

Valószínűesszámítás gyakorlat

Csercsik Dávid

2017 ősz

9. hét - Együttes eloszlások

1. Egy dobozban 22 darab 1-től 22-ig számozott cédula van. Véletlenszerűen kihúzzunk egyet. A rajta lévő számot két szempontból vizsgáljuk: A ξ valószínűségi értéke legyen 1 ha páros számot húztunk, és 0 ha páratlant. Az η valószínűségi értéke legyen 1 ha a kihúzott szám osztható 3-al, egyébként 0. Írjuk fel a (ξ, η) vektor valószínűségi eloszlását (ξ és η együttes eloszlását)!

Megoldás

($\xi = 0, \eta = 0$): 3-al nem osztható páratlan számok: (1,5,7,11,13,17,19) $\rightsquigarrow P_{0,0} = \frac{7}{22}$

($\xi = 0, \eta = 1$): 3-al osztható páratlan számok: (3,9,15,21) $\rightsquigarrow P_{0,1} = \frac{4}{22}$

hasonlóan $P_{1,0} = \frac{8}{22}$, $P_{1,1} = \frac{3}{22}$. Az eloszlás megadására elégséges az alábbi táblázat:

$\xi \backslash \eta$	0	1	ξ perem
0	$7/22$	$4/22$	$11/22$
1	$8/22$	$3/22$	$11/22$
η perem	$15/22$	$7/22$	

Az eloszlásfüggvény:

$$F(x, y) = P(\xi < x, \eta < y) = \begin{cases} \frac{7}{22} & \text{ha } 0 < x \leq 1, 0 < y \leq 1 \\ \frac{15}{22} & \text{ha } 1 < x, 0 < y \leq 1 \\ \frac{11}{22} & \text{ha } 0 < x \leq 1, 1 < y \\ 1 & \text{ha } 1 < x, 1 < y \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

2. Az alábbi kétdimenziós táblázat egy bolha helyzetét mutatja a koordináta-rendszerben.

X \ Y	-1	3
-1	p	2p
0	2p	3p
2	p	p

- (a) Határozzuk meg p értékét!
- (b) Az origóban állunk. Mi a valószínűsége, hogy a bolha 2.5 egység távolságon belül van?
- (c) Ha tudjuk, hogy az x -koordinátája pozitív, mi a valószínűsége, hogy a bolha az első negyedben van?

Megoldás.

- (a) A teljes eseménytérnek a valószínűsége 1, ezért $p = \frac{1}{10}$.
- (b) $P(\|(X, Y)\| < 2.5) = ?$ Ez három esetben lehetséges eukleideszi normát tekintve: $(-1, -1)$, $(0, -1)$ és $(2, -1)$ a megoldás ezen valószínűségek összege lesz, azaz $4p$, tehát $P(\|(X, Y)\| < 2.5) = 0.4$
- (c) Ha X pozitív, akkor $X = 2$ ekkor $Y = -1$ vagy $Y = 3$, látjuk hogy ezen esetek valószínűsége azonos tehát a válasz $1/2$.
3. A (ξ, η) kétdimenziós valószínűségi változó lehetséges értékeit és eloszlását a következő táblázat tartalmazza:

$\xi \backslash \eta$	0	1
0	p	p
1	p	3p
2	2p	4p

Határozzuk meg p értékét, és írjuk fel (ξ, η) eloszlásfüggvényét!

Megoldás.

A teljes eseménytérnek a valószínűsége 1, ezért $p = \frac{1}{12}$.

$$F(x, y) = P(\xi < x, \eta < y) = \begin{cases} \frac{1}{12} & \text{ha } 0 < x \leq 1, \quad 0 < y \leq 1 \\ \frac{2}{12} & \text{ha } 1 < x \leq 2, \quad 0 < y \leq 1 \\ \frac{4}{12} & \text{ha } 2 < x, \quad 0 < y \leq 1 \\ \frac{2}{12} & \text{ha } 0 < x \leq 1, \quad 1 < y \\ \frac{6}{12} & \text{ha } 1 < x \leq 2, \quad 1 < y \\ 1 & \text{ha } 2 < x, \quad 1 < y \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

4. Két szabályos kockát feldobunk. ξ jelentse a hatos dobások számát, η pedig a dobott számok összegét. Adjuk meg ξ és η együttes eloszlását, valamint a peremeloszlásokat! Független-e ξ η -tól?

Megoldás.

$\eta \backslash \xi$	0	1	2	η peremeloszlása
2	$\frac{1}{36}$	0	0	$\frac{1}{36}$
3	$\frac{2}{36}$	0	0	$\frac{2}{36}$
4	$\frac{3}{36}$	0	0	$\frac{3}{36}$
5	$\frac{4}{36}$	0	0	$\frac{4}{36}$
6	$\frac{5}{36}$	0	0	$\frac{5}{36}$
7	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$	0	$\frac{6}{36}$
8	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	0	$\frac{5}{36}$
9	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	0	$\frac{4}{36}$
10	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	0	$\frac{3}{36}$
11	0	$\frac{2}{36}$	0	$\frac{2}{36}$
12	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
ξ peremeloszlása	$\frac{25}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{1}{36}$	1

Nem független, hiszen például $P(\xi = 2, \eta = 2) = 0 \neq P(\xi = 2)P(\eta = 2) = \frac{25}{36} \cdot \frac{1}{36}$

5. Egy dobozban 30 db A típusú, 30 db B típusú és 40 db C típusú villanykörte van. kiveszünk véletlenszerűen (egyszerre, visszatevés nélkül) 20 db-ot. Jelentse ξ a mintában szereplő A típusúak számát, η pedig a B típusúak számát.
- (a) Írjuk fel a (ξ, η) kétdimenziós valószínűségi változó valószínűségeloszlását!
- (b) Számítsuk ki a peremeloszlásokat!

Megoldás

- (a) Legyen ξ az A típusú, η pedig a B típusú kihúzott körték száma. Ekkor $0 \leq \xi + \eta \leq 20$. Az összes elemi esemény száma ismétlés nélküli kombináció azaz $\binom{100}{20}$. A kedvező események számához pedig, 30-ból x -et, 30-ból y -t és 40-ből $20-x-y$ -t választunk ki.

$$P(\xi = x, \eta = y) = \frac{\binom{30}{x} \binom{30}{y} \binom{40}{20-x-y}}{\binom{100}{20}}$$

Ez akkor igaz, ha $0 \leq x + y \leq 20$ teljesül, egyébként $P(\xi = x, \eta = y) = 0$. Ez *polihipergeometrikus eloszlás*.

- (b) ξ peremeloszlásához rögzítsük x értékét:

$$\begin{aligned} P(\xi = x) &= \sum_{y=0}^{20-x} \frac{\binom{30}{x} \binom{30}{y} \binom{40}{20-x-y}}{\binom{100}{20}} \\ &= \frac{\binom{30}{x}}{\binom{100}{20}} \sum_{y=0}^{20-x} \binom{30}{y} \binom{40}{20-x-y} = \frac{\binom{30}{x} \binom{70}{20-x}}{\binom{100}{20}} \quad (x = 0, 1, 2, \dots, 20) \end{aligned}$$

ami jól láthatóan hipergeometrikus eloszlás. η esetén ugyanígy járjunk el.

6. Egy gép egy adott munkadarab elkészítése során egy-egy tengelyre 10 db ideális esetben egyforma nagyságú alkatrészt helyez szorosan egymás mellé. Az alkatrészek hossza valószínűségi változó, s ezen valószínűségi változók egymástól függetlenek. Egy alkatrész hosszának várható értéke 10 cm, szórása 0.2 cm, Mekkora lesz az összeszerelt munkadarab várható hossza és a hossz szórása?

Megoldás. A várható érték lineáris leképezés az azonos valószínűségi mezőn értelmezett valószínűségi változók terén, azaz ha ξ és η azonos valószínűségi mezőn értelmezett valószínűségi változók, akkor $E(\xi + \eta) = E(\xi) + E(\eta)$. Illetve tudjuk hogy független esetben $\sigma^2(\xi + \eta) = \sigma^2(\xi) + \sigma^2(\eta)$. A várható érték így 100 cm a szórás pedig:

$$\sigma^2(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_{10}) = \sigma^2(\xi_1) + \dots + \sigma^2(\xi_{10}) = 10 \cdot (0.04) \rightsquigarrow \sigma = \sqrt{0.4} = 0.6325$$

7. Számoljuk ki a

$$P(\xi < 1, \eta < 1) \text{ és a } P\left(\xi < 1, \eta \geq \frac{3}{2}\right)$$

valószínűségeket ha a sűrűségfv

a)

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & \text{ha } 0 < x < 2, \quad 0 < y < 2, \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$$

b)

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-x-y}, & \text{ha } x > 0, y > 0, \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$$

Megoldás.

(a)

$$P(\xi < 1, \eta < 1) = \frac{1}{4} \int_0^1 \int_0^1 dx dy = \frac{1}{4} \int_0^1 dx \int_0^1 dy = \frac{1}{4}$$

$$P(\xi < 1, \eta \geq \frac{3}{2}) = \frac{1}{4} \int_0^1 \int_{\frac{3}{2}}^2 dy dx = \frac{1}{4} \int_0^1 dx \int_{\frac{3}{2}}^2 dy = \frac{1}{8}$$

(b)

$$P(\xi < 1, \eta < 1) = \int_0^1 \int_0^1 e^{-x-y} dx dy = \underbrace{\int_0^1 e^{-x} dx}_{-[e^{-x}]_0^1 = -(e^{-1} - 1) = 1 - e^{-1}} \int_0^1 e^{-y} dy = (1 - e^{-1})^2$$

$$P(\xi < 1, \eta \geq \frac{3}{2}) = \int_0^1 \int_{\frac{3}{2}}^\infty e^{-x-y} dx dy = \int_0^1 e^{-x} dx \int_{\frac{3}{2}}^\infty e^{-y} dy = (1 - e^{-1})e^{-1.5}$$

8. A mely értékére lesz a következő fv 2 valváltozó (ξ, η) együttes sgfv-e az $(0 < x < 1, 0 < y < 2)$ tartományon?

$$f(x, y) = x^2 + Ay^2$$

Határozzuk meg a marginálisokat ($f_\xi(x)$ -et és $f_\eta(y)$ -t)!

Megoldás.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = 1$$

$$\int_0^1 \int_0^2 (x^2 + Ay^2) dy dx = \int_0^1 \left[yx^2 + A \frac{y^3}{3} \right]_0^2 dx = \int_0^1 2x^2 + A \frac{8}{3} dx =$$

$$\left[\frac{2}{3} x^3 + A \frac{8}{3} x \right]_0^1 = \frac{2}{3} + \frac{8}{3} A = 1 \quad \rightsquigarrow \quad A = \frac{1}{8}$$

A marginálisok pedig:

ξ peremsűrűség-függvénye

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy = \begin{cases} \int_0^2 (x^2 + \frac{1}{8} y^2) dy = \left[yx^2 + \frac{1}{24} y^3 \right]_0^2 = 2x^2 + \frac{1}{3} & \text{ha } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

η peremsűrűség-függvénye

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx = \begin{cases} \int_0^1 (x^2 + \frac{1}{8} y^2) dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{1}{8} y^2 x \right]_0^1 = \frac{y^2}{8} + \frac{1}{3} & \text{ha } 0 < y < 2, \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$