Maximum likelihood van egy mintám, amihez az ő paramétereit akarom becsülni úgy, hogy az a legvalószínűbb legyen.
A mintában legyen nem 0 elem!

Poisson eloszlás, a λ a kérdés.

$\xi_1, \dots, \xi_n$

$$L(\xi_1, \dots, \xi_n, \lambda) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda^{\xi_i}}{\xi_i!} e^{-\lambda}$$

veszem a természetesalapú logaritmusát: $\ln L(\xi_1, \dots, \xi_n, \lambda) = \sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{\lambda^{\xi_i}}{\xi_i} e^{-\lambda}\right) =$

$$= \sum_{i=1}^{n} \Big(\xi_i \ln\lambda - \overbrace{\ln(\xi_i!)}^{\text{konstans}} - \lambda\Big)$$

ennek keresem a szélsőértékét: deriválás: $\frac{\partial \ln L}{\partial \lambda}(\dots) = \sum_{i=1}^{n}\left(\xi_i \cdot \frac{1}{\lambda} - 0 - 1\right) =$

tudjuk, hogy $\frac{\sum \xi_i}{n} = \bar{\xi}$ (átlag) $\quad = \frac{n\bar{\xi}}{\lambda} - n = 0 \Rightarrow \underline{\underline{\lambda = \bar{\xi}}}$

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \lambda^2} = n\bar{\xi}(-1)\frac{1}{\lambda^2}\Big|_{\lambda=\bar{\xi}} < 0$$ jó maximum.

Exponenciális eloszlás

$$L(\xi_1, \dots, \xi_n, \alpha) = \prod_{i=1}^{n} \alpha e^{-\alpha\xi_i} \xrightarrow{\ln} \ln L(\dots) = \sum_{i=1}^{n} \ln(\alpha e^{-\alpha\xi_i}) = \sum_{i=1}^{n}(\ln\alpha - \alpha\xi_i) =$$

$$= n\ln\alpha - \alpha n\bar{\xi}$$

$\xRightarrow{\text{deriválunk}}$ $\frac{\partial \ln L}{\partial \alpha} = n\frac{1}{\alpha} - n\bar{\xi} = 0 \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = \frac{1}{\bar{\xi}}}}$

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \alpha^2} = -n\frac{1}{\alpha^2}\Big|_{\frac{1}{\bar{\xi}}=\alpha} < 0$$ jó maximum.

$$P(\xi, \vartheta) = \vartheta^{\xi_i}(1-\vartheta)^{1-\xi_i} \qquad 0 < \vartheta < 1$$

$$L(\xi_1, \dots, \xi_n, \vartheta) = \prod_{i=1}^{n} \vartheta^{\xi_i}(1-\vartheta)^{1-\xi_i} \Rightarrow \ln L(\dots) = \sum_{i=1}^{n} \ln(1-\vartheta)\left[(1-\xi_1)+(1-\xi_2)+\dots(1-\xi_n)\right] +$$

$$\ln\vartheta(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n)$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \vartheta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \xi_i}{\vartheta} - \frac{n - \sum_{i=1}^{n} \xi_i}{1-\vartheta} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i - \cancel{\vartheta \sum_{i=1}^{n} \xi_i} = \vartheta - \cancel{\vartheta \sum_{i=1}^{n} \xi_i}$$

$$\vartheta = \frac{\sum_{i=1}^{n} \xi_i}{n} = \bar{\xi}$$

Csebisev egyenlőtlenség

$$P(|\xi - E(\xi)| \geq \varepsilon) \leq \frac{D^2(\xi)}{\varepsilon^2}$$

$$\leq \frac{D^2(\xi)}{\varepsilon^2}$$

centrális határeloszlás tétel

$$P\left(\frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n - \overset{np}{nm}}{\underset{\sqrt{np(1-p)}}{\sigma\sqrt{n}}} < y\right) = \phi(y)$$

standard normális eo.

1. $D^2(\xi) = 49$, $E(\xi) = 60$, $\sigma(\xi) = 7$

Legalább mennyi a valószínűsége, hogy kiválasztunk egyet, s az ő tanulási ideje 50-70 óra közé esik?

$$P(50 < \xi < 70) = P(|\xi - E(\xi)| < 10) > 1 - \frac{D^2(\xi)}{\varepsilon^2}$$

$$> 1 - \frac{49}{10^2} = 0{,}51$$

2. $E(\xi) = 4$ dkg, $\sigma(\xi) = 3g = 0{,}3$ dkg, normális eo. 0,45

1 gombóc fagyi tömege nagyobb értékben tér el a várható értéktől, mint a szórás másfélszerese.

$$P(|\xi - E(\xi)| \geq 0{,}3 \cdot 1{,}5) \leq \frac{0{,}3^2}{(0{,}3 \cdot 1{,}5)^2} = \frac{1}{2{,}25}$$

3. $E(\xi) = 160g$, $\sigma(\xi) = 3g$

esetek legalább 80%-ban legfeljebb mennyivel térhet el?

$$P(|\xi - E(\xi)| < \varepsilon) > 1 - \frac{3^2}{\varepsilon^2} = 0{,}8 \Rightarrow \varepsilon =$$

4 érme: igazságos v. hamis?

Ezerszer feldobjuk. Ha legalább **525** fej – hamis

kevesebb 525 fej – igaz

I. | H.

F 1/2, Í 1/2 | F 0,55 (fej), Í 0,45 (írás)

Binomiális eo.

Akkor téved a teszt, ha $P(x \geq 525)$

1) Jó az érme

$$P(x \geq 525) = P\left(\frac{x - 1000 \cdot 1/2}{\sqrt{100 \cdot 1/2 \cdot 1/2}} > \frac{525 - 1000 \cdot 1/2}{\sqrt{1000 \cdot 1/2 \cdot 1/2}}\right) = P\left(⊛ > \frac{525-500}{5\sqrt{10}}\right) =$$

rossz irányban van az egyenlőtlenség

$$= 1 - \Phi\left(\frac{5}{\sqrt{10}}\right) \sim 0{,}056$$

2) Hamis az érme (de azt mondom rá, hogy jó)

$$P(\xi < 525) = P\left(\frac{\xi - 1000 \cdot 0{,}55}{\sqrt{1000 \cdot 0{,}55 \cdot 0{,}45}} < \frac{525 - 1000 \cdot 0{,}55}{\sqrt{1000 \cdot 0{,}55 \cdot 0{,}45}}\right) = \Phi(-1{,}59) =$$

$$= 1 - \Phi(1{,}59) \approx 0{,}056$$

Konfidencia intervallum: ahol nagyon sok mérési adat benne van. Nagy valószínűséggel

$P(\bar{\xi} - a \leq E(\xi) \leq \bar{\xi} + a)$

$P(|\bar{\xi} - E(\xi)| \leq a)$

5 $\sigma = 1g$ 55, 54, 54, 56, 57, 56, 55, 57, 54, 56, 55, 54, 57, 54, 56, 50

$\boxed{95\%}$-os becslés a várható Standard normális eo.

$\bar{\xi} = \frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{16} = 55$ (átlag)

$$\underbrace{P(-a \leq E(\xi) - \bar{\xi} \leq a)}_{F(a) - F(-a)} = P\left(\frac{|E(\xi) - \xi|}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{a}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$$

standardizálás

Válasz: várható tömeg: $(55 - 0{,}49 \; ; \; 0{,}49 + 55)$

$$\Phi\left(\frac{a\sqrt{n}}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{a\sqrt{n}}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{a\sqrt{n}}{\sigma}\right) - 1 = 0{,}95 \Rightarrow \Phi\left(\frac{a\sqrt{n}}{\sigma}\right) = \frac{1{,}95}{2} = 0{,}975$$

$\Phi(-a) = 1 - \Phi(a)$

$$\frac{a\sqrt{16}}{1} = \frac{a\sqrt{n}}{\sigma} = 1{,}96$$

$\boxed{a = 0{,}49}$