

Valószínűesszámitás tételek és alapfogalmak

2016 ősz

A Tételsor

1. Eseménytér, szigma-algebra (eseményalgebra)

- Ha adott az Ω eseménytér, hogyan definiáljuk az eseményalgebrát?
 - σ -algebra az Ω bizonyos részhalmazainak összessége.
 - Borel:
 - ugyanazt a σ -algebrát generálja
 - 3 definíció:
 - $\mathcal{G} \stackrel{\text{def}}{=} \{G \subseteq \mathbb{R} | G \text{ nyílt}\}$ $\mathcal{G}$ metrikus értelemben nyílt
 - $\mathcal{P} \stackrel{\text{def}}{=} \{[a, b[| a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$
 - $\mathcal{I} \stackrel{\text{def}}{=} \{I \subseteq \mathbb{R} | I \text{ intervallum}\}$
- Miket nevezünk eseményeknek?
 - zárt véges vagy megszámlálhatóan végtelen unióra ($\cup$)
 - zárt komplementerre (e^c)
 - zárt metszetre ($\cap$)
- Mik az eseményalgebra tulajdonságai?
 - Ω minden lehetséges kombinációját és az üres halmazt $\{\emptyset\}$ tartalmazza

2. Diszkrét valószínűségi változó eloszlása, eloszlásfüggvény (diszkrét eset)

- Adott $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ valószínűségi mező és ξ diszkrét valószínűségi változó esetén hogyan definiáljuk ξ eloszlását?
 - Diszkrét valószínűségi változó
 - Maximum megszámlálhatóan végtelen sok értéket vehet fel.
 - Ω elemszáma dönt
 - Eloszlása a valószínűségi változó által felvehető értékek valószínűségeinek sorozata.
- Hogyan definiáljuk ξ eloszlásfüggvényét?
 - $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ (Omegából valósba)
 - $\mathcal{F}_\xi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \mathcal{F}_\xi(x) \stackrel{\text{def}}{=} P(\xi < x) = P(\xi^{-1} \subset]-\infty, x[)$
- Mi az összefüggés ξ eloszlása és az eloszlásfüggvény közt?
 - Eloszlás:
 - argumentuma egy halmaz: $Q(A)$
 - Eloszlásfüggvény:
 - argumentuma egy szám (x) $\overrightarrow{\text{meghatároz}}$ egy halmazt
 - e halmaz ξ szerinti ősképe a mértéke maga az eloszlás
 - jelképesen:
 - $A =]-\infty, x[$
 - $\xi^{-1}(A) = Q(A)$
 - Eloszlás csak egy értékhez tartozó valószínűség
 - Eloszlásfüggvény pedig ezen értékekhez tartozó lépcsős függvény
- Mik az eloszlásfüggvény tulajdonságai?
 - monoton növekedő
 - $\lim_{x \rightarrow \infty} \mathcal{F}_\xi(x) = 1$
 - $\lim_{x \rightarrow -\infty} \mathcal{F}_\xi(x) = 0$
 - $\mathcal{F}_\xi(x)$ balról folytonos

3. Függetlenség, feltételes valószínűség, teljes valószínűség tétele, Bayes Tétel

- Hogyan definiáljuk az A esemény B eseményre vonatkoztatott feltételes valószínűségét?
 - $A, B \in \mathcal{F}$ feltételes valószínűség B szerint. Feltéve: $P(B) \neq 0$
 - $P(A|B) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \stackrel{\text{def}}{=} P_B(A)$
 - megjegyzés:
 - $P_B : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ tehát $P(B)$ – függvény, mérték és valószínűség is.
 - A és B függetlenek $\leftrightarrow P(A|B) = P(A) \leftrightarrow P(B|A) = P(B)$
Ekkor $P(A) = P(B) \neq 0$
- Mit nevezünk teljes eseményrendszernek?
 - $A_k \in \mathcal{F}$ ahol $1 \leq k \leq n$
 - $\bigcup_{k=1}^n A_k = \Omega$
- Mit mond ki a teljes valószínűség tétele?
 - Ha B_i teljes eseményrendszer és $P(B_i) > 0$ ahol $1 \leq i \leq n$
 - akkor egy tetszőleges esemény valószínűsége:
 - $P(A) = \sum_{i=1}^n P(A|B_i) * P(B_i)$
- Mit mond ki a Bayes tétel?
 - $P(B_k|A) = \frac{P(A|B_k) * P(B_k)}{\sum_{i=1}^n P(A|B_i) * P(B_i)}$ ahol $1 \leq k \leq n$ $P(A) > 0$

4. Binomiális és Hipergeometrikus eloszlás

- Mikor mondjuk, hogy egy valószínűségi változó binomiális eloszlású?
 - ha n kísérletből PONTOSAN k-szor következik be. ((n,p) paraméterű)
 - $P(\xi = k) = \binom{n}{k} * P^k * (1 - P)^{n-k}$
 - Jelölések:
 - n – kísérletek száma
 - p – valószínűségi érték
 - k – kimenetel ($k \leq n$)
 - Várható értéke: $n * p$
- Mondjon példát binomiális eloszlású valószínűségi változóra!
 - Feladat: 20 beteget műtenek, egy műtét 90%-ban sikeres, mekkora valószínűsége hogy pontosan 5 beteg hal bele?
 - $n = 20$
 - $p = 0,1$
 - $k = 5$
 - Valószínűségi változó (ξ): hányan halnak meg?
- Mikor mondjuk, hogy egy valószínűségi változó hipergeometrikus eloszlású?
 - ha a mintavétel visszatevés nélküli, kiválasztunk az összesből n-et és ebből mennyi jó nekünk.
 - $P(\xi = k) = \frac{\binom{K}{k} * \binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}} \quad (k \neq 0)$
 - Jelölések:
 - N – összes lehetséges
 - n – amennyit kiválasztunk belőle
 - K – összesből az összes kedvező lehetőség
 - k – K-ből amennyit ki szeretnénk választani
 - Várható értéke: $n * \frac{K}{N}$
- Mondjon példát hipergeometrikus eloszlású valószínűségi változóra!
 - Feladat: 10 golyó van ebből 6 piros, 5-öt kihúzunk közülük, mekkora valószínűséggel lesz:
 - a) 3 piros a kiválasztottak között
 - $N = 10$
 - $K = 6$
 - $n = 5$
 - $k = 3$
 - b) mind piros
 - $N = 10$
 - $K = 6$
 - $n = 5$
 - $k = 5$
 - Valószínűségi változó (ξ): hány piros golyót húzunk ki?

5. Geometriai és Poisson eloszlás

- Mikor mondjuk, hogy egy valószínűségi változó geometriai eloszlású?
 - Ha egy esemény első megtörténésének valószínűségére vagyunk kíváncsiak.
 - $P(\xi = k) = p * (1 - p)^{k-1} \quad k \in \mathbb{N} \quad k \text{ nem korlátos}$
 - Jelölések:
 - p – paraméter, a várt érték valószínűsége
 - k – hányadik próbánál járunk
 - Várható értéke: $\frac{1}{p}$
- Mondjon példát geometriai eloszlású valószínűségi változóra.
 - Feladat: cinkelt kocka 0,4 valószínűséggel fej, páratlan sorszámú dobásnál lesz először fej.
 - $p = 0,4$
 - $k = \{1, 3, 5, 7, 9 \dots\}$
 - Valószínűségi változó (ξ): próbálkozások száma.
- Mikor mondjuk, hogy egy valószínűségi változó Poisson eloszlású?
 - Ha $\exists$ egy $\lambda > 0$ paraméter
 - $P(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$
 - Jelölések:
 - k – a keresett érték.
 - Várható értéke: λ
- Mi a kapcsolat a binomiális és a Poisson eloszlás közt?
 - a p paraméterű binomiális eloszlásban a k érték felvételének valószínűsége közel lesz az (n, p) paraméterű Poissoneloszlásban a k érték felvételének valószínűségéhez,
 - ha a binomiális eloszlás paraméterei:
 - n – nagyon nagy
 - p – nagyon kicsi
 - a binomiális-eloszlás közelíthető Poisson-eloszlással:
 - $$\binom{n}{k} * p^k * (1 - p)^{n-k} \approx \frac{(n * p)^k}{k!} * e^{-(n * p)} \quad (n * p) \rightarrow \lambda$$
$$\Rightarrow \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

6. Diszkrét eloszlások várható értéke

- Hogyan számoljuk ki egy diszkrét valószínűségi változó várható értékét, ha ismert az eloszlása?
 - ha ξ diszkrét valószínűségi változó, akkor megszámlálható értékeket vehet fel, jelöljük őket: (x_i)
 - minden értékhez tartozik egy valószínűség, jelöljük őket: (p_i)
 - Ekkor ξ várható értéke: $E(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n p_n$
- Mi az (n, p) paraméterű binomiális eloszlás várható értéke?
 - Várható értéke: $E(\xi) = n \cdot p$
- Mi a λ paraméterű Poisson eloszlás várható értéke?
 - Várható értéke: $E(\xi) = \lambda$
- Mi a p paraméterű geometriai eloszlás várható értéke?
 - Várható értéke: $E(\xi) = \frac{1}{p}$

7. Valószínűségi változó eloszlása, folytonos eloszlású valószínűségi változók, sűrűségfüggvény

- Adott $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ valószínűségi mező és ξ valószínűségi változó esetén hogyan definiáljuk ξ eloszlását? (mihez rendel mit az eloszlás?)
 - $B \in \mathcal{B}_R$: $Q_\xi(B) \stackrel{\text{def}}{=} P(\xi^{-1}(B))$
 - $F_\xi(x) = P(\xi < x) = P(\xi^{-1}(]-\infty, x[)) = Q_\xi(]-\infty, x[)$
 - Tulajdonságai:
 - $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$
 - $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$
 - monoton növekedő
 - folytonos
- Mit nevezünk a folytonos eloszlású ξ valószínűségi változó sűrűségfüggvényének?
 - ξ eloszlásfüggvényének deriváltját nevezzük ξ sűrűségfüggvényének
- Hogyan számoljuk ki egy ξ folytonos valószínűségi változó $[a, b]$ intervallumba esésének valószínűségét sűrűségfüggvény, illetve eloszlásfüggvény segítségével?
 - sűrűségfüggvény jelölése: $f(\xi)$
 - $P(a \leq \xi \leq b) = \int_{-\infty}^b f(\xi) d\xi - \int_{-\infty}^a f(\xi) d\xi$
 - eloszlásfüggvény jelölése: $F(\xi)$
 - $P(a \leq \xi \leq b) = F(b) - F(a)$
- Mi a kapcsolat a sűrűségfüggvény és az eloszlásfüggvény közt?
 - $F(\xi) = \int_{-\infty}^{\xi} f(t) dt$
 - $f(\xi) = F'(\xi)$
- Milyen tulajdonságai vannak az f sűrűségfüggvénynek?
 - Tulajdonságai:
 - $f(x) \geq 0$ mindenhol pozitív
 - balról folytonos
 - $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$

8. Várható érték folytonos valószínűségi változó esetén, exponenciális eloszlás és várható értéke

- Hogyan számoljuk ki a ξ folytonos valószínűségi változó várható értékét, ha adott a sűrűségfüggvénye?

- $E(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x * f(x) dx$

- Mikor mondjuk, hogy egy ξ folytonos valószínűségi változó α paraméterű exponenciális eloszlású?

- ha ξ folytonos eloszlású valószínűségi változó

- és ξ sűrűségfüggvénye $f_{\xi}(x) = \begin{cases} \alpha * e^{-\alpha x} & \text{ha } x > 0 \\ 0 & \text{ha } x \leq 0 \end{cases} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

- Mutassa meg hogy exponenciális eloszlású valószínűségi változó sűrűségfüggvénye valóban sűrűségfüggvény!

- $F_{\xi}(x) = Q_{\xi}(]-\infty, x]) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^x \alpha * e^{-\alpha t} dt = \alpha * \left[\frac{1}{-\alpha} * e^{-\alpha t} \right]_0^x =$

$$= -e^{-\alpha x} + 1 \Rightarrow \overline{x} = \infty - r\vec{e} \Rightarrow e^{-\infty} = 0 \Rightarrow \text{az egész} = 1$$

- tehát valóban sűrűségfüggvény.

- Mi egy α paraméterű exponenciális eloszlású ξ folytonos valószínűségi változó várható értéke?

- Várható értéke: $\frac{1}{\alpha}$

- $E(\xi) = \int_0^{\infty} x * \alpha * e^{-\alpha x} dx = [x * (-e^{-\alpha x})]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -e^{-\alpha x} dx = \left[\frac{1}{-\alpha} * e^{-\alpha t} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{\alpha}$

9. Normális eloszlás és standard normális eloszlás

- Mikor mondjuk, hogy egy ξ folytonos valószínűségi változó (m, σ) paraméterű normális eloszlású?
 - ha ξ folytonos
 - és ξ sűrűségfüggvénye $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} * e^{\frac{-(x-m)^2}{2\sigma^2}}$
- Mikor mondjuk, hogy egy ξ folytonos valószínűségi változó standard normális eloszlású?
 - várható értéke: $m = 0$
 - szórása: $\sigma = 1$
 - sűrűségfüggvénye:
 - $f_{\xi}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} * e^{\frac{-x^2}{2}}$ $\xrightarrow{\text{eloszlás fv}}$ $\Phi_{\xi}(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-t^2}{2}} dt$
- Mi a standard normális eloszlás jelentősége (mi az összefüggés normális eloszlású valószínűségi változó eloszlásfüggvénye és a standard normális valószínűségi változó eloszlásfüggvénye közt)?
 - normális eloszlást számolni hosszadalmas munka, ezért standardizáljuk őket, és erről egyszer elkészítettek egy táblázatot, amiről már csak le kell olvasnunk az eredményt. Így időt takaríthatunk meg.
 - minden normális eloszlású valószínűségi változó eloszlás függvénye visszavezethető standard normális eloszlására (m, σ).
 - $F(x) = \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)$
 - A normális eloszlás sűrűségfüggvényét kiintegráljuk $]-\infty, x]$ között:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} * e^{\frac{-(t-m)^2}{2\sigma^2}} dt$$

- Átnevezés:
 - $z \stackrel{\text{def}}{=} \frac{t-m}{\sigma}$ kifejezzük 't'-t $t \stackrel{\text{def}}{=} z\sigma + m$
 - tehát: $dt = \sigma dz$

- Integrál határok vizsgálata: $z \stackrel{\text{def}}{=} \frac{t-m}{\sigma}$
 - alsó: $t \rightarrow -\infty \Rightarrow z \rightarrow -\infty$
 - felső: $t = x \Rightarrow z = \frac{x-m}{\sigma}$

- Tehát:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\frac{x-m}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} * e^{\frac{-z^2}{2}} \sigma dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} * \int_{-\infty}^{\frac{x-m}{\sigma}} e^{\frac{-z^2}{2}} dz = \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)$$

10. Szórás és kiszámítása

- Hogyan definiáljuk egy ξ valószínűségi változó szórását?

- $D^2(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} E[(\xi - E(\xi))^2]$ szórásnégyzet

- $D(\xi) = \sqrt{D^2(\xi)} = \sqrt{E[(\xi - E(\xi))^2]}$ szórás

- Hogyan számítjuk ki?

- $D^2(\xi) = E(\xi^2) - E^2(\xi)$ szórásnégyzet számítása

- $D(\xi) = \sqrt{E(\xi^2) - E^2(\xi)}$ szórás számolása

- Diszkrét esetben:

- $D^2(\xi) = \sum_i (x_i^2 * p_i) - (\sum_i x_i * p_i)^2$

- Folytonos esetben:

- $D^2(\xi) = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} x^2 * f(x) dx - \left(\int_{-\infty}^{\infty} x * f(x) dx\right)^2}$

- Számítsa ki a szórást, ha adott egy k oldalú szabályos 'kocka' és a valószínűségi változó a dobás eredménye!

$\xi = X$	$P(\xi = x_i)$
X=1	$1/k$
X=2	$1/k$
...	...
X=k	$1/k$

- $D(X) = \sqrt{E(X^2) - E^2(X)}$

- $E(X) = \sum_{n=1}^k n * \frac{1}{k} = \frac{1}{k} * \sum_{n=1}^k n$

- $E(X^2) = \sum_{n=1}^k n^2 * \frac{1}{k} = \frac{1}{k} * \sum_{n=1}^k n^2$

11. Kovariancia és korreláció

- Hogyan definiáljuk ξ és η valószínűségi változók **kovarianciáját**?
 - ha $\exists \sigma^2(\xi)$ és $\exists \sigma^2(\eta)$
 - $cov(\xi, \eta) \stackrel{\text{def}}{=} E(\beta) = E(\xi - E(\xi)) * (\eta - E(\eta))$
 - Tétel:
 - $cov(\xi, \eta) = E(\xi * \eta) - (E(\xi) * E(\eta))$
- Hogyan definiáljuk ξ valószínűségi változó **standardizáltját**?
 - $\tilde{\xi} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\xi - E(\xi)}{\sigma(\xi)}$
- Hogyan definiáljuk ξ és η valószínűségi változók **korrelációs együtthatóját**?
 - ξ és η standardizáltjainak kovarianciája
 - $corr(\xi, \eta) = cov(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}) = \frac{cov(\xi, \eta)}{\sigma(\xi) * \sigma(\eta)}$
- Mi a kovariancia és a függetlenség kapcsolata?
 - ha ξ és η független $\Rightarrow cov(\xi, \eta) = 0$ fordítva **nem** feltétlenül igaz!
 - $cov(\xi, \eta) = 0 \Rightarrow$ *korrelálatlanok*
- Hogyan számítjuk ki a kovarianciát **diszkrét** és **folytonos** esetben, ha adott az eloszlás illetve az együttes sűrűségfüggvény?
 - Diszkrét:
 - $\sum_i \sum_j (x_i * y_j * P(\xi = x_i, \eta = y_j) - (\sum_i (x_i * P(\xi = x_i)) * \sum_j (y_j * P(\eta = y_j))))$
 - $E(\xi * \eta) - (E(\xi) * E(\eta))$
 - Folytonos:
 - $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x * y * f_{\xi, \eta}(x, y) dx dy - \int_{-\infty}^{\infty} x * f_{\xi}(x) dx * \int_{-\infty}^{\infty} y * f_{\eta}(y) dy$
 - $E(\xi * \eta) - (E(\xi) * E(\eta))$

12. Valószínűségi változók transzformáltjai

- Ha adott egy ξ diszkrét valószínűségi változó melynek lehetséges értékei $x_1, x_2, \dots$, ismerjük az eloszlását, és egy h függvény, hogyan számítjuk ki az $\eta = h(\xi)$ valószínűségi változó eloszlását?

$$\begin{array}{l} y_1 = h(x_1) \\ y_2 = h(x_2) \\ \dots \\ y_n = h(x_n) \end{array} \quad \text{Hozzájuk tartozó valószínűségek:} \quad P(\eta = y_k) \stackrel{\text{def}}{=} q_k = \sum_{y(x_i)=y_k} P(\xi = x_i)$$

▪ ahol $1 \leq i, j \leq n$

- Ha ξ egy folytonos eloszlású valószínűségi változó melynek a sűrűségfüggvénye $f(x)$, valamint $h(x)$ szigorúan monoton és differenciálható, hogyan számítjuk ki az $\eta = h(\xi)$ valószínűségi változó sűrűségfüggvényét?

- $\xi \sim f(x)$
- $\eta = h(\xi)$
- $g(h(\xi)) = f(h^{-1}(y)) * \left| \frac{dh^{-1}(y)}{dy} \right|$

$\Rightarrow$ Jakobi mátrix determinánsának abszolút értéke.

- Mi lesz a transzformált valószínűségi változó sűrűségfüggvénye, ha a transzformáció lineáris?
 - ???