^*(x | y_i \leq \eta < y_j) = \frac{F(x, y_j) - F(x, y_i)}{F_\eta(y_j) - F_\eta(y_i)}.$$

Bizonyítás:

$$P(\xi < x, y_i < \eta < y_j) = F(x, y_j) - F(x, y_i).$$

Másrészt definíció szerint

$$F^*(x | y_i < \eta < y_j) = P(\xi < x | y_i < \eta < y_j) = \frac{P(\xi < x, y_i < \eta < y_j)}{P(y_i < \eta < y_j)} = \frac{F(x, y_j) - F(x, y_i)}{F_\eta(y_j) - F_\eta(y_i)}.$$

5.3 Folytonos esetben hogyan definiáljuk $F^*(x|z)$ -t?

Definíció: A ξ val. vált. $\eta = z$ feltétel melletti feltételes eloszlásfv-e:

$$F^*(x | \eta = z) = \lim_{h \rightarrow 0} (P(\xi < x | z < \eta < z + h)),$$

ha a határérték létezik.

5.4 Folytonos esetben hogyan definiáljuk ξ -nek az $\eta = z$ feltétel melletti feltételes sűrűségfüggvényét?

Definíció: ξ -nek az $\eta = z$ feltétel melletti sűrűségfv-e:

$$f_{\xi|\eta=z}(x) = \frac{f_{(\xi, \eta)}(x, z)}{f_\eta(z)}.$$

6 Tétel: L^p terek, konvergenciatípusok L^p terekben

6.1 Hogyan definiáljuk az $L^p_{\mathbb{R}}$ függvényteret?

Definíció: Legyen $p \in [1, \infty[$

$$\mathfrak{L}^p_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathfrak{F}, P) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ mérhető és } \int_{\Omega} |f|^p dP < \infty \right\}.$$

6.2 Hogyan definiáljuk egy f függvény p -normáját?

Definíció: f fv. p normája: $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ val. mező, $p \in [1, \infty[$, $f \in \mathfrak{L}^p_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathfrak{F}, P)$,

$$\|f\|_p = \begin{cases} \left(\int_{\Omega} |f|^p dP \right)^{\frac{1}{p}} & \text{ha } p \in [1, \infty[\\ \sup_{\omega \in \Omega \setminus A} |f(\omega)| & \text{ha } p = \infty \end{cases},$$

ahol az A halmaz jelentése: A -n kívül f korlátos és $P(A) = 0$.

6.3 Mi az L^p tér, milyen konvergenciatípusokat ismer L^p terekben, és milyen összefüggések állnak fent ezek közt?

L^p terekben az alábbi konvergencia-fajtákat különböztetjük meg:

- 1-vallal egyenletes konvergencia.

Legyen $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ $\mathfrak{L}^p$ -beli fv-sorozat, $f \in \mathfrak{L}^p$.

$f_n \rightarrow f$ 1-vallal egyenletesen (majdnem mindenütt egyenletesen), ha

$$(f_n - f) \in L^{\infty} \forall n \in \mathbb{N} \text{ és } \|f_n - f\|_{\infty} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

ez pontosan azzal ekvivalens, hogy

$$a_n = \sup_{\omega \in \Omega} |f_n(\omega) - f(\omega)| \rightarrow 0.$$

Jelölése: $f_n \xrightarrow{\text{mme}} f$.

2. 1-vallal konvergencia.

$f_n \rightarrow f$ 1 vallal, azaz $f_n \xrightarrow{mm} f$ P.m.m., ha

$$\exists A \in \mathfrak{F}, \text{ hogy } P(\Omega \setminus A) = 0 \text{ és } f_n(\omega) \rightarrow f(\omega), \forall \omega \in A,$$

másszóval, val. mező, és val. vált. esetén:

$$P(\{\omega \in \Omega \mid \xi_n(\omega) \rightarrow \xi(\omega)\}) = 1.$$

3. L^p -ben való konvergencia ($p \in [q, \infty]$).

$$f_n \xrightarrow{\mathfrak{L}^p} f, \text{ ha } \|f_n - f\|_p \rightarrow 0 \text{ azaz } \left(\int_{\Omega} |f_n - f|^p dP \right)^{\frac{1}{p}} \rightarrow 0.$$

Az eddigi konvergenciatípusok általános f -re vonatkoztak, a következő 2 kifejezetten val. vált-okra, ezért használjuk a továbbiakban a ξ jelölést f helyett.

4. Sztochasztikus konvergencia.

$(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ val. mező, $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ val. vált. sorozat Ω -n, $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ val. vált. $\xi_n \rightarrow \xi$ sztochasztikusan, ha

$$\forall \varepsilon > 0 \quad P(|\xi_n - \xi| > \varepsilon) \rightarrow 0.$$

azaz

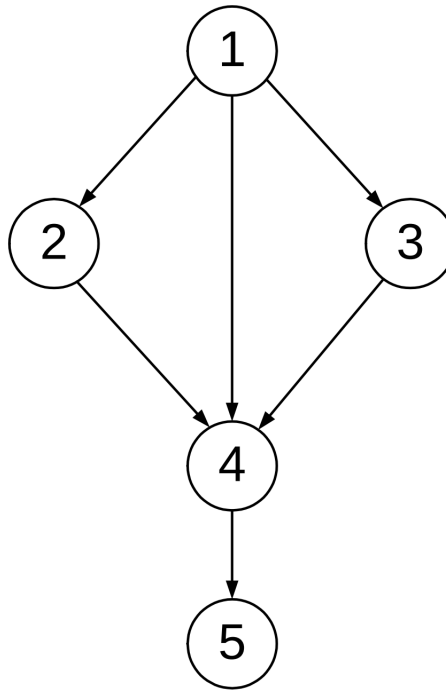
$$P(\omega \in \Omega \mid |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| > \varepsilon) \rightarrow 0.$$

5. Eloszlásban való konvergencia. $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ val. mező, $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ val. vált. sorozat Ω -n, $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ val. vált. A $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ val. vált. sorozat eloszlásban tart ξ -hez, ha

$$P(\xi_n < x) \rightarrow P(\xi < x) \forall x \in \mathbb{R}, \text{ melyre } x \rightarrow P(\xi < x) \text{ folytonos fv.}$$

Röviden: $F_{\xi_n}(x) \rightarrow F_{\xi}(x)$.

Állítás:



Bizonyítás: ① $\Rightarrow$ ③

Tudjuk, hogy $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$, kell, hogy $\|f_n - f\|_p \rightarrow 0$, ami ekvivalens azzal, hogy

$$\left(\int_{\Omega} |f_n - f|^p dP \right)^{\frac{1}{p}} \rightarrow 0 \Leftrightarrow \int_{\Omega} |f_n - f|^p dP \rightarrow 0 \text{ (mivel } p > 1)$$

$$\Leftrightarrow \|f_n - f\|_p^p \rightarrow 0.$$

Tudjuk, hogy

$$\|f_n - f\|_p^p \leq \left(\sup_{\omega \in \Omega} |f_n(\omega) - f(\omega)| \right)^p = \|f_n - f\|_\infty^p,$$

ezért

$$\|f_n - f\|_p^p \leq \int_{\Omega} \|f_n - f\|_\infty^p dP = \|f_n - f\|_\infty^p \int_{\Omega} 1 dP \rightarrow 0.$$

Bizonyítás: ② $\Rightarrow$ ④

Azaz azt szeretnénk belátni, hogy az 1-vallal-konvergenciából következik a sztochasztikus. Tudjuk, hogy

$$P(\{\omega \in \Omega \mid \xi_n(\omega) \rightarrow \xi(\omega)\}) = P(K) = 1.$$

Legyen $\varepsilon > 0$ és

$$a_n = P(\{\omega \in \Omega \mid \xi_n(\omega) - \xi(\omega) > \varepsilon\}) = P(A_n).$$

Kell: $a_n \rightarrow 0$ (ekkor teljesül ④). Legyen $\omega \in K$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists n_0 \in \mathbb{N}, \text{ hogy } \forall n \geq n_0\text{-ra } |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| \leq \varepsilon$$

$$\Rightarrow \forall n \geq n_0 : \omega \notin A_n \Rightarrow \omega \in \Omega \setminus A_n.$$

Tfh $\exists \varepsilon > 0$, hogy $P(|\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| > \varepsilon) \not\rightarrow 0$

$$\Rightarrow \exists \delta > 0 : a_n = P(|\xi_n - \xi| > \varepsilon) \geq \delta > 0 \quad \infty \text{ sok } n\text{-re.}$$

Azaz $\exists(\hat{\xi}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ részsorozat, hogy

$$P(\{|\hat{\xi}_n - \xi| > \varepsilon\}) \geq \delta$$

igaz $\forall n \in \mathbb{N}$ -re. De $\hat{\xi} \rightarrow \xi$ 1-vallal:

$$\left\{ \omega \in \Omega \mid |\hat{\xi}_n(\omega) - \xi(\omega)| > \varepsilon \right\} \subseteq \left\{ \omega \in \Omega \mid \hat{\xi}_n(\omega) \not\rightarrow \xi(\omega) \right\}$$

A jobb halmaz mértéke 0, viszont $\delta > 0$. Ez ellentmondás.

Bizonyítás: $\textcircled{3} \Rightarrow \textcircled{4}$

$\xi_n \rightarrow \xi$ $\mathfrak{L}^p$ -ben, azaz $E(|\xi_n - \xi|^p) \rightarrow 0$

Kell: $\forall \varepsilon > 0 : P(|\xi_n - \xi| > \varepsilon) \rightarrow 0$

$$P(|\xi_n - \xi| > \varepsilon) = P(|\xi_n - \xi|^p > \varepsilon^p) \leq \frac{E(|\xi_n - \xi|^p)}{\varepsilon^p} \rightarrow 0,$$

ahol a becslésnél a Markov-egyenlőtlenséget használtuk.

7 Tétel: Centrális határeloszlás tétel, Nagy számok gyenge törvénye, Nagy számok erős törvénye

7.1 Mit mond ki a centrális határeloszlás tétel?

Tétel: Centrális határeloszlás tétel:

$\xi_1, \xi_2, \dots$ független, azonos eloszlású val. vált-ok. $\sigma^2(\xi_j) < \infty$. Ekkor

$$\frac{\sum_{j=1}^n \xi_j - nE(\xi_1)}{\sqrt{n}\sigma(\xi_k)} = N(0, 1),$$

ahol $N(0, 1)$ egy standard normális eloszlású val. vált.

Megjegyzés: ξ_k helyén akármelyik ξ állhat, mivel azonos eloszlásúak.

7.2 Mit mond ki a DeMoivre-Laplace tétel?

Tétel: DeMoivre-Laplace tétel:

$(\xi_j)_{j \in \mathbb{N}}$ független val. vált-ok, $P(\xi = 1) = P(\xi = -1) = \frac{1}{2}$. Ekkor $E(\xi_j) = 0$ és $\sigma^2(\xi_j) = \sigma(\xi_j) = 1$.

$$S_n = \sum_{j=1}^n \xi_j \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ekkor

$$P\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} < b\right) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^b e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

7.3 Mit mond ki a nagy számok gyenge törvénye?

Tétel: Nagy számok gyenge törvénye:

$\xi_1, \xi_2, \dots$ független, azonos eloszlású val. vált-ok, $P(\xi_j = 1) = p, P(\xi = 0) = 1 - p, p \in]0, 1[$. Ekkor

$$\frac{\sum_{j=1}^n \xi_j}{n} \rightarrow p \text{ sztochasztikusan,}$$

ahol p egy konstans p értékké fv. Azaz

$$P\left(\left|\frac{\sum_{j=1}^n \xi_j}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \rightarrow 0 \quad \forall \varepsilon > 0.$$

A tételt véges szórásnégyzet esetén bizonyítjuk.

Állítás: Ha $\xi_1, \xi_2, \dots$ független, azonos eloszlású val. vált-ok, $\sigma^2(\xi_j) < \infty$, akkor

$$\frac{\sum_{j=1}^n \xi_j}{n} \rightarrow E(\xi_k) \text{ sztochasztikusan.}$$

Bizonyítás: Írjuk fel a csebisev egyenlőtlenséget $\frac{\sum_{j=1}^n \xi_j}{n}$ -re:

$$P\left(\left|\frac{\sum_{j=1}^n \xi_j}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\sigma^2\left(\frac{\sum_{j=1}^n \xi_j}{n}\right)}{\varepsilon^2} = \frac{1}{\varepsilon^2 n^2} \sigma^2\left(\sum_{j=1}^n \xi_j\right) = \frac{1}{\varepsilon^2 n^2} n \sigma^2(\xi_k) = \frac{1}{\varepsilon^2 n} \sigma^2(\xi_k).$$

Mivel a ξ_j -k azonos eloszlásúak, és függetlenek. A jobb oldali kifejezés pedig mivel $\sigma^2(\xi_k)$ véges, és $n \rightarrow \infty$, tart a 0-hoz. A baloldali kifejezést tekintve pedig pontosan ez a sztochasztikus konvergencia feltétele.

8 Tétel: Statisztikai alapfogalmak, maximum likelihood elv

8.1 Hogyan definiáljuk az empirikus eloszlásfüggvényt?

Definíció: A minta eloszlásfüggvénye H_n a minta nagysága szerinti növekvő sorrendbe rendezett elemei közül az i -edik

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq \xi_1^* \\ \frac{k}{n} & \text{ha } \xi_k^* < x \leq \xi_{k+1}^* \\ 1 & \text{ha } \xi_n^* < x \end{cases} \quad k = 1, \dots, n-1$$

8.2 Mit mond ki a Glivenko tétel?

Tétel: Glivenko tétel:

Ha ugyan azon eloszlásból veszünk mintákat:

$$P \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{-\infty < x < \infty} |F_n(x) - F(x)| \right) = 0 \right) = 1,$$

azaz $F_n(x)$ 1-vallal tart $F(x)$ -hez.

8.3 Mi a becsléelmélet alapproblémája?

Adott egy minta, és esetleg a sokaság eloszlásának típusa és egyes paraméterei. Keressük a sokaság pontos eloszlását és paramétereit. Ekkor becslünk.

8.4 Milyen tulajdonságokkal jellemezhető egy becslés?

Legyen ξ a megfigyelt val. vált., θ a ξ eloszlás megfigyelt paramétere. $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ a ξ -ből vett n elemű minta.

Készítsünk statisztikát, amiből lehet következtetni θ -ra:

$$\hat{\theta} = f(\xi_1, \xi_2, \dots).$$

Tulajdonság: Torzítatlanság:

A becslés torzítatlan, ha $E(\hat{\theta}) = \theta$.

Tulajdonság: Hatásosság:

$\hat{\theta}_1$ hatásosabb, mint $\hat{\theta}_2$, ha $\sigma(\hat{\theta}_1) < \sigma(\hat{\theta}_2)$.

Tulajdonság: Aszimptotikus torzítatlanság:

A minta elemszámának növelésével a becslőfv várható értéke megegyezik a sokaság jellemző értékével:

$\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_n$ asszimptotikusan torzítatlan, ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(\hat{\theta}_n) = \theta$$

Tulajdonság: Elégségesség:

A $\hat{\theta} = f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ statisztika elégséges becslése a θ paraméternek, ha a mintaváltozók együttes feltételes eloszlása, bármely módon megvalósuló $\hat{\theta} = y$ feltétel esetén nem tartalmazza a becsült θ paramétert.

Tulajdonság: Konzisztencia:

1. A becslés torzítatlan
2. A mintaelemszám csökkentésével a paraméter és a becslés közötti eltérés ε alá csökken.

8.5 A mintaátlag és az empirikus szórásnégyzet tulajdonságai

Definíció: Mintaátlag:

$$\bar{\xi} = \frac{\sum_{k=1}^n \xi_k}{n}.$$

Definíció: Empirikus szórásnégyzet:

$$\sigma_n(\xi) = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^n (\xi_k - \bar{\xi})^2}{n}}.$$

Tétel: A mintaátlag torzítatlan becslése $E(\xi)$ -nek

Tétel: A mintaátlag szórása $\rightarrow 0$, ha $n \rightarrow \infty$

Tétel: A mintaátlag az elméleti várható érték ($E(\xi)$) lineáris becslései közül a leghatásosabb.

Tétel: Az empirikus szórásnégyzet (σ_n^2) nem torzítatlan becslése $\sigma^2(\xi)$. (aszimptotikusan torzított).

Definíció: Korrigált szórásnégyzet:

$$s_n^2 = \frac{n}{n+1} \sigma_n^2.$$

Tétel: A korrigált szórásnégyzet torzítatlan becslése $\sigma^2(\xi)$ -nek.

8.6 Mi a maximum likelihood elv?

Általánosságban: A MLE (Maximum Likelihood Estimation) során az $L(\theta)$ likelihood függvényt kell maximalizálnunk a θ ismeretlen paraméter tekintetében. n független minta esetén

$$L(\theta) = f(x_1, x_2, \dots, x_n | \theta) = f(x_1 | \theta) f(x_2 | \theta) \dots f(x_n | \theta)$$

sorozatot nehéz maximalizálni $\Rightarrow$ log likelihood (mert a log. fv-nek ugyan az a menete, mint a belső fv-nek).

$$l(\theta) = \ln(L(\theta)) = \ln \left(\prod_{j=1}^n f(x_j | \theta) \right) = \sum_{j=1}^n \ln f(x_j | \theta).$$

8.7 Mi a konfidenciaintervallum, és hogyan számítható ki különféle esetekben?

Definíció: Konfidencia intervallum: A $\hat{\theta}$ becsléséhez tartozó $]\theta - z, \theta + z[$ konfidencia intervallumról azt mondjuk, hogy $100(1 - \alpha)\%$ -os megbízhatósági szinthez tartozik, ha az esetek $100(1 - \alpha)\%$ -ban a ténylegesen meghatározott intervallum lefedi a becsült paraméter (θ) valódi értékét.

Állítás: Konfidencia intervallum kiszámítása:

1. Normális eloszlás, ismert szórás:

Becsüljük $E(\xi) = m$ -et

$$\eta = \frac{\bar{\xi} - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \Rightarrow \text{standard normális eloszlású}$$

$$P(-z < \eta < z) = \Phi(\eta < z) - \Phi(\eta < -z) = \Phi(z) - (1 - \Phi(z)) = 2\Phi(z) - 1$$

$$\Rightarrow -z < \frac{\bar{\xi} - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < z \Rightarrow \bar{\xi} - z \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < m < \bar{\xi} + z \frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

ahol $z \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ a hiba.

2. Nem normális eloszlás, ismert szórás:

Ha az eloszlás nem normális, CHT-val becsüljük.

$$P \left(\frac{\sum_i \xi_i - nE(\xi_k)}{\sqrt{n}\sigma(\xi_k)} < x \right) \approx \Phi(x).$$

Ezzel a $\Phi(x)$ -el tudunk tovább számolni.

$$P \left(\frac{\bar{\xi} - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < z \right) = 2\Phi(z) - 1 \Rightarrow \left[\bar{\xi} - z \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{\xi} + z \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right].$$

3. Normális eloszlás ismeretlen szórással (Student):

$E(\xi) = m$ -et becsüljük.

Mivel σ ismeretlen, ezért $\eta = \frac{\bar{\xi} - m}{\frac{s_n}{\sqrt{n}}}$ -et becsüljük

$$\tau = \frac{\bar{\xi} - m}{\frac{s_n}{\sqrt{n}}},$$

ahol s_n a korrigált empirikus szórás, τ a Student-féle t eloszlású $dof = n - 1$ szabadságfokkal - z helyét most t veszi át.

$$\Rightarrow \text{Konfidencia Intervallum} = \left[\bar{\xi} - t^{dof} \frac{s_n}{\sqrt{n}}, \bar{\xi} + t^{dof} \frac{s_n}{\sqrt{n}} \right]$$