Valszám tételek 2017.

Kidolgozta: Weber Áron

2017. december 17.

Tartalomjegyzék

A. Az A tételsor tételei

A.1. Eseménytér, σ-algebra

A.1.1. Definíció. *(Eseménytér) Adott* Ω *nemüres halmaz, ennek részhalmazai az események.*

A.1.2. Definíció. *(σ-algebra) Adott* $\mathcal{F}$*, mely* Ω *részhalmazainak egy rendszere,* σ*-algebra, ha:*

- *tartalmazza* Ω*-t* ($\Omega \in \mathcal{F}$),
- *zárt megszámlálható halmazok uniójára,*
- *zárt a különbségképzésre.*

Megjegyzés. $\mathcal{F}$ *elemeit ilyenkor eseményeknek nevezzük.*

A.2. Diszkrét valószínűségi változó eloszlása, eloszlásfüggvény (skalár eset)

A.2.1. Definíció. *(Diszkrét valószínűségi változó eloszlása) Adott* (Ω,$\mathcal{F}$,P) *valószínűségi mező fölötti* ξ *valószínűségi változó eloszlása* $Q_\xi(A) = P(\xi^-1\langle A \rangle) \in \mathbb{R}$.

A.2.2. Definíció. *(Valószínűségi változó eloszlásfüggvénye) Adott* (Ω,$\mathcal{F}$,P) *valószínűségi mező, valamint* ξ*:* $\Omega \to \mathbb{R}$ *valószínűségi változó. Ekkor* ξ *eloszlásfüggvénye* $F_\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$F_\xi(x) = P(\xi < x) = P(\{\omega \in \mathbb{R} \mid \xi(\omega) < x\}) = P(\xi^-1\langle] - \infty, x[\rangle) = Q_\xi(] - \infty, x[)$

A.2.1. Állítás. *(Az eloszlásfüggvény tulajdonságai)*

1. *Monoton nő, azaz* $\forall x_2 \geq x_1 \in \mathbb{R} - re$ $F_\xi(x_2) \geq F_\xi(x_1)$
2. $\lim_{x \to \infty} F_\xi(x) = 1$
3. $\lim_{x \to -\infty} F_\xi(x) = 0$
4. *Balról folytonos*

A.3. Függetlenség, feltételes valószínűség, teljes valószínűség tétele, Bayes-tétel

A.3.1. Definíció. *(Valószínűségi változók függetlensége) Adott* ($\mathcal{F}$,Ω,P) *valószínűségi mező esetén az* $A \in \mathcal{F}$ *és* $B \in \mathcal{F}$ *események függetlenek, ha*

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

A.3.2. Definíció. *(Feltételes valószínűség) Adott* $B \in \mathcal{F}$ *esemény, tfh.* $P(B) \neq 0$ *Ekkor az* $A \in \mathcal{F}$ *esemény feltételes valószínűsége* B *szerint*

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P_B(A)$$

A.3.3. Definíció. *(Független eseményrendszer) Az* $(A_k)_{1\leq k\leq n}, n \in \mathbb{N}^+$ *eseményrendszer független, ha* $\forall A_{i,j}$*-re* $P(A_i \cap A_j) = P(A_i) \cdot P(A_j)$*, azaz páronként függetlenek. Ekkor*

$$P(\bigcap_{k=1}^{n} A_k) = \prod_{k=1}^{n} P(A_k)$$

Megjegyzés. *Ez csak szükséges feltétele a függetlenségnek, vagyis ebből a tulajdonságból még nem következik a függetlenség ténye.*

A.3.4. Definíció. *(Teljes eseményrendszer) Az* $(A_k)_{1\leq k\leq n}, n \in \mathbb{N}^+$ *eseményrendszer teljes eseményrendszer, ha* $A_i \cap A_j = \emptyset \ \forall i \neq j$*-re és* $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$*, ahol* Ω *az eseménytér.*

A.1. Tétel. *(Teljes valószínűség tétele) Legyen* $(B_k)_{1\geq k}$ $n \in \mathbb{N}$ *teljes eseményrendszer,* $P(B_k) > 0$ $\forall k$*-ra. Ekkor*

$$P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(A \mid B_k) \cdot P(B_k)$$

, ahol A tetszőleges esemény.

Bizonyítás.

$$P(A) = P(A \cap \Omega) = P(A \cap (\bigcup_{i=1}^{n} B_i)) = P((A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup ... \cup (A \cap B_n))$$

Mivel az események diszjunktak, ez megegyezik az alábbival:

$$P(A\cap B_1)+P(A\cap B_2)+...+P(A\cap B_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{P(A \mid B_i)}{P(B_i)} = \sum_{i=1}^{n} P(A \mid B_i)\cdot P(B_i)$$

□

A.2. Tétel. *(Bayes-tétel) Tfh.* $B_1, B_2, ..., B_n$ *teljes eseményrendszer, és* $P(B_i) > 0$ $\forall i \in \mathbb{N} - re$*, valamint* $P(A) > 0$*. Ekkor* $\forall k \in \mathbb{N}$*-re*

$$P(B_k \mid A) = \frac{P(A \mid B_k) \cdot P(B_k)}{P(A)} = \frac{P(A \mid B_k)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(A \mid B_i) \cdot P(B_i)}$$

.

Bizonyítás. $P(A \mid B_k) = \frac{P(A\cap B_k)}{B_k}$, és $P(B_k \mid A) = \frac{P(B_k\cap A)}{P(A)} = \frac{P(A\cap B_k)}{P(A)}$. Ebből

$$P(A \mid B_k)\cdot P(B_k) = P(A\cap B_k) = P(B_k \mid A)\cdot P(A) \rightarrow P(B_k \mid A) = \frac{P(A \mid B_k) \cdot P(B_k)}{P(A)}$$

□

A.4. Binomiális és Poisson-eloszlás

A.4.1. Definíció. *(Binomiális eloszlású valószínűségi változó) A ξ val. változó (n,p) paraméterű binomiális eloszlású, ha $P(\xi = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$*

Példa. *Egy adott műtét p valószínűséggel halálos kimenetelű. Ekkor az n elvégzett műtét közül halállal végződőek száma binomiális eloszlású.*

A.4.1. Állítás. *(Binomiális eloszlású val. vált. eloszlásfüggvénye) Legyen $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, legyen n és p rögzítve. Ekkor*

$$F(x) := \begin{cases} 0 & ha\ x \leq 0 \\ \sum\limits_{m=0}^{k} \binom{n}{m} p^m (1-p)^{n-m} & ha\ k < x \leq k+1,\ ahol\ 0 \leq k \leq n \\ 1 & ha\ x > n \end{cases}$$

A.4.2. Definíció. *(Poisson-eloszlású valószínűségi változó) A ξ valószínűségi változó Poisson-eloszlású, λ paraméterrel, ha $P(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ $\lambda \in \mathbb{R}$*

Megjegyzés. *Poisson-eloszlásnál nincs megkötve a maximális száma a vizsgált dolgoknak, végtelen sok elemet vizsgálunk.*

A.4.2. Állítás. *(Poisson- és binomiális eloszlás kapcsolata) A Poisson-eloszlás jól közelíti (sőt, határértéke) a binomiális eloszlást(-nak), ha $n \to \infty$, és $np = \lambda (\to p = \frac{\lambda}{n})$ állandó.*

Bizonyítás.

$$P(\xi = k) = \binom{n}{k} \cdot (\frac{\lambda}{n})^k \cdot (1 - \frac{\lambda}{n})^{n-k} = \frac{n(n-1)(n-2) \cdot ... \cdot (n-k+1)}{k!} \cdot \frac{\lambda^k}{n^k} \cdot (1 - \frac{\lambda}{n})^{n-k} =$$

$$\frac{n(n-1)...(n-k+1)}{n^k} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \cdot (1 - \frac{\lambda}{n})^{n-k}$$

Ennek határértéke

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{n^k} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \cdot (1 - \frac{\lambda}{n})^{n-k} = \lim_{n \to \infty} \frac{\lambda^k}{k!} \cdot (1 - \frac{\lambda}{n})^{n-k}$$

mivel

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} \cdot ... \cdot \frac{n-k+1}{n} = \lim_{n \to \infty} 1 \cdot (1 - \frac{1}{n}) \cdot (1 - \frac{2}{n}) \cdot ... \cdot (1 - \frac{k+1}{n}) = 1$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\lambda^k}{k!} \cdot (1 - \frac{\lambda}{n})^{n-k} = \lim_{n \to \infty} \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \underbrace{(1 - \frac{\lambda}{n})^n}_{\to e^{-\lambda}} \cdot (1 - \frac{\lambda}{n})^{-k} = e^{-\lambda} \cdot \lim_{n \to \infty} \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \underbrace{(1 - \frac{\lambda^k}{n})^{-k}}_{\to 1} = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$$

□

A.5. Geometriai és hipergeometriai eloszlás

A.5.1. Definíció. *(Geometriai eloszlású valószínűségi változó) Adott ξ diszkrét valószínűségi változó p paraméterezésű geometriai eloszlású, ha $P(\xi = k) = (1-p)^{k-1} \cdot p$, ahol $\Omega = \mathbb{N}$ (a 0 ebben nincs benne), $k \neq 0$, $P(0) = 0$.*

Példa. *Cinkelt érmét dobálok, mely p valószínűséggel landol a fej oldalán. Ekkor ha a valószínűségi változóm azt jelzi, hanyadik dobásra kapok fejet, akkor az p paraméterű geometriai eloszlású lesz.*

A.3. Tétel. *(Geometriai eloszlás várható értéke) Adott ξ p paraméterű geometriai eloszlású valószínűségi változó várható értéke $E(\xi) = \frac{1}{p}$*

Bizonyítás.

$$E(\xi) = \sum_{j=1}^{\infty} j \cdot p \cdot (1-p)^{j-1} = p \sum_{j=1}^{\infty} j \cdot (1-p)^{j-1}$$

Mivel $\frac{d}{dx}\frac{1}{1-x} = \frac{d}{dx}\sum\limits_{n=0}^{\infty} \to \frac{1}{(1-x)^2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} nx^{n-1}$, ha $|x| < 1$ a hatványsorba fejtés miatt, ezért

$$p \sum_{j=1}^{\infty} j(1-p)^{j-1} = p\frac{1}{(1-(1-p))^2} = p\frac{1}{p^2} = \frac{1}{p}$$

$\square$

A.5.2. Definíció. *(Hipergeometriai eloszlású valószínűségi változó) Adott ξ diszkrét valószínűségi változó (N,K,n) paraméterezésű hipergeometriai eloszlású valószínűségi változó, ha $K \leq n \leq N$, $K, n, N \in \mathbb{N}$ esetén $P(\xi = k) = \frac{\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}$.*

Példa. *Elültetünk N darab tulipánhagymát, K darab sárgát és N-K darab pirosat, ezekből n darab hajt ki. Ha feltesszük, hogy a piros és sárga hagymák ugyanakkor valószínűséggel hajtanak ki, akkor annak a valószínűsége, hogy pontosan k darab sárga tulipán lesz a kihajtottak közt, binomiális eloszlású lesz.*

A.6. Diszkrét eloszlású valószínűségi változó várható értéke

A.6.1. Definíció. *(Várható érték) Legyen $(\Omega,\mathcal{F},P)$ valószínűségi mező, $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ valószínűségi változó. Ekkor ξ várható értéke (ha létezik)*

$$E(\xi) := \int_{\Omega} \xi dP$$

A.6.2. Definíció. *(Várható érték diszkrét esetben) Adott ξ egy valószínűségi mezőn értelmezett diszkrét eloszlású valószínűségi változó. ξ várható értéke ekkor (mivel az integrálás egy végtelen összegként is felfogható)*

$$E(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n P(\xi = xi_n)$$

azaz összeadjuk a val. változó összes lehetséges értékének és azok valószínűségének szorzatait.

A.4. Tétel. *(Binomiális eloszlás várható értéke) Adott ξ (n,p) paraméterű binomiális valószínűségi változó várható értéke $E(\xi) = np$*

Bizonyítás.

$$E(\xi)=\sum_{j=0}^{n} j\binom{n}{j}p^j(1-p)^{n-j}=\sum_{j=1}^{n} j\frac{n!}{j!(n-j)!}p^j(1-p)^{n-j}=\sum_{j=1}^{n}\frac{n!}{(j-n)!(n-j)!}p^j(1-p)^{n-j}$$

Használjuk az alábbi helyettesítést!

$$y:=j-1\to j=y+1, m:=n-1\to n=m+1$$

Ebből ha $j=1$, akkor $y=0$ és ha $j=n$ akkor $y=m$, valamint $n-j=m+1-y-1=m-y$. Így

$$\sum^{n} j=1\frac{n!}{(j-n)!(n-j)!}p^j(1-p)^{n-j}=\sum_{y=0}^{m}\frac{(m+1)!}{y!(m-y)!}p^{y+1}(1-p)^{m-y}=(m+1)p\sum_{y}^{m}\underbrace{\frac{m!}{y!(m-y)!}}_{\binom{m}{y}}p^y(1-p)^{m-y}$$

Vegyük észre, hogy a binomiális tételt kaptuk meg, így a szummában található kifejezés értéke 1. Mivel $m+1=n$, ezért

$$E(\xi)=(m+1)p\cdot 1=np$$

□

A.5. Tétel. *(Poisson-eloszlás várható értéke) Ha ξ Poisson-eloszlású valószínűségi változó λ paraméterrel, akkor*

$$E(\xi)=\lambda$$

Bizonyítás.

$$E(\xi)=\sum_{j=0}^{\infty}\xi_j P(\xi=\xi_j)=\sum_{j=0}^{\infty} j\frac{\lambda^j}{j!}e^{-\lambda}=\sum_{1}^{\infty} j\frac{\lambda^j}{j!}e^{-\lambda}=e^{-\lambda}\sum_{0}^{\infty}\frac{\lambda^{j+1}}{j!}=e^{-\lambda}\cdot\lambda\cdot\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\lambda^j}{j!}$$

Mivel $e^x=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$, ezért

$$e^{-\lambda}\cdot\lambda\cdot\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\lambda^j}{j!}=e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda}\cdot\lambda=\lambda$$

□

A.7. Valószínűségi változó eloszlása, folytonos eloszlású valószínűségi változók, sűrűségfüggvény

A.7.1. Definíció. *(Valószínűségi változó eloszlása) Adott $(\Omega,\mathcal{F},P)$ valószínűségi mező és ξ valószínűségi változó esetén ξ eloszlása $Q_\xi(A)=P(\xi^{-1}\langle A\rangle)\in\mathbb{R}$, ahol $A\subset B(\mathbb{R})$, azaz Borel-halmaz.*

A.6. Tétel. *(Radon-Nikodym-tétel) Adott $(\Omega,\mathcal{F})$ mérhető tér, $\mu_1,\nu_1:\mathcal{F}\to\mathbb{R}_+$ mértékek, s $\mu_1\ll\nu$. Ekkor $\exists! f:\Omega\to\mathbb{R}_+$ mérhető, és olyan, hogy $\forall A\in\mathcal{F}-re \mu_1(A)=\int_A f d\nu=\int_\Omega \chi_A f d\nu$*

A.7.2. Definíció. *(Folytonos eloszlású valószínűségi változó sűrűségfüggvénye)* *Ha ξ egy folytonos eloszlású valószínűségi változó, akkor a Radon-Nikodym-tétel alapján $\exists! f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mérhető függvény, melyre $\forall A \in B_{\mathbb{R}} : Q_\xi = \int_A f d\lambda_{\mathbb{R}}$. Ennek az f függvénynek a neve sűrűségfüggvény.*

A.7.1. Állítás. *(A sűrűségfüggvény tulajdonságai)*

1. $f \geq 0$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f d\lambda_{\mathbb{R}} = \int_{\mathbb{R}} f d\lambda_{\mathbb{R}} = Q(\mathbb{R}) = P(\xi^{-1}\langle\mathbb{R}\rangle) = 1$

A.7.2. Állítás. *Ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan, hogy*

- $\exists \int_{\mathbb{R}} f d\lambda$, *és ennek értéke 1*
- $f \geq 0$

akkor $\exists(\Omega, \mathcal{F}, P)$ valószínűségi mező, és ξ valószínűségi változó, melyekre $Q_\xi \ll \lambda$, és f ξ (illetve Q_ξ) sűrűségfüggvénye.

A.7.3. Állítás. *(Kapcsolat a sűrűség- és eloszlásfüggvény között) Adott ξ folytonos valószínűségi változó, és az $A =]-\infty; x]$ intervallum. Ekkor $Q_\xi(A) = P(\xi^{-1}\langle A\rangle) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = F_\xi(x)$*

A.7.4. Állítás. *(Folytonos valószínűségi változó intervallumba esésének valószínűsége) Adott ξ folytonos valószínűségi változó esetén*

$$P(x < \xi < y) = P(x \leq \xi < y) = P(x < \xi \leq y) = P(x \leq \xi \leq y) =$$
$$= F(y) - F(x) = \int_{-\infty}^{y} f_\xi(t)dt - \int_{-\infty}^{x} f_\xi(t)dt = \int_{x}^{y} f_\xi(t)dt$$

A.8. Várható érték folytonos valószínűségi változó esetén, exponenciális eloszlás és várható értéke

A.8.1. Állítás. *(Adott sűrűségfüggvényű folytonos val. változó várható értéke) Adott ξ folytonos eloszlású valószínűségi változó, s $f_\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a hozzá tartozó sűrűségfüggvény. Ekkor ξ várható értéke:*

$$E(\xi) = \int_\Omega \xi dP \underbrace{=}_{\text{mértéktartás}} \int_{\mathbb{R}} Id_{\mathbb{R}} dQ_\xi = \int_{\mathbb{R}} Id_{\mathbb{R}} \frac{dQ_\xi}{d\lambda} d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} x f_\xi(x)dx$$

ahol $\frac{dQ_\xi}{d\lambda}$ az ún. Radon-Nikodym-derivált.

A.8.1. Definíció. *(Exponenciális eloszlás) Legyen $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ valószínűségi mező, $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ valószínűségi változó. Ekkor ξ exponenciális eloszlású $\alpha > 0$ paraméterrel, ha folytonos eloszlású, és sűrűségfüggvénye*

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq 0 \\ \alpha e^{-\alpha x} & \text{egyébként} \end{cases}$$

A.8.2. Állítás. *Ez valóban egy sűrűségfüggvény.*

Bizonyítás. 1. $\alpha e^{-\alpha x} \geq 0$ teljesül

2. $\int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(x)dx = \int_0^\infty e^{-\alpha x}dx = \lim_{\omega\to\infty}(-e^{-\alpha x})\Big|_0^\omega = \lim_{\omega\to\infty} -e^{-\alpha\omega} - (-e^{-\alpha\cdot 0}) = e^0 = 1$

□

A.8.3. Állítás. *(Exponenciális eloszlás eloszlásfüggvénye) ξ exponenciális eloszlású val. változó eloszlásfüggvénye*

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0 & ha\ x \leq 0 \\ 1 - e^{-\alpha x} & ha\ x > 0 \end{cases}$$

Bizonyítás.

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} \alpha e^{-\alpha t}dt = \alpha(-\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha t})\Big|_0^x = -e^{-\alpha x} - (-1) = 1 - e^{-\alpha x}$$

□

A.8.4. Állítás. *(Örökifjú tulajdonság) Exponenciális eloszlású valószínűségi változóra $P(\xi \geq x + y \mid \xi \geq x) = P(\xi \leq y)$*

Bizonyítás.

$$P(\xi \geq x+y \mid \xi \geq x) = \frac{P(x \leq \xi \leq x+y)}{P(\xi \geq x)} = \frac{F_\xi(x+y) - F_x i(x)}{1 - F_x i(x)} = \frac{1 - e^{-\alpha(x+y)} - (1 - e^{-\alpha x}}{1 - (1 - e^{-\alpha x})} =$$

$$= \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\alpha(x+y)}}{e^{-\alpha x}} = 1 - e^{-\alpha y} = F_x i(y) = P(\xi \leq y)$$

□

A.8.5. Állítás. *(Exponenciális eloszlású valószínűségi változó várható értéke) Adott ξ α paraméterű exponenciális eloszlású folytonos val. változó várható értéke*

$$E(\xi) = \frac{1}{\alpha}$$

Bizonyítás.

$$E(\xi) = \int_{-\inf ty}^{\infty} x f_\xi(x)dx = \int_0^\infty x\alpha e^{-\alpha x}dx$$

Parciálisan integrálunk, $g = x, g' = 1, f' = \alpha e^{-\alpha x}, f = -e^{-\alpha x}$.

$$\int_0^\infty x\alpha e^{-\alpha x}dx = (xe^{-\alpha x})\Big|_0^\infty - \int_0^\infty (-e^{-\alpha x})dx = 0-0+(\frac{1}{-\alpha}e^{-\alpha x})\Big|_0^\infty = 0-(-\frac{1}{\alpha}) = \frac{1}{\alpha}$$

□

A.9. Normális és standard normális eloszlás

A.9.1. Definíció. *(Normális eloszlású val. változó) Adott* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *valószínűségi mező, és* $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ ξ (m, σ) *paraméterekkel* $(\sigma > 0)$ *rendelkező normális eloszlású valószínűségi változó, ha* ξ *folytonos eloszlású, és sűrűségfüggvénye* $f_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{(-x-m)^2 \frac{1}{2\sigma^2}}$.

A.9.2. Definíció. *(Standard normális eloszlás) Azt mondjuk, hogy* ξ *standard normális eloszlású valószínűségi változó, ha* ξ *normális eloszlású valószínűségi változó (0,1) paraméterekkel, (azaz* $m = 0$, $\sigma = 1$*). Ekkor* $f_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Eloszlásfüggvényét ekkor $\Phi(x)$ *jelöli,* $\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

A.9.1. Állítás. *(Normális és standard normális eloszlás közti kapcsolat) Ha* ξ *normális eloszlású* (m, σ) *paraméterezéssel, akkor* $F_\xi(x) = \Phi(\frac{x-m}{\sigma})$

Bizonyítás.

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-}{(t-m)^2} 2\sigma^2} dt$$

Legyen $t = \underbrace{m + \sigma z}_{y} \to z = \frac{t-m}{\sigma}, dt = \sigma dz \; t = x \Rightarrow z = \frac{x-m}{\sigma}$

Határok: $t \to -\infty \Rightarrow z \to -\infty$

$$\int_{-\infty}^{\frac{x-m}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{z^2}{2}} \sigma dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-m}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \Phi(\frac{x-m}{\sigma})$$

□

A.10. Szórás és kiszámítása. Csebisev egyenlőtlenség.

A.10.1. Definíció. *(Szórásnégyzet) Adott* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *valószínűségi mező, és* $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ *valószínűségi változó. Tegyük fel, hogy* $\exists E(\xi) < \infty$*. Ekkor* ξ *szórása* $\sigma^2(\xi) = E((\xi - E(\xi))^2)$

A.10.2. Definíció. *(Szórás)* ξ *szórása* $\sigma(\xi) = \sqrt{E((\xi - E(\xi))^2)}$

A.10.1. Állítás. *(Szórásnégyzet kiszámítása)* $\sigma^2(\xi) = E(\xi^2) - E^2(\xi)$

Bizonyítás.

$$\sigma^2(\xi) = E((\xi - E(\xi))(\xi - E(\xi))) = E(\xi^2 - 2E(\xi)\xi + E^2(\xi))$$

Mivel a várható érték egy integrál, ezért lineáris, azaz val. változók összegének várható értéke megegyezik a várható értékek összegével. Így

$$E(\xi^2 - 2E(\xi)\xi + E^2(\xi)) = E(\xi^2) - \underbrace{E(2E(\xi)\xi)}_{2E(\xi)E(\xi)} + E(\underbrace{E^2(\xi)}_{konstans}) = E(\xi^2) - 2E^(\xi) + E^2(\xi) = E(\xi^2) - E^2(\xi)$$

□

Példa. *Adott egy dobókocka (dk), k db oldallal. Legyen a* ξ *valószínűségi változó az, hogy hanyast dobtunk. A* ξ *várható értéke:* $E(\xi) = \sum_{i=1}^{k} i \cdot \frac{1}{k}$*, a* ξ^2 *várható* *értéke:* $E(\xi^2) = \sum_{i=1}^{k} i^2 \cdot \frac{1}{k}, E^2(\xi) = \sum_{i=1}^{k} i^2 \cdot \frac{1}{k^2}$. *Ekkor a szórásnégyzet* $\sigma^2 = E(\xi^2) - E^2(\xi) = \sum_{i=1}^{k} i^2 \cdot \frac{1}{k} - \sum_{i=1}^{k} i^2 \cdot \frac{1}{k^2} = \sum_{i=1}^{k} i^2 \cdot \frac{1}{k} - i^2 \cdot \frac{1}{k^2} = \sum_{i=1}^{k} i^2 \cdot \frac{k-1}{k^2} = \frac{k-1}{k^2} \sum_{i=1}^{k} i^2$

A.10.2. Állítás. *(A szórásnégyzet tulajdonságai)*

1. $\sigma^2(\xi) \geq 0$

   Bizonyítás. Ez tényleg triviális. $\square$

2. $\sigma^2(a\xi + b) = a^2\sigma^2(\xi)$ *(eltolva a szórás változatlan)*

   Bizonyítás. $E(((a\xi+b) - \underbrace{E(a\xi + b)}_{aE(\xi)+\underbrace{E(b)}_{b}}{}^2) = E((a\xi+b-aE(\xi)-b)^2) = E(a(\xi - E(\xi))^2) = a^2E((\xi - E(\xi))^2) = a^2\sigma^2(\xi)$ $\square$

A.7. Tétel. *(Csebisev-egyenlőtlenség) Adott* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *valószínűségi mező, és* $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ *valószínűségi változó, melyre* $\exists E(\xi) < \infty$. *Ekkor*

$$P(|\xi - E(\xi)| \geq \epsilon) \leq \frac{\sigma^2(\xi)}{\epsilon^2}$$

, ahol $\epsilon > 0$ *tetszőleges valós szám.*

Bizonyítás.

$$\{|\xi - E(\xi)| \geq \epsilon\} = \{\underbrace{|\xi - E(\xi)|^2}_{\geq 0} \geq \underbrace{\epsilon^2}_{>0}$$

Markov-egyenlőtlenség: $P(\xi \geq \epsilon) \leq \frac{E(\xi)}{\epsilon}$

Itt ez az alábbi alakot ölti:

$$P(\underbrace{|\xi - E(\xi)|^2}_{\text{Markov } \xi\text{-je}} \geq \epsilon^2) \leq \frac{\overbrace{E(|\xi - E(\xi)|^2)}^{\sigma^2}}{\epsilon^2}$$

$\square$

B. A B tételsor tételei

B.1. Mérhető terek

B.1.1. Definíció. *(Mérhető tér) Az* $(\Omega, \mathcal{F})$ *rendezett pár neve mérhető tér, ha* Ω *egy nemüres halmaz, és* $\mathcal{F} \subseteq 2^{\Omega}$ σ*-algebra.*

B.1.2. Definíció. *(Függvény mérhetősége) Adott* $(\Omega, \mathcal{F})$ *mérhető tér,* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *függvény. Azt mondjuk, hogy* f *mérhető, ha* $\forall B \in \underbrace{B(\mathbb{R})}_{\mathbb{R} \text{ fölötti Borel-halmazok}}$ *-re* $f^{-1}\langle B \rangle \in \mathcal{F}$, *ahol* $f^{-1}\langle B \rangle$ *a* B *halmaz* f *szerint ősképe, azaz* $f^{-1}\langle B \rangle = \{\omega \in \Omega \mid f(\omega) \in B\}$

Példa. $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega\}$, $f(A) = 0$; $f(B) = 1$

$B = \{1\} = [0;1] \cap [1;2]$

$f^{-1}\langle B\rangle = B \notin \mathcal{F}$, *de ha* $\mathcal{F} = \{\emptyset, A, B, \Omega\}$, *akkor* f *mérhető lesz.*

B.1.3. Definíció. *(Mérték) Adott* $\mu : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ *mérték, ha* $\forall A \in \mathcal{F}$*-re teljesülnek az alábbiak:*

1. $\mu(A) \geq 0$
2. $\mu(\emptyset) = 0$
3. $\forall (A_n) \subset \mathcal{F}$ *halmazsorozatra, amire* $A_i \cap A_j = \{\emptyset\}, i \neq j$ *(azaz elemei páronként diszjunktak) esetén* $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$ *(azaz* σ*-additív).*

B.1.4. Definíció. *(A-ra koncentrált Dirac-mérték)*

$$\mu_{BA} = \begin{cases} 1 & \text{, ha } A \in B \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

B.1.5. Definíció. *(Valószínűségi mérték) Adott* $(\Omega, \mathcal{F})$ *mérhető tér, és* $\mu : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ *mérték, melyre* $\mu(\Omega) = 1$ *Ekkor* μ *valószínűségi mérték (valószínűség), s ilyenkor P-vel jelöljük.*

B.1.1. Állítás. *(Valószínűségi mérték tulajdonságai)* $\forall A, B \in \mathcal{F}$*-re:*

1. $0 \leq P(A) \leq 1$
2. $A \subseteq B \to \begin{cases} P(A) \leq P(B) \\ P(B \setminus A) = P(B) - P(A) \end{cases}$
3. $P(A^c) = 1 - P(A)$, *ahol* A^c *az* A *komplementere.*
4. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

B.1.6. Definíció. *(Valószínűségi mező) Ha* $(\Omega, \mathcal{F})$ *mérhető tér, és* $P : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ *valószínűségi mérték, akkor* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *neve valószínűségi mező.*

B.1.7. Definíció. *(Valószínűségi változó) Legyen* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *valószínűségi mező.* $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ *mérhető függvény neve ekkor valószínűségi változó.*

B.2. Diszkrét valószínűségi változó várható értéke integrálként

B.2.1. Definíció. *(Indikátorfüggvény) Legyen* $A \in \mathcal{F}$*. Az* A *halmaz karakterisztikus (vagy indikátor-) függvénye* $\chi_A(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{ha } \omega \in \Omega \setminus A \\ 1 & \text{ha } \omega \in A \end{cases}$

$\chi_A : \Omega \to \{0; 1\}$

Megjegyzés. *Valószínűségszámításban általában indikátorfüggvénynek nevezzük.*

B.2.2. Definíció. *(Lépcsős függvény) Legyen* $n \in \mathbb{N}^+$, $(\lambda_k)_{1 \leq k \leq n}$ *egy* $\mathcal{F}$*-beli halmazrendszer. Ekkor* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *lépcsős függvény, ha* $f(\omega) = \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j \chi_{A_j}(\omega)$, *azaz indikátorfüggvények egy lineáris kombinációja.*

Megjegyzés. *A fenti definícióban az A halmazt az f függvény generátorhalmazának nevezzük.*

B.2.3. Definíció. *(Lépcsős függvény integrálja) Legyen $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ egy valószínűségi mező, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ lépcsős függvény, melyre $f(\omega) = \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j \chi_{A_j}(\omega)$, ahol $A_i \cap A_j = \{\emptyset\}$, ha $i \neq j$, és $\alpha_k \in \mathbb{R}$. Ekkor f Ω feletti, P mérték szerinti integrálja $\int_\Omega f dP = \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j P(A_j)$*

B.2.1. Állítás. *Legyen $f : \Omega \to \mathbb{R}^+$ pozitív, korlátos, mérhető függvény. Ekkor $\exists (f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ függvénysorozat, melyre:*

- *$\forall n \in \mathbb{N}$-re $f_n : \Omega \to \mathbb{R}^+$ lépcsős függvény*
- *$\forall n \in \mathbb{N}$-re és $\omega \in \Omega$-ra $f_n(\omega) \leq f_{n+1}(\omega)$, azaz (f_n) monoton növő rögzített ω esetén.*
- *$\forall \omega \in \Omega$-ra $\lim_{n \to \infty} f_n(\omega) = f(\omega)$*

B.2.4. Definíció. *(Várható érték) Legyen $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ egy valószínűségi mező, $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ valószínűségi változó (megj.: ξ mérhető). Ekkor a ξ várható értéke (ha létezik) $E(\xi) = \int_\Omega \xi dP$*

B.2.2. Állítás. *Ha ξ valószínűségi változó diszkrét, akkor várható értéke: $E(\xi) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \xi_n P(\xi = \xi_n)$*

B.1. Tétel. *(Markov-egyenlőtlenség) Adott $\xi \geq 0$ valószínűségi változó, és $\epsilon > 0$ tetszőleges valós szám. Ekkor*

$$P(\xi \geq \epsilon) \leq \frac{E(\xi)}{\epsilon}$$

Bizonyítás.

$$E(\xi) = \int_\Omega \xi dP \geq \int_{\{\xi \geq \epsilon\}} \xi dP \geq \int_{\{\xi \geq \epsilon\}} \epsilon dP = \epsilon \int_{\{\xi \geq \epsilon\}} 1 dP = \epsilon P(\xi \geq \epsilon) \to P(\xi \geq \epsilon) \leq \frac{E(\xi)}{\epsilon}$$

□

B.3. Lebesgue mérték, mértékek abszolút folytonossága és szingularitása, Radon-Nikodym tétel

B.3.1. Definíció. *(Lebesgue-féle külső mérték) $\overline{\lambda}(A) = Inf \left\{ \sum\limits_{n=0}^{\infty} \lambda(I_n) \mid A \subseteq \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} I_n, \text{ ahol } I_n \text{intervallum} \right\}$, ahol $\lambda(I_n)$ az I_n intervallum hossza, és $A \subseteq \mathbb{R}$*

Megjegyzés. *A felírásában véges sok intervallum is lehet.*

B.3.1. Állítás. *Ha $A \subseteq \mathbb{R}$ és megszámlálhatóan sok elemet tartalmaz, akkor $\overline{\lambda}(A) = 0$*

B.3.2. Definíció. *(Mértékek abszolút folytonossága) Ha $\mu_1, \mu_2 : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ mértékek, akkor azt mondjuk, hogy μ_1 abszolút folytonos μ_2-re nézve ($\mu_1 \ll \mu_2$), ha $\forall A \in \mathcal{F}$-re ha $\mu_2(A) = 0$, akkor $\mu_1(A) = 0$*

B.3.2. Állítás. *Az abszolút folytonosság reflexív és tranzitív reláció.*

B.3.3. Definíció. *(Mértékek szingularitása) Legyenek $\mu_1, \mu_2 : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ mértékek. Azt mondjuk, hogy μ_1 szinguláris μ_2-re nézve ($\mu_1 \perp \mu_2$), ha $\exists \Omega_1, \Omega_2$, $\Omega_1 \cup \Omega_2 = \Omega$, $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \Omega$. Ez akkor igaz, ha $\mu_1(\Omega_1) = 0$ és $\mu_2(\Omega_2) = 0$.*

B.3.3. Állítás. *A szingularitás szimmetrikus reláció.*

B.2. Tétel. *(Radon-Nikodym-tétel) Adott $(\Omega, \mathcal{F})$ mérhető tér, $\mu_1, \nu : \mathcal{F} \to \mathbb{R}_+$ mértékek, melyekre $\mu_1 \perp \nu$. Ekkor $\exists!$ $f : \Omega \to \mathbb{R}_+$ mérhető függvény, melyre $\forall A \in \mathcal{F}$-re $\mu_1(A) = \int_A f d\nu = \int_\Omega \chi_A \cdot f d\nu$.*

B.4. Független valószínűségi változók

B.4.1. Definíció. *(Halmaz által generált σ-algebra) Adott Ω eseménytér, $\mathcal{H} \subseteq 2^\Omega$. Ekkor $\exists$ legszűkebb σ-algebra Ω felett, mely tartalmazza $\mathcal{H}$-t, s ennek neve a $\mathcal{H}$ által generált σ-algebra.*

B.4.2. Definíció. *(Valószínűségi változó által generált σ-algebra) Legyen Ω eseménytér, és $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ egy valószínűségi változó. Ekkor a ξ által generált σ-algebra ($\mathcal{F}_\xi$) a $\xi^{-1}\langle B \rangle$ halmazok álal generált σ-algebra, ahol $B \in B(\mathbb{R})$ Borel-halmaz*

B.4.3. Definíció. *(Valószínűségi változók függetlensége) A $\xi, \eta : \Omega \to \mathbb{R}$ valószínűségi változók függetlenek, ha $\forall \mathcal{F}_\xi$-beli és $\forall \mathcal{F}_\eta$-beli eseményrendszerekből vett események függetlenek, azaz $\forall i, j \in \mathbb{N}$-re A_i és B_j függetlenek.*

B.3. Tétel. *(Független valószínűségi változók szorzatának várható értéke) Adottak ξ, η független valószínűségi változók. Ekkor*

$$E(\xi\eta) = E(\xi) \cdot E(\eta)$$

B.4. Tétel. *(Független valószínűségi változók összegének szórása) ξ, η független valószínűségi változókra*

$$\sigma^2(\xi + \eta) = \sigma^2(\xi) + \sigma^2(\eta)$$

Bizonyítás. Tudjuk, hogy $\sigma^2(\xi) = E(\xi^2) - E^2(\xi)$. Ebből

$$\sigma^2(\xi + \eta) = E((\xi + \eta)^2) - (E(\xi + \eta))^2 = E(\xi^2 + 2\xi\eta + \eta^2) - E(\xi + \eta)E(\xi + \eta) =$$

$$= E(\xi^2) + \underbrace{2E(\xi\eta)}_{2E(\xi)E(\eta)} + E(\eta^2) - (E(\xi)E(\xi) + E(\xi)E(\eta) + E(\eta)E(\xi) + E(\eta)E(\eta)) =$$

$$= E(\xi^2) - E^2(\xi) + E(\eta^2) - E^2(\eta) + 2E(\xi)E(\eta) - 2E(\xi)E(\eta) = E(\xi^2) - E^2(\xi) + E(\eta^2) - E^2(\eta) = \sigma^2(\xi) + \sigma^2(\eta)$$

□

B.4.1. Állítás. *(Független vektorértékű valószínűségi változók együttes eloszlása, eloszlásfüggvénye) Legyen $\xi : \Omega \to \mathbb{R}^k$ valószínűségi változó, $\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ . \\ . \\ . \\ \xi_k \end{pmatrix}$. Ekkor* *az együttes eloszlás:* $Q_\xi = \prod_{i=1}^{k} Q_{\xi_i}$*, az együttes eloszlásfüggvény adott* $t = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ . \\ . \\ . \\ t_k \end{pmatrix}$ *pontban:* $F(t) = \prod_{j=1}^{k} F_{\xi_j}(t_j)$*, azaz a marginálisok (peremeloszlások) szorzata (ez szükséges és elégséges feltétele a függetlenségnek).*

B.5. Vektorértékű valószínűségi változók

B.5.1. Definíció. *(Többdimenziós valószínűségi változó)* $\xi : \Omega \to \mathbb{R}^k$ *vektorértékű valószínűségi változó, ha* $\xi(\omega) = \begin{pmatrix} \xi_1(\omega) \\ \xi_2(\omega) \\ . \\ . \\ . \\ \xi_k(\omega) \end{pmatrix}$*, ahol* $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_k$ *valószínűségi változók,* $\omega \in \Omega$, $\xi_i \in \mathbb{R}$

B.5.2. Definíció. *(Vektorértékű valószínűségi változó eloszlásfüggvénye) Adott* $\xi = (\xi_1, ...\xi_k)$ *valószínűségi változó. Ekkor eloszlásfüggvénye:* $F_\xi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$*,*$F_\xi(t) = P(\xi^{-1}\langle \prod_{j=1}^{k}]-\infty; t_j[\rangle)$*, ahol* $t \in \mathbb{R}^k, t = (t_1, t_2, ..., t_k)$*, s a produktum alatt halmazok Descartes-szorzatát értjük.*

B.5.1. Állítás. *(Többdimenziós eloszlásfüggvény tulajdonságai) Adott* $F_xi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ *ekkor az alábbi állítások teljesülnek:*

- $\lim_{t_i \to -\infty} F_\xi(t) = 0$*, ahol* $0 < i \leq k$ *tetszőleges.*
- $\lim_{(t_1, t_2, ..., t_k) \to (\infty, \infty, ..., \infty)} F_\xi(t) = 1$.
- *Minden változóban monoton nő, azaz ha* $x_i^* \leq x_i^{**}$*, akkor* $F_\xi(x_1, ..., x_i^*, ..., x_k) \leq F_\xi(x1, ..., x_i^{**}, ..., x_k)$.
- *Minden változójában balról folytonos.*
- $\forall \underline{a}, \underline{b} \in \mathbb{R}^k$*-ra ha* $\underline{a} < \underline{b}$ *(minden koordinátájában), akkor* $\sum_{\epsilon \in \{0;1\}^k} (-1)^{|\epsilon|} F_\xi(\underline{a}\epsilon + \underline{b}(\underline{1} - \epsilon))$*, ahol* ϵ *egy nullákból és egyesekből álló vektor,* $|\epsilon|$ *pedig a benne levő egyesek száma, s a vektorokat koordinátánként szorozzuk össze egymással.*

B.5.2. Állítás. *(Kétdimenziós valószínűségi változó marginálisai) Adott* $\xi(\eta, \gamma) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ *valószínűségi változó, melyre* $Q_xi \ll \lambda_{\mathbb{R}^2}$*, azaz folytonos eloszlású, sűrűségfüggvénye pedig* $f_{(\eta,\gamma)}$*. Ekkor a peremsűrűség-függvények:* $f_\eta(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{(\eta,\gamma)}(x, y)dy$*, valamint* $f_\gamma(y) = \int_{\mathbb{R}} f_{(\eta,\gamma)}(x, y)dx$.

B.5.3. Állítás. *(Folytonos vektoriális valváltozó marginálisai, független komponens valváltozók esetén) Ha* $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_k$ *koordináta valószínűségi változók függetlenek, akkor (és csak akkor)* $\prod_{j=1}^{k} f_{\xi_j}(t_j) = f_\xi(t_1, ..., t_k)$*, ahol* f_{ξ_j} *marginális,* f_ξ *az együttes sűrűségfüggvény, és* $t = (t_1, t_2, ..., t_k) \in \mathbb{R}^k$.

B.5.4. Állítás. *(Téglalapba esés valószínűsége, folytonos eset) Adott* $\xi(\eta, \gamma)$ *folytonos valószínűségi változó, melynek együttes sűrűségfüggvénye* $f_\xi(x, y)$, *valamint egy* $A \subset \mathbb{R}^2$, $A = I \times J$, $I, J \subset \mathbb{R}$, $I = [x1, x2]$, $J = [y1, y2]$ *téglalap. Ekkor az A téglalapba esés valószínűsége* $P(\eta \in I, \gamma \in J) = \int_A f_\xi(x, y) d(x, y) = \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} f_\xi(x, y) dx dy$

B.6. Kovariancia, korreláció

B.6.1. Definíció. *(Valószínűségi változók kovarianciája) Legyenek* ξ *és* η *valószínűségi változók, melyekre feltesszük, hogy* $\exists \sigma^2(\xi)$ *és* $\sigma^2(\eta)$. *Ekkor* ξ *és* η *kovarianciája a* $\beta = (\xi - E(\xi))(\eta - E(\eta))$ *valószínűségi változó várható értéke, azaz* $cov(\xi, \eta) = E((\xi - E(\xi))(\eta - E(\eta))$.

B.6.1. Állítás. *(A kovariancia tulajdonságai)*

- $cov(\xi, \xi) = \sigma^2(\xi)$
- $cov(\xi, \eta) = cov(\eta, \xi)$
- $\forall a \in \mathbb{R}$*-re* $cov(a\xi, \eta) = acov(\xi, \eta)$
- $cov(\xi + \eta, \gamma) = cov(\xi, \gamma) + cov(\eta, \gamma)$

B.6.2. Állítás. $cov(\xi, \eta) = E(\xi\eta) - E(\xi)E(\eta)$

Bizonyítás. $E((\xi - E(\xi))(\eta - E(\eta))) = E(\xi\eta - E(\xi)\eta - E(\eta)\xi + E(\xi)E(\eta)) = E(\xi\eta) - E(\xi)E(\eta) - E(\eta)E(\xi) + E(\xi)E(\eta) = E(\xi\eta) - E(\xi)E(\eta)$ □

B.6.3. Állítás. *Független valószínűségi változók kovarianciája zérus.*

Bizonyítás. ξ, η függetlenek, ezért $E(\xi\eta) = E(\xi)E(\eta)$, ezt a fenti képletbe helyettesítve tényleg 0-t kapunk. □

B.6.4. Állítás. *(Diszkrét valószínűségi változók kovarianciája)* $cov(\xi, \eta) = \sum\limits_i \sum\limits_j x_i \cdot y_j (P(\xi = x_i, \eta = y_j)) - (\sum\limits_i x_i P(\xi = x_i))(\sum\limits_j y_j P(\eta = y_j))$

B.6.5. Állítás. *(Folytonos valószínűségi változók kovarianciája)* $cov(\xi, \eta) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} xy f_{\xi,\eta}(x, y) dx dy - \int\limits_{-\infty}^{\infty} x f_x i(x) dx \cdot \int\limits_{-\infty}^{\infty} y f_e ta(y) dy$

B.6.2. Definíció. *(Kovarianciamátrix) Adottak* ξ, η *valószínűségi változók,* $E(\xi^2) < \infty$, $E(\eta^2) < \infty$. *Kovarianciamátrixuk ekkor:*

$$\Sigma \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma^2(\xi) & cov(\xi, \eta) \\ cov(\eta, \xi) & \sigma^2(\eta) \end{bmatrix}$$

B.6.6. Állítás. *Kovarianciamátrix mindig szimmetrikus és pozitív szemidefinit.*

B.6.3. Definíció. *(Valószínűségi változó standardizáltja) Adott* ξ *valószínűségi változó standardizáltja a* $\hat{x}i = \frac{\xi - E(\xi)}{\sigma(\xi)}$ *valószínűségi változó, melyre* $E(\hat{\xi}) = 0, \sigma^2(\hat{\xi}) = 1$

B.6.4. Definíció. *(Valószínűségi változók korrelációja) Adott* ξ, η *valószínűségi változók korrelációja* $corr(\xi,\eta) = \frac{cov(\xi,\eta)}{\sigma(\xi)\sigma(\eta)}$, *azaz gyakorlatilag a standardizáltjuk kovarianciája.*

B.6.5. Definíció. ξ *és* η *korrelálatlanok, ha kovarianciájuk zérus.*

B.6.7. Állítás. *(A korreláció tulajdonságai)*

- $-1 < corr(\xi,\eta) < 1$
- *Ha* ξ *és* η *függetlenek, akkor korrelálatlanok, azaz* $corr(\xi,\eta) = 0$

B.7. Valószínűségi változók transzformáltjai

B.7.1. Állítás. *(Diszkrét valószínűségi változó transzformáltjának eloszlása) Adott a* ξ *valószínűségi változó, lehetséges értékei* $x_1, x_2, ...$, *az ezekhez tartozó valószínűségek* $p_1, p_2, ...$, *valamint az* $\eta = h(\xi)$ *valószínűségi változó, ahol* $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *valós függvény. Ekkor* η *lehetséges értékei:* $h(x_1), h(x_2), ...$, *és* $P(\eta = y_k) = \sum\limits_{h(x_i)=y_k} P(\xi = x_i) = \sum\limits_{h(x_i)=y_k} P_i$, *azaz* ξ *összes olyan lehetséges értékéhez tartozó valószínűségek összege, melyet a h függvény az* η *vizsgált értékébe képez.*

B.7.2. Állítás. *Ha h szigorú monoton (ezáltal injektív), akkor az* η $y_k = h(x_k)$ *értékeihez tartozó eloszlás megegyezik a* ξ *eloszlásával.*

B.7.3. Állítás. *(Folytonos valószínűségi változó transzformáltjának sűrűségfüggvénye) Tegyük fel, hogy h(x) szigorú monoton és differenciálható függvény, továbbá hogy* ξ *folytonos eloszlású valószínűségi változó, melynek sűrűségfüggvénye f(x). Ekkor az* $\eta = h(\xi)$ *transzformált valószínűségi változó sűrűségfüggvénye*

$$g(y) = f(h^{-1}(y)) \cdot \left| \frac{\partial h^{-1}(y)}{\partial y} \right|$$

.

Bizonyítás. 1. Tegyük fel, hogy g szigorúan monoton növekvő függvény. Ekkor $\{\eta < y\} = \{h(\xi) < y\} \underbrace{=}_{\text{Szig. mon. nő}} \left\{\xi < h^{-1}(y)\right\}$, valamint

$$\{\eta < y\} = \{\omega \in \Omega \mid \eta(\omega) < y\} = \underbrace{\{\omega \in \Omega \mid h(\xi(\omega)) < y\}}_{\{\omega\in\Omega|\xi(\omega)<h^{-1}(y)\}}$$

η eloszlásfüggvénye ekkor $G(y) = P(\eta < y) = P(h(\xi) < y) = P(\xi < h^{-1}(y)) = F(h^{-1}(y))$, ahol F ξ eloszlásfüggvénye.

Ebből η sűrűségfüggvénye

$$g(y) = G'(y) = \frac{\partial F(h^{-1}(y))}{\partial y} = f(h^{-1}(y)) \cdot \underbrace{\frac{\partial h^{-1}(y)}{\partial y}}_{>0\text{, mert h szig. mon. nő}}$$

2. Tegyük fel, hogy g szigorúan monoton fogyó. Ekkor $\{\eta < y\} = \{h(\xi) < y\} = \left\{\xi > h^{-1}(y)\right\}$, valamint

$$\{\eta < y\} = \left\{\omega \in \Omega \mid \xi(\omega) > h^{-1}(y)\right\}$$

η eloszlásfüggvénye ekkor $G(x) = P(\eta < y) = P(h(\xi) > y) =$
$P(\xi > h^{-1}(y)) = 1 - P(\xi < h^{-1}(y)) = 1 - F(h^{-1}(y))$
Ebből η sűrűségfüggvénye

$$g(y) = G'(y) = \frac{\partial 1 - F(h^{-1}(y)}{\partial y} = -f(h^{-1}(y)) \cdot \underbrace{\frac{\partial h^{-1}(y)}{\partial y}}_{<0}$$

□

Példa. *(Lineáris transzformáció)* $\eta = a\xi + b$, *ξ sűrűségfüggvénye* $f(x)$, $y = ax + b \Rightarrow x = \frac{y-b}{a}$, $x' = \frac{1}{a}$ *Ebből η sűrűségfüggvénye* $g(y) = f(\frac{y-b}{a}) \cdot \frac{1}{|a|}$.

B.8. Feltételes eloszlás

B.8.1. Definíció. *(Feltételes eloszlásfüggvény) Legyen* $\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$ *egy diszkrét eloszlású vektorértékű valószínűségi változó, ξ lehetséges értékei* $x_1, x_2, ...$, *η lehetséges értékei* $y_1, y_2, ...$ *A ξ valószínűségi változó $y_i < \eta < y_j$ feltétel melletti feltételes eloszlásfüggvénye* $F^*(x \mid y_i < \eta < y_j) = P(\xi < x \mid y_i < \eta < y_j)$.

B.8.1. Állítás. *Legyen a* $\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$ *egy diszkrét eloszlású vektorértékű valószínűségi változó, melynek együttes eloszlásfüggvénye $F(x, y)$, és legyen η perem-eloszlásfüggvénye* $F_\eta(y) = \lim\limits_{x \to \infty} F(x, y)$.

Ekkor ha feltesszük, hogy $F_\eta(y_j) \neq F_\eta(y_i)$, akkor a ξ $y_i < \eta < y_j$ feltétel melletti feltételes eloszlásfüggvénye az alábbi módon írható fel:

$$F^*(x \mid y_i < \eta < y_j) = \frac{F(x, y_j) - F(x, y_i)}{F_\eta(y_j) - F_\eta(y_i)}$$

Bizonyítás. (Vázlat) Tudjuk, hogy $P(\xi < x_i, y_i < \eta < y_j) = F(x, y_i) - F(x, y_j)$. Másfelől pedig $F^*(x \mid y_i < \eta < y_j) = P(\xi < x \mid y_i < \eta < y_j) = \frac{P(\xi < x, y_i < \eta < y_j}{P(y_i < \eta < y_j)} = \frac{F(x, y_j) - F(x, y_i)}{F_\eta(y_j) - F_\eta(y_i)}$ □

B.8.2. Definíció. *(Folytonos val. változó feltételes eloszlásfüggvénye) Adottak ξ és η folytonos valószínűségi változók. A ξ $\eta = z$ feltétel melletti feltételes eloszlásüggvénye* $F^*(x \mid \eta = z) = \lim\limits_{h \to 0} P(\xi < x, z < \eta < z + h)$, *amennyiben ez a határérték létezik.*

B.8.3. Definíció. *(Folytonos valószínűségi változó feltételes sűrűségfüggvénye) ξ folytonos valószínűségi változónak az $\eta = z$ feltétel melletti feltételes sűrűségfüggvénye* $f_{\xi|\eta} = \frac{f_{(\xi,\eta)}(x,z)}{f_\eta(z)}$

B.8.4. Definíció. *(Feltételes várható érték) A ξ folytonos valószínűségi változó $\eta = z$ feltétel melletti feltételes várható értéke* $E(\xi \mid \eta = z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x f_{(\xi, \eta = z)}(x) dx$.

B.8.5. Definíció. *(Regressziós függvény) A ξ val. változó η-ra vonatkoztatott regressziós függvénye az* $r(z) = E(\xi \mid \eta = z)$.

B.9. L^p-terek

B.9.1. Definíció. *(Valószínűségi változók majdnem mindenhol egyenlősége) A $\xi, \eta : \Omega \to \mathbb{R}$ valószínűségi változók egy valószínűséggel megegyeznek (avagy P szerint majdnem mindenütt megegyeznek), ha $P(H) = 1$ egy adott $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ valószínűségi mezőn, ahol $H = [\xi = \eta] = \{\omega \in \Omega \mid \xi(\omega = \eta(\omega)\}$.*

B.9.2. Definíció. *($\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}$) Legyen $p \in [1; \infty[$ véges.*

Ekkor $\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{F}, P) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} \mid f \text{ mérhető, } \int\limits_{\Omega} |f|^p dP < \infty \right\}$

$\mathcal{L}^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} \mid f \text{ mérhető , s } f \text{ } P \text{ szerint majdnem mindenhol korlátos}\}$

B.9.3. Definíció. *(Norma $\mathcal{L}^p$-n) Adott $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ valószínűségi mező, $p \in [1; \infty]$, $f \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Ekkor*

$$\|f\|_p = \begin{cases} (\int\limits_{\Omega} |f|^p dP)^{\frac{1}{p}} & \text{ha } p \text{ véges} \\ \sup\limits_{\omega \in \Omega \setminus A} |f(\omega)| & \text{ha } p = \infty, \text{ és } f \text{ } A\text{-n kívül korlátos, valamint } P(A) = 0 \end{cases}$$

B.9.4. Definíció. *(f ekvivalenciaosztálya p szerint)*

$$\dot{f} = \{h : \Omega \to \mathbb{R} \mid h \text{ mérhető, és } h\text{=}f \text{ } P \text{ szerint majdnem mindenhol}\}$$

B.9.5. Definíció. *(L^p-tér)*

$$L^p_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{F}, P) = \left\{ \dot{f} \mid f : \Omega \to \mathbb{R}, \ f \text{ mérhető, és } \int\limits_{\Omega} |f|^p dP < \infty \right\}$$

B.9.6. Definíció. *(P szerint majdnem mindenütt egyenletes konvergencia) Adott $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ L^p-beli függvénysorozat P szerint majdnem mindenütt egyenletesen konvergens, és határértéke az f függvény, ha $(f_n - f) \in L^p$ $\forall n$-re, és $\lim\limits_{n \to \infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$.*

B.9.7. Definíció. *(1 valószínűséggel konvergencia) Adott $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ L^p-beli függvénysorozat P szerint majdnem mindenütt konvergens, és határértéke az f függvény, ha $\exists A :$ $P(A) = 1$, és $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(\omega) = f(\omega)$ $\forall \omega \in A$-ra.*

B.9.8. Definíció. *(L^p-ben való konvergencia) Adott $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ L^p-beli függvénysorozat L^p-ben ($p \in [1; \infty[$ konvergens, és határértéke az f függvény, ha $\lim\limits_{n \to \infty} \|f_n - f\|_p = 0$.*

Adott $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ valószínűségi mező, $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ valószínűségi változó, és $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \Omega$ valószínűségiváltozó-sorozat.

B.9.9. Definíció. *(Sztochasztikus konvergencia) Azt mondjuk, hogy ξ_n tart a ξ-be sztochasztikusan, ha $\lim\limits_{n \to \infty} P(|\xi_n - \xi| > \epsilon) = 0$ $\forall \epsilon > 0$-ra, azaz $\lim\limits_{n \to \infty} P(\{\omega \in \Omega \mid |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| > \epsilon)\} = 0$.*

B.9.10. Definíció. *(Eloszlásbeli konvergencia) Azt mondjuk, hogy ξ_n tart a ξ-be eloszlásában, ha $\lim\limits_{n \to \infty} F_{\xi_n}(x) = F_\xi(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$-re, azaz $\lim\limits_{n \to \infty} P(\xi_n < x) = P(\xi < x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$-re, melyekre az $x \mapsto P(\xi < x)$ hozzárendelés egy folytonos függvény.*

B.9.1. Állítás. *(Összefüggés a konvergenciatípusok közt)*

Majdnem mindenütt egyenletes $\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{1 valószínűséggeli} \\ L^p\text{-beli} \end{array} \right\} \rightarrow$ *Sztochasztikus* $\rightarrow$ *Eloszlásbeli*

Bizonyítás.

1. Majdnem mindenütt egyenletes $\rightarrow$ L^p-beli

   Azt kell belátni, hogy $\|f_n - f\|_p \rightarrow 0 \leftrightarrow (\int\limits_\Omega |f_n - f|^p dP)^{\frac{1}{p}} \rightarrow 0 \leftrightarrow \int\limits_\Omega |f_n - f|^p dP \rightarrow 0$

   $\|f_n - f\|_\infty = \sup |f_n - f|$

   $|f_n - f| \leq \sup |f_n - f|$

   Ebből $\int\limits_\Omega |f_n - f|^p dP \leq \int\limits_\Omega \|f_n - f\|_\infty^p dP$, az egyenlőtlenség jobb oldalában szereplő $\|f_n - f\|_\infty^p$ a feltételeink miatt tart a 0-ba, így az integrál is tart a 0-ba.

   Ebből a majoráns kritérium miatt $\int\limits_\Omega |f_n - f|^p dP \rightarrow 0$.

   Azaz azt kaptuk, hogy $\int\limits_\Omega |f_n - f|^p dP \leq \underbrace{\|f_n - f\|_\infty^p}_{\rightarrow 0} \underbrace{\int\limits_\Omega 1 dP}_{=1}$

2. Sztochasztikus $\rightarrow$ eloszlásbeli

   Tudjuk, hogy $\|\xi_n - \xi\|_p \rightarrow 0$.

   Azt kell belátni, hogy $P(|\xi_n - \xi| > \epsilon) \rightarrow 0$.

   $\lim\limits_{n\to\infty} (\int\limits_\Omega |\xi_n - \xi|^p dP)^{\frac{1}{p}} = 0 \leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_\Omega |\xi_n - \xi|^p dP =$, ami megyegyezik $E(|\xi_n - \xi|^p)$-nel.

   Tudjuk továbbá, hogy $P(|\xi_n - \xi| > \epsilon) = P(|\xi_n - \xi|^p > \epsilon^p)$

   Ebből a Markov-egyenlőtlenség alapján $P(|\xi_n - \xi|^p > \epsilon^p) \leq \frac{E(|\xi_n - \xi|^p)}{\epsilon^p}$

   $P(|\xi_n - \xi|^p > \epsilon^p) \leq \frac{\|\xi_n - \xi\|_p}{\epsilon^p}$, amiről tudjuk, hogy tart a 0-ba, így a hányados is.

3. 1 valószínűséggeli $\rightarrow$ sztochasztikus

   Azt kell belátnunk, hogy $P(\{\omega \in \Omega \mid |\xi_n - \xi| > \epsilon\}) \rightarrow 0$.

   Tegyük fel, hogy $\exists \epsilon > 0$, melyre $P(|\xi_n - \xi| > \epsilon)$ nem tart 0-ba. Emiatt $\exists \delta > 0$, melyre $a_n := P(|\xi_n - \xi| > \epsilon) \geq \delta > 0$ végtelen sok n-re. Ebből kifolyólag $\exists (\xi_{k_n})_{n \in \mathbb{N}})$ olyan részsorozat, melyre $P(\{|\xi_{k_n} - \xi| > \epsilon\}) \geq \delta$, s ez $\forall n \in \mathbb{N}$-re igaz.

   Azonban az eredeti feltevésből ($\xi_n \rightarrow \xi$ 1 valószínűséggel) adódik, hogy ξ_{k_n} tart xi-be, 1 valószínűséggel.

   Így $\{\omega \in \Omega \mid |\xi_{k_n}| > \epsilon\} \subseteq \{\omega \in \Omega \mid \xi_{k_n}(\omega) \not\rightarrow \xi(\omega)\}$

   A jobb oldalon szereplő halmaz mértéke 0, a majdnem mindenütti konvergenica miatt. Azonban feltettük, hogy $\delta > 0$, ami a bal oldali halmaz egy mértéke. Ellentmondásra jutottunk, így a feltevésünk, hogy $\exists \epsilon > 0$, melyre $P(|\xi_n - \xi| > \epsilon) \not\rightarrow 0$.

$\square$

B.5. Tétel. *(Centrális határeloszlás-tétel) Legyenek $\xi_1, \xi_2, ...$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók, melyekre $\sigma^2(\xi_i) < \infty$, $i \in \mathbb{N}$. Ekkor*

$$\frac{\sum\limits_{j=1}^{n} \xi_j - nE(\xi_1)}{\sqrt{n}\sigma(\xi_1)} \to N(0,1)$$

ahol N(0,1) egy standard normális eloszlású valószínűségi változó.

B.6. Tétel. *(de Moivre-Laplace-tétel) Adottak $(\xi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ valószínűségi változók, melyek függetlenek, lehetséges értékeik -1 és 1, valamint $P(\xi_j = 1) = P(\xi_j = -1) = \frac{1}{2}$, továbbá legyen $S_n = \sum\limits_{j=1}^{n} \xi_j$.*

Ekkor $P(\frac{S_n}{\sqrt{n}} < b) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{b} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$, ugyanis $E(\xi_1) = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot (-1) = 0$, $E(\xi_1^2) = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1 = 1$, $E^2(\xi_1) = 0^2$, ezért $\sigma(\xi_1) = \sqrt{E(\xi_1^2) - E^2(\xi_1)} = 1$-

B.10. Statisztika

B.10.1. Definíció. *(Statisztikai függvény/statisztika) Adott $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ mintavételi változók egy függvénye.*

B.10.2. Definíció. *(Középérték) $\overline{\xi} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \xi_i}{n}$*

B.10.3. Definíció. *(Empirikus szórás) Az átlagtól való négyzetes eltérések átlagának négyzetgyöke a minta empirikus szórása, azaz*

$$\sigma_n = \sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} (\xi_i - \overline{\xi})^2}{n}}$$

Adott a ξ_i^*, ami a minta nagyság szerint növekvő sorrendbe rendezett elemei közül az i-edik. Ekkor definiálható az alábbi négy fogalom:

B.10.4. Definíció. *(Minta terjedelme) $\xi_m^* - \xi_1^*$, azaz a legnagyobb és legkisebb minta közti eltérés.*

B.10.5. Definíció. *(Minta középpontja) $\hat{\xi} = \frac{\xi_1^* - \xi_n^*}{2}$, azaz a minta terjedelmének a fele*

B.10.6. Definíció. *(Minta mediánja)*

- *ξ_m^*, ha $n = 2m - 1$, azaz páratlan számú mintavétel esetén a középső elem.*
- *$\frac{\xi_m^* + \xi_{m+1}^*}{2}$, ha $n = 2m$, azaz páros számú mintavétel esetén a középső két elem számtani közepe.*

B.10.7. Definíció. *(Empirikus eloszlásfüggvény) $F_n(x) = \begin{cases} 0 & ha\ x \le \xi_1^* \\ \frac{k}{n} & ha\ \xi_k^* < x \le \xi_{k+1}^*,\ ahol\ k{=}1...n{-}1 \\ 1 & ha\ \xi_n^* < x \end{cases}$*

Megjegyzés. *Ez egy lépcsős függvény, ξ_i^* helyeiben $\frac{1}{n}$ nagyságú ugrásokkal, minél nagyobb a mintaszám, annál inkább "kisimul".*

B.7. Tétel. *(Gilvenko-tétel) Ha ugyanazon eloszlásból veszünk mintákat, akkor* $P(\lim\limits_{n\to\infty}(\sup\limits_{-\infty<x<\infty}|F_n(x)-F(x)|)=0)=1$*, azaz az empirikus eloszlásfüggvény 1 valószínűséggel tart a tényleges eloszlásfüggvénybe.*

B.10.8. Definíció. *(Hisztogram, avagy az empirikus sűrűségfüggvény) Legyen az alapsokaságból vett n elemű minta egy realizációja* $x_1, x_2, ..., x_n$*,* $k(x)$ *pedig azon mintaelemek száma, amelyek x-nél kisebb értékűek.*

Ekkor $\frac{k(a+h)-k(a)}{n}$ *az* $(a \leq \xi \leq a+h)$ *esemény mintabeli relatív gyakorisága,* $\frac{k(a+h)-k(a)}{nh}$ *pedig a vizsgált eloszlás sűrűségfüggvényének közelítő helyettesítési értéke a-ban.*

Megjegyzés. *Mivel itt a sűrűségfüggvényt lépcsős függvénnyel közelítjük, ezért ha h elég kicsi, ez a helyettesítési érték a 0-ba fog tartani. Emellett, ha kevés mintánk van és h is kicsi, akkor a hisztogram csak a minták kis környezetében lesz 0-tól különböző.*

B.10.9. Definíció. *(Becslés alapfogalmai)*

- ξ*: a megfigyelt valószínűségi változó*
- Θ*:* ξ *eloszlásának egy ismeretlen paramétere*
- $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$*: egy* ξ*-ből vett minta*
- $\hat{\Theta}$*:* Θ*-t becslő függvény*

Becslést jellemző tulajdonságok:

B.10.10. Definíció. *(Torzítatlanság) Adott becslés torzítatlan, ha* $E(\hat{\Theta})=\Theta$*, azaz a becslő függvény várható értéke pont a becsülni kívánt paraméter.*

B.10.11. Definíció. *(Hatásosság) Azt mondjuk, hogy* $\hat{\Theta_1}$ *hatásosabb, mint* $\hat{\Theta_2}$*, ha* $\sigma(\hat{\Theta_1} < \sigma\hat{\Theta_2}$*. Ha létezik olyan becslés, mely minden más becslésnél hatásosabb, akkor az a becslés hatásos.*

B.10.12. Definíció. *(Aszimptotikus torzítatlanság) Adott egy* $\hat{\Theta_1}, \hat{\Theta_2}, ..., \hat{\Theta_n}$ *becsléssorozat aszimptotikusan torzítatlan, ha* $\lim\limits_{n\to\infty} E(\hat{\Theta_n})=\Theta$*.*

B.10.1. Állítás. *Minden torzítatlan becslés aszimptotikusan torzítatlan.*

B.10.13. Definíció. *(Elégségesség) A* $\hat{\Theta}=f(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ *statisztika elégséges becslése a* Θ *paraméternek, ha a mintavételi változók együttes feltételes eloszlása bármilyen módon megvalósuló* $\hat{\Theta}=y$ *feltétel mellett nem tartalmazza* Θ*-t.*

B.10.14. Definíció. *(Konziszetncia) Azt mondjuk, hogy becslés konzisztens, ha torzítatlan, és* $E(\hat{\Theta})=\Theta$*, valamint* $\lim\limits_{n\to\infty} P(|\hat{\Theta}-\Theta|<\epsilon)=1$*, ahol* $\epsilon>0$*.*

B.10.2. Állítás. *A mintaátlag torzítatlan becslése* $E(\xi)$*-nek.*

B.10.3. Állítás. *A mintatlag szórása* $\to 0$*, ha* $n\to\infty$*.*

Bizonyítás. $\sigma^2(\overline{xi})=\sigma^2(\frac{\xi_1+\xi_2+...+\xi_n}{n})=\frac{1}{n^2}\sum\limits_{i=1}^{n}\sigma^2(\xi\cdot i)=\frac{1}{n^2}\sum\limits_{i=1}^{n}\underbrace{\sigma^2(\xi_1)}_{\text{ugyanolyan az eloszlásuk, és függetlenek}}=\frac{1}{n^2}\cdot n\cdot\sigma^2(\xi_1)$

$\sigma(\overline{\xi})=\frac{\sigma(\xi_1)}{\sqrt{n}}$, aminek határértéke a végtelenben 0. □

B.10.4. Állítás. *A mintaátlag az elméleti várható érték, vagyis $E(\xi)$ lineáris becslései közül a leghatékonyabb.*

Megjegyzés. *Normális eloszlás esetén $E(\xi)$ összes becslése közül a mintaátlag a leghatásosabb.*

B.10.5. Állítás. *Az empirikus szórásnégyzet, azaz σ_n^2 csak aszimptotikusan torzítatlan becslése $\sigma^2(\xi)$-nek.*

B.10.15. Definíció. *(Korrigált empirikus szórásnégyzet)* $s_n^2 = \frac{n}{n-1}\sigma_n^2$

B.10.6. Állítás. *A korrigált empirikus szórásnégyzet már torzítatlan becslése az elméleti szórásnégyzetnek.*

Maximum likelihood

Maximum likelihood becslés során az $L(\Theta) = f(x_1, x_2, ..., x_n|\Theta) = f(x_1|\Theta) \cdot f(x_2|\Theta) \cdot ... \cdot f(x_n|\Theta)$ függvényt maximalizáljuk. Mivel szorzattal bonyolult számolni, ezért bevezetjük az $I(\Theta)$ log likelihood függvényt, ami $I(\Theta) = \log(L(\Theta)) = \log \prod_{i=1}^{n} f(x_i|\Theta) = \sum_{i=1}^{n} \log f(x_i|\Theta)$. Ezt követően egy szélsőérték-problémát kapunk, ami deriválással megoldható.

B.10.16. Definíció. *(Adott megbízhatósági szinthez tartozó konfidenciaintervallum) Azt mondjuk, hogy a $100(1-\alpha)$ megbízhatóági szinthez tartozó konfidenciaintervallum a $\hat{\Theta}$ becsléshez tartozó $\left]\hat{\Theta} - z; \hat{\Theta} + z\right[$ intervallum, ha a ténylegesen meghatározott intervallum $(1-\alpha)$ valószínűséggel lefedi a becsült Θ paraméter valódi értékét.*