

Valószínűesszámitás tételek és alapfogalmak

2016 ősz

B Tételsor

1. Mérhető tér, mérhető függvények

- Mit nevezünk mérhető térnek?

o ha

- $\Omega \neq \emptyset$
- $\mathcal{F} \subseteq 2^\Omega$ σ -algebra

o ekkor

- $(\Omega, \mathcal{F})$ mérhető tér

- Mikor mérhető egy függvény?

o Borel halmaz: !!!

o Mérhető függvény ha Borel halmazának minden ősképe $\mathcal{F}$ -beli.

- $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mérhető függvény, ha:
- $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ esetén
 - $f^{-1}\langle B \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \{\omega \in \Omega \mid f(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}$

- Mondjon példát nem mérhető függvényre!

o $\Omega \stackrel{\text{def}}{=} \{'kiskutya', 'kismacska'\}$

o $\mathcal{F} \stackrel{\text{def}}{=} \{\emptyset, \Omega\}$

o $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \begin{cases} f('kiskutya') \stackrel{\text{def}}{=} 1 \\ f('kismacska') \stackrel{\text{def}}{=} 0 \end{cases} \quad f^{-1}\langle \{1\} \rangle = \{'kiskutya'\} \notin \mathcal{F}$

tehát f nem mérhető

o **Mérhetővé** tevés:

- $\mathcal{F}' \stackrel{\text{def}}{=} 2^\Omega$ $\mathcal{F}'$ esetén f már mérhető

2. Mérték, valószínűségi mérték (valószínűség), valószínűségi mező, valószínűség tulajdonságai, valószínűségi változó

- Mi a mérték (honnan hová képez, mik a tulajdonságai)?

$\mathcal{o} (\Omega, \mathcal{F})$ mérhető tér

$\mathcal{o} \mu : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény

$\mathcal{o} \mu$ mérték, ha:

- $\mu(A) \geq 0 \quad \forall A \in \mathcal{F}$
- $\mu(\emptyset) = 0$
-

$$\mu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n) \quad \forall (A_n)_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F} - \text{beli halmazzsorozatra, melyre}$$

$$A_n \cap A_m = \emptyset \text{ ha } n \neq m$$

- Mikor valószínűség (vagy valószínűségi mérték) egy mérték?

$\mathcal{o}$ ha $\mu(\Omega) = 1$, akkor μ valószínűségi mérték (valószínűség)

$\mathcal{o}$ Tulajdonságai: $\forall A, B \in \mathcal{F} - re$

- $0 \leq P(A) \leq 1$
- $A \subseteq B \Rightarrow \begin{cases} P(A) \leq P(B) \\ P(B \setminus A) = P(B) - P(A) \end{cases}$
- $P(\Omega \setminus A) = P(A^c) = 1 - P(A)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ (szita formula)

- Mondjon példát mértékre!

$\mathcal{o}$ Legyen $\Omega = \{X, Y, Z\}$

$\mathcal{o} \mathcal{F} = 2^{\Omega}$

$\mathcal{o} \mu(A) = |A|$ (A elemszáma).

$\mathcal{o}$ Ekkor $\mu(A)$ mérték, mivel pozitív, $\emptyset$ -ra 0, és teljesül a σ -additivitás:

- megszámlálható unióra
- diszkrét A_i -re $P(\bigcup_i A_i) = \sum_i P(A_i) \rightarrow$ mert az unió elemszáma diszjunkt halmazok esetén az elemszámok összege.

- Mit nevezünk valószínűségi mezőnek?

$\mathcal{o} (\Omega, \mathcal{F}, P)$ hármas valószínűségi mező ha:

- $(\Omega, \mathcal{F})$ mérhető tér
- $P : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ valószínűség

- Mit nevezünk valószínűségi változónak?

$\mathcal{o}$ Legyen $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ valószínűségi mező. $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ valószínűségi változó

(függvény, mely eseménytérből képez valósba)

3. Diszkrét valószínűségi változó várható értéke (integrál) és kiszámítása

- Mit nevezünk az A halmaz karakterisztikus függvényének (vagy indikátorfüggvényének)?

o $A \in \mathcal{F}$

o A indikátorfüggvénye $\chi_{A, \omega \in \Omega}(\omega) \begin{cases} 0 & \text{ha } \omega \notin A \\ 1 & \text{ha } \omega \in A \end{cases} \quad \chi_A : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

- Mi a lépcsős függvény definíciója?

o $n \in \mathbb{N}^+$, $(\lambda_k)_{1 \leq k \leq n} \mathbb{R}$ – beli véges rendszer (véges sok szám)

o Ekkor legyen $(A_k)_{1 \leq k \leq n} \mathcal{F}$ – beli halmazrendszer olyan, hogy

o $(A_j \cap A_k = \emptyset) \quad (j \neq k) \quad (1 \leq j, k \leq n)$

o $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \quad f(\omega) = \sum_{j=1}^n \lambda_j * \chi_{A_j}(\omega)$

o Példa: $\Omega = [0; 1] \quad \mathcal{F} = \{\emptyset, [0, 1],]0, 1[, \{1\}, \{0\},]0, 1], [0, 1[, \{1, 0\}\}$

o $A \in \mathcal{F} \quad P(A) = \begin{cases} 1/4 & \text{ha } A = \{0\} \\ 1/4 & \text{ha } A = \{1\} \\ 1/2 & \text{ha } A =]0, 1[\end{cases} \quad \text{pl: } P(]0, 1]) = \frac{3}{4} \leftarrow \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right)$

o $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \quad f = 5 * \chi_{[0, 1]} + 3 * \chi_{\{1\}} + \sqrt{2} * \chi_{\{0\}}$

▪ pl.: $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 5 * 1 + 3 * 0 + \sqrt{2} * 0 = 5$

- Mi az f lépcsős függvény integrálja a P mérték szerint Ω -n, ha f diszjunkt halmazok karakterisztikus függvényeinek lineáris kombinációja?

o Legyen $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ val. mező, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ lépcsős függvény,

$$f(\omega) = \sum_{j=1}^n \lambda_j * \chi_{A_j}(\omega)$$

o ahol:

- $A_j \cap A_k = \emptyset \quad (j \neq k)$ – diszjunktak
- $(A_k)_{1 \leq k \leq n} \mathcal{F}$ – beli halmazrendszer
- χ_{A_j} az A_j halmaz karakterisztikus függvénye
- $\lambda_j \in \mathbb{R}$

o ekkor:

$$\int_{\Omega} f dP = \sum_{j=1}^n \lambda_j * P(A_j)$$

- Hogyan definiáljuk a ξ valószínűségi változó várható értékét?

o Legyen $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ val. mező, $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ val. változó

o ξ valószínűségi változó várható értéke (ha létezik):

▪ $E(\xi) = \int_{\Omega} \xi dP \quad (= M(\xi))$

o Kiszámolása:

$$E(\xi) = \sum_{n=0}^{+\infty} \xi_n * P(\xi = \xi_n)$$

▪ ahol $\xi_n = \xi$ lehetséges értékei

4. Lebesgue mérték, Lebesgue integrál, kapcsolat a Riemann integrálhatósággal és a Riemann integrállal. Mértékek abszolút folytonossága és szingularitása. Radon-Nikodym tétel

- Hogyan definiáljuk egy halmaz Lebesgue külső-mértékét?

o Legyen $A \subseteq \mathbb{R}$ tetszőleges

o $\bar{\lambda}(A) \stackrel{\text{def}}{=} \inf \{ \sum_{n=0}^{\infty} \lambda(I_n) \mid A \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} I_n \}$ intervallum, $n \in \mathbb{N}$

o ahol $\lambda(I) = I$ hossza

o Minden fedés.

- A Lebesgue mérték

o $\exists M_\lambda \subseteq 2^{\mathbb{R}}$ létezik egy megszorítása a külső mértéknek

o $M_\lambda \neq 2^{\mathbb{R}}$

o M_λ σ -algebra de σ -algebra

o $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \subseteq M_\lambda$ tartalmazza a boreleket

o tehát nem tartalmazza a „nem szép” részeit $2^{\mathbb{R}}$ -nek (#tanárúrszavajárása)

o $\bar{\lambda}|_{M_\lambda} : M_\lambda \rightarrow \bar{\mathbb{R}}_+$ tehát a fenti megszorítással mérték

o $\bar{\lambda}|_{M_\lambda} \stackrel{\text{def}}{=} \lambda \stackrel{\text{def}}{=} \lambda_{\mathbb{R}}$ Lebesgue mérték

o mert:

- $\sum_{n=0}^{\infty} \bar{\lambda}(A_n) = \bar{\lambda}(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n)$
- ahol $n \in \mathbb{N}$ és $A_j \cap A_k = \emptyset$ ($j \neq k$) – diszjunktak

- Mikor mondjuk hogy a μ_1 mérték abszolút folytonos a μ_2 mértékre?

o $(\Omega, \mathcal{F})$ mérhető tér

o $\mu_1, \mu_2 : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}_+$ mértékek

o $\mu_1 \ll \mu_2$ ha $\forall A \in \mathcal{F}$ re teljesül: $\mu_2(A) = 0 \Rightarrow \mu_1(A) = 0$

o Tulajdonságok:

- transzitiv: $\mu_1 \ll \mu_2$ és $\mu_2 \ll \mu_3 \Rightarrow \mu_1 \ll \mu_3$
- reflexív: $\mu_1 \ll \mu_1$
- NEM szimmetrikus: $\mu_1 \ll \mu_2 \not\Rightarrow \mu_2 \ll \mu_1$

- Mikor mondjuk hogy a μ_1 mérték szinguláris a μ_2 mértékre?

o $(\Omega, \mathcal{F})$ mérhető tér

o $\mu_1, \mu_2 : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}_+$ mértékek

o $\mu_1 \perp \mu_2$ ha $\exists \Omega_1, \Omega_2 \in \mathcal{F}$ hogy

- $(\Omega_1 \cap \Omega_2) = \emptyset$
- $\Omega_1 \cup \Omega_2 = \Omega$

o ekkor: $\mu_1(\Omega_1) = 0$ & $\mu_2(\Omega_2) = 0$

- Radon-Nikodym tétel

o $(\Omega, \mathcal{F})$ mérhető tér

o $\mu, \nu : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}_+$ mértékek

o $\mu \ll \nu$

o ekkor: $\exists! f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ mérhető függvény $\forall A \in \mathcal{F}$ re

- $\mu(A) = \int_A f d\nu = \int_{\Omega} \chi_A * f d\nu$
- tehát garantálja a sűrűségfüggvény egyértelmű létezését

5. Valószínűségi változók függetlensége, független valószínűségi változók várható értéke és szórása

- Mit nevezünk a ξ valószínűségi változó által generált σ -algebrának?

$\circ \xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ valószínűségi változó

$\circ \mathcal{F}_\xi \stackrel{\text{def}}{=} (\xi^{-1}\langle B \rangle \text{ halmazok által generált } \sigma \text{ algebra})$ ahol $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$

- Független valószínűségi változó várható értéke és szórása

$\circ$ Várható értéke:

$$\square E(x, y) = E(x) \cdot E(y)$$

$\circ$ Szórása:

$$\square D^2(x) = E(x^2) - E^2(x)$$

- Mit tudunk $E(\xi \cdot \eta)$ -ről ha ξ és η függetlenek?

$$\circ E(\xi \cdot \eta) = E(\xi) \cdot E(\eta)$$

- Mit tudunk $\sigma^2(\xi + \eta)$ -ről ha ξ és η függetlenek?

$$\circ \sigma^2(\xi + \eta) = \sigma^2(\xi) + \sigma^2(\eta)$$

$\circ$ Bizonyítás:

$$\begin{aligned} \square \begin{matrix} D^2(\xi) = E(\xi^2) - E^2(\xi) \\ D^2(\eta) = E(\eta^2) - E^2(\eta) \end{matrix} &\implies D^2(\xi + \eta) = E((\xi + \eta)^2) - E^2(\xi + \eta) \\ \square E((\xi + \eta)^2) - E^2(\xi + \eta) &= E(\xi^2 + 2\xi\eta + \eta^2) - E^2(\xi + \eta) = \\ \square &= E(\xi^2) + E(\eta^2) - E^2(\xi) - E^2(\eta) = D^2(\xi) + D^2(\eta) \end{aligned}$$

6. Vektorértékű valószínűségi változók, együttes eloszlás, együttes eloszlás- és sűrűségfüggvény

- Mik a többdimenziós valószínűségi változók eloszlásfüggvényének tulajdonságai?

o Tulajdonságai:

- monoton növekedő minden változójában
- $\lim_{t_j \rightarrow -\infty} \mathcal{F}_\xi(t_j) = 0$
- $\lim_{(t_1, \dots, t_k) \rightarrow \infty} \mathcal{F}_\xi(t) = 1$
- $\mathcal{F}_\xi(x)$ balról folytonos minden változójában

- Mit nevezünk együttes és peremeloszlásnak diszkrét 2 dimenziós valószínűségi változók esetén?

o Peremeloszlás:

- egy valószínűség: vektorváltozó bármely komponensének valószínűségi eloszlása
- $\mathcal{F}_\xi(x) = \lim_{y \rightarrow \infty} F(x, y)$
- $\mathcal{F}_\eta(y) = \lim_{x \rightarrow \infty} F(x, y)$

o Együttes:

- $F(x, y) = P(\xi < x, \eta < y)$
- $P(a_1 \leq \xi \leq b_1, a_2 \leq \eta \leq b_2)$ (téglalapos magyarázat)

- Ha (ξ, η) egy folytonos eloszlású 2 dimenziós valószínűségi változó, mik a peremsűrűségfüggvények és hogyan származtathatók az együttes sűrűségfüggvényből?

o peremsűrűségfüggvények:

- $f_{(\xi_1)}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{(\xi_1, \xi_2)}(x, y) dy$
- $f_{(\xi_2)}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{(\xi_1, \xi_2)}(x, y) dx$

- Mi az összefüggés a peremsűrűségfüggvények és az együttes sűrűségfüggvény között, ha ξ és η függetlenek?

$$o f_{(\xi_1, \xi_2)}(x, y) = f_{(\xi_1)}(x) * f_{(\xi_2)}(y)$$

$$o \int_{-\infty}^{\infty} f_{(\xi_1)}(x) * f_{(\xi_2)}(y) dy = f_{(\xi_1)}(x) * \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi_2}(y) dy = x_perem * 1$$

- Hogyan számoljuk tartományba (téglalapba) esés valószínűségét 2 dimenziós valószínűségi változó esetén, ha adott az együttes sűrűségfüggvény?

$$P(a_1 \leq \xi \leq b_1, a_2 \leq \eta \leq b_2) = \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} f(x, y) dx dy$$

7. Feltételes eloszlás- és sűrűségfüggvény, feltételes várható érték

- Hogyan definiáljuk a ξ valószínűségi változó $y_i < \eta < y_j$ feltétel melletti eloszlásfüggvényét ha (ξ, η) diszkrét valószínűségi vektorváltozó?

$$o F^*(x|y_i < \eta < y_j) = P(\xi < x | y_i < \eta < y_j)$$

- Hogyan tudjuk meghatározni az értékét az együttes illetve a peremeloszlások segítségével?

$$o \eta \text{ peremeloszlásfüggvénye: } F_2(y) = \lim_{x \rightarrow \infty} F(x, y)$$

$$o F^*(x|y_i < \eta < y_j) = \frac{F(x, y_j) - F(x, y_i)}{F_2(y_j) - F_2(y_i)} \text{ ahol } F_2(y_j) \neq F_2(y_i)$$

- Folytonos esetben hogyan definiáljuk $F(x|z)$ -t?

$$o F^*(x|z) = \lim_{h \rightarrow 0} (P(\xi < x | z < \eta < (z + h))) \text{ ha ez } \exists$$

- Folytonos esetben hogyan definiáljuk ξ -nek az $\eta = z$ feltétel melletti feltételes sűrűségfüggvényét?

$$o f_{(\xi, \eta)}(x, y) = f(x, y)$$

$$o \eta - \text{peremeloszlása: } f_\eta(y)$$

$$o P(\xi \in I | \eta \in [z, z + h]) = \frac{P(\xi \in I, \eta \in [z, z + h])}{P(\eta \in [z, z + h])} = \frac{\iint_{I \times [z, z + h]} f_{(\xi, \eta)}(x, y) dy dx}{\int_z^{z+h} f_\eta(y) dy}$$

$$o \text{ tudjuk, hogy } \eta \text{ eloszlásfüggvénye:}$$

$$\square F_\eta(w) = \int_{-\infty}^w f_\eta(y) dy$$

8. Konvergenciatípusok L^p terekben, Markov és Csebisev egyenlőtlenség

- Mi az 1-vallal azaz P -majdnem mindenütt konvergencia definíciója?

$$o (f_n)_{n \in \mathbb{N}} L^p\text{-beli függvényssorozat } f \in L^p$$

$$o f_n \rightarrow f \text{ 1 vallyal egyenletesen ha}$$

- $(f_n - f) \in L^\infty \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$
- $a_n \stackrel{\text{def}}{=} \sup(|f_n(\omega) - f(\omega)|) \rightarrow 0 \quad \omega \in \Omega$
- akkor $f_n \rightarrow f$ majdnem mindenütt

- Mi az L^p -ben való konvergencia definíciója?

$$o P \in [1, \infty[: f_n \xrightarrow{L^p} f \text{ ha } \|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$$

$$o \text{ azaz: } \sqrt[p]{\int |f_n - f|^p dP} \rightarrow 0$$

- Van köztük az összefüggés?

- Mit mond ki a Markov, illetve a Csebisev egyenlőtlenség?

$$o \text{ Markov egyenlőtlenség}$$

$$\square \xi \text{ valószínűségi változó: } \xi \geq 0, \varepsilon > 0 \Rightarrow P(\xi > \varepsilon) \leq \frac{E(\xi)}{\varepsilon}$$

$$o \text{ Csebisev egyenlőtlenség}$$

- ha $E(\xi) \exists$ és véges
- $P(|\xi - E(\xi)| \geq \varepsilon) \leq \frac{E(|\xi - E(\xi)|^2)}{\varepsilon^2} = \frac{\delta^2(\xi)}{\varepsilon^2}$

9. Centrális határeloszlás tétel, De Moivre-Laplace tétel, Nagy számok gyenge törvénye, Nagy számok erős törvénye (Kolmogorov-féle erős törvény)

- Mit mond ki a **centrális határeloszlás tétel**?

$\circ$ ha a valószínűségi változókat standardizáljuk akkor standard normális lesz

$\circ \xi_{1...n}$ független azonos eloszlású valószínűségi változók

$\circ \delta^2(\xi_j) < \infty \quad j \in \mathbb{N}$

$\circ$ ekkor:

$\circ \frac{\sum_{j=1}^n \xi_j - n \cdot E(\xi_1)}{\delta(\xi_1) \cdot \sqrt{n}} \rightarrow N(0,1)$ eloszlásban tart

$\circ$ ahol:

- $N(0,1)$ olyan valószínűségi változó normális eloszlása:
- $E(N(0,1)) = 0$
- $\delta^2(N(0,1)) = 1$
- azaz standard normális eloszlás

- Mit mond ki a **DeMoivre-Laplace tétel**?

$\circ$ „1 dimenziós szimmetrikus bolyongás”

$\circ (\xi_j)_{j \in \mathbb{N}^+}$ független valószínűségi változók

$\circ P(\xi_j = 1) = P(\xi_j = -1) = \frac{1}{2}$ és

$\circ (S_n)_{n \in \mathbb{N}^+} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^n \xi_j$

$\circ$ ekkor:

$\circ b \in \mathbb{R}$

$\circ P\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} < b\right) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^b e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ (eloszlásban)

- Mit mond ki a **nagy számok gyenge törvénye**?

$\circ (\xi_j)_{j \in \mathbb{N}^+}$ függetlenek

$\circ P(\xi_j = 1) = p \quad p \in]0,1[$

$\circ P(\xi_j = 0) = 1 - p$

$\circ \frac{\sum_{j=1}^n \xi_j}{n} \rightarrow p$ konstanshoz sztochasztikusan

$\circ P\left(\left|\frac{\sum_{j=1}^n \xi_j}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \rightarrow 0 \quad \forall \varepsilon > 0$

- Mit mond ki a **nagy számok erős törvénye**, azaz a **Kolmogorov-féle erős törvény**?

$\circ (\xi_j)_{j \in \mathbb{N}^+}$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók

$\circ$ Ha $E(\xi_1) > 0$ véges $\Rightarrow \frac{\sum_{j=1}^n \xi_j - n \cdot E(\xi_1)}{n} \rightarrow 0$ 1 valószínűséggel

$\circ$ Ha $\exists c \in \mathbb{R}$ hogy $\frac{\sum_{j=1}^n \xi_j - n \cdot c}{n} \rightarrow 0$ 1 valószínűséggel

10. Statisztikai alapfogalmak, maximum likelihood elv, konfidenciaintervallum