

Valószínűesszámítás gyakorlat

Csercsik Dávid

2017 ősz

8. hét - Sűrűségfüggvények, eloszlásfüggvények (folyt), várható érték és szórás folytonos esetben. Normális eloszlás.

1. Egy ξ valváltozó sűrűségfüggvénye:

$$f(x) \doteq \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq 2 \\ \frac{a}{x^3} & \text{ha } x > 2 \end{cases}$$

(a) Határozzuk meg 'a' értékét!

(b) Írjuk fel a valváltozó eloszlásfüggvényét!

(c) Mekkora valószínűséggel esik ξ a (3,4) intervallumba?

(d) Milyen x érték mellett lesz $\frac{1}{2}$ a $\xi > x$ esemény valószínűsége (medián)?

Megoldás

Hogy sűrűségfüggvény legyen kell nekünk, hogy $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ ezért:

(a)

$$\int_2^{\infty} \frac{a}{x^3} dx = 1$$
$$\lim_{x \rightarrow \infty} a \left[-\frac{1}{2x^2} \right]_2^x = a \left(0 - \left(-\frac{1}{2 \cdot 2^2} \right) \right) = 1$$
$$\rightsquigarrow a = 8$$

(b)

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq 2 \\ \int_2^x \frac{8}{x^3} dx = \left[-\frac{4}{x^2} \right]_2^x = -\frac{4}{x^2} - \left(-\frac{4}{2^2} \right) = 1 - \frac{4}{x^2} & \text{ha } x > 2 \end{cases}$$

(c) $P(3 < \xi < 4) = F(4) - F(3) = \left(1 - \frac{4}{4^2} \right) - \left(1 - \frac{4}{3^2} \right)$

(d)

$$P(\xi > x) = 1 - \left(1 - \frac{4}{x^2} \right) = \frac{4}{x^2} = \frac{1}{2}$$
$$\rightsquigarrow x = 2\sqrt{2}$$

2. Adja meg a valószínűségi változó várható értékét és szórását a következő eloszlásfüggvények esetében (amennyiben léteznek)!

(a)

$$F(x) \doteq \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq 0 \\ \sin(x) & \text{ha } 0 < x \leq \frac{\pi}{2} \\ 1 & \text{ha } \frac{\pi}{2} < x \end{cases}$$

(b)

$$F(x) \doteq \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq 0 \\ x^2 & \text{ha } 0 < x \leq 1 \\ 1 & \text{ha } 1 < x \end{cases}$$

(c)

$$F(x) \doteq \begin{cases} \frac{x}{x+1} & \text{ha } x > 0 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

Megoldás

- (a) A 7. gyakorlat 1. feladat b pontja alapján ez eloszlásfv, a hozzá tartozó sűrűségfüggvény $f(x) = \cos(x)$, ha $0 < x < \frac{\pi}{2}$ (egyébként 0).

$$\begin{aligned} E(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{x}_f \underbrace{\cos(x)}_{g'} dx = [x \sin(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\pi/2} \sin(x) \\ &= [x \sin(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} - [-\cos(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} 1 - (0 - (-1)) = \frac{\pi}{2} - 1 \end{aligned}$$

A szóráshoz pedig, hasonlóan parciális integrálással

$$\begin{aligned} E(\xi^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cos(x) dx = [x^2 \sin(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x \sin(x) dx \\ &= \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - 2 \left(\underbrace{[x(-\cos(x))]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{0-0} - \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} -\cos(x)}_{[\sin(x)]_0^{\frac{\pi}{2}}=1} \right) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - 2 \end{aligned}$$

A szórásnégyzet pedig:

$$\begin{aligned} \sigma^2(x) &= E(\xi^2) - E^2(\xi) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - 2 - \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)^2 = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - 2 - \left(\frac{\pi^2}{4} - 2\frac{\pi}{2} + 1\right) \\ &= \pi - 3 \end{aligned}$$

- (b) A 7. gyakorlat 1. feladat c pontja alapján ez eloszlásfv, a hozzá tartozó sűrűségfüggvény $f(x) = 2x$ ha $0 < x < 1$

$$E(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_0^1 2x^2 dx = 2 \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

A szórásnégyzet pedig:

$$E(\xi^2) - E^2(\xi) = \int_0^1 2x^3 dx - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 2 \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{2} - \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

- (c) A 7. gyakorlat 1. feladat d pontja alapján ez eloszlásfv, a hozzá tartozó sűrűségfüggvény $f(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$, ha $x > 0$

$$E(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_0^{\infty} \frac{x}{(x+1)^2}$$

Tudjuk hogy a várható érték létezik és véges ha

$$A \stackrel{\circ}{=} \int_{\mathbb{R}} |x| f(x) dx < \infty$$

itt

$$A = \int_0^{\infty} \frac{x}{(x+1)^2} = \int_0^1 \frac{x}{(x+1)^2} + \int_1^{\infty} \frac{x}{x^2 + 2x + 1}$$

Viszont tudjuk hogy $x > 1$ esetén $x^2 + 2x + 1 < 4x^2 = x^2 + 2x^2 + x^2 \rightarrow \frac{1}{x^2 + 2x + 1} > \frac{1}{4x^2}$

$$\rightsquigarrow A \geq \int_0^1 \frac{x}{(x+1)^2} + \underbrace{\int_1^{\infty} \frac{x}{4x^2}}_{\int_1^{\infty} \frac{1}{4x} \rightarrow \infty}$$

Másrészt itt A egybeesik a függvény pozitív részének az integráljával (mivel $x > 1$), így a várható érték létezik, csak végtelen. Megjegyzés: A Cauchy eloszlásnál az volt a helyzet hogy a pozitív és a negatív rész is végtelen volt, így a $\infty - \infty$ (indefinite) alak miatt nem létezett a várható érték.

3. Adja meg a valószínűségi változó várható értékét és szórását a következő sűrűségfüggvények esetében (amennyiben léteznek)!

(a)

$$f(x) \doteq \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{ha } 1 < x \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

(b)

$$f(x) \doteq \begin{cases} \sin(x) & \text{ha } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

(c)

$$f(x) \doteq \begin{cases} \cos(x) & \text{ha } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

Megoldás

(a)

$$\int_1^\infty x \frac{1}{x^2} dx = \int_1^\infty \frac{1}{x} dx = [\ln(x)]_1^\infty \rightarrow \infty$$

(b)

$$E(\xi) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin(x) dx = \underbrace{[x(-\cos(x))]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{0-0} - \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} -\cos(x) dx}_{[\sin(x)]_0^{\frac{\pi}{2}}=1} = 1$$

$$\sigma^2(\xi) = \underbrace{\int_{-\infty}^\infty x^2 f(x) dx}_{E(\xi^2)} - \left(\int_{-\infty}^\infty x f(x) dx \right)^2$$

$$E(\xi^2) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin(x) dx = \underbrace{[x^2(-\cos(x))]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{0-0} - \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} -2x \cos(x) dx}_{2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos(x) = 2(\frac{\pi}{2}-1) \text{ lásd 2.a}}$$

$$\sigma^2(\xi) = \pi - 2 - 1 = \pi - 3$$

vegyük észre a szimmetriát a 2.a feladattal.

(c) lásd a 2.a feladatot

4. Egy tehén napi tejhozama normális eloszlású valószínűségi változó $m=22,1$ liter várható értékkel és $\sigma=1,5$ liter szórással. Mi annak a valószínűsége, hogy egy adott napon a tejhozam

- (a) kevesebb, mint 23 liter
- (b) több, mint 25 liter
- (c) 23 és 25 liter közé esik
- (d) Mekkora valószínűséggel esik a napi tejhozam $m - \sigma$ és $m + \sigma$ közé
- (e) Legfeljebb mennyi tejet ad naponta a tehenek legkevesbé tejelő 70%-a?
- (f) Legfeljebb mennyi tejet ad naponta a tehenek legkevesbé tejelő 40%-a?

Megoldás $E(\xi) = m = 22.1 \quad \sigma = 1.5$

- (a) $P(\xi < 23) = F(23) = \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{23-22.1}{1.5}\right) = \Phi(0.6) = 0.7257$
- (b) $P(\xi > 25) = 1 - F(25) = 1 - \Phi\left(\frac{25-22.1}{1.5}\right) = 1 - \Phi(1.93) = 1 - 0.9732 = 0.0268$
- (c) $P(23 < \xi < 25) = F(25) - F(23) = 0.9732 - 0.7257 = 0.2475$
- (d)

$$\begin{aligned} P(m - \sigma < \xi < m + \sigma) &= F(m + \sigma) - F(m - \sigma) = \\ &= \Phi\left(\frac{(m + \sigma) - m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{(m - \sigma) - m}{\sigma}\right) = \Phi(1) - \Phi(-1) = \\ &= \Phi(1) - (1 - \Phi(1)) = 2\Phi(1) - 1 = 2 \cdot 0.8413 - 1 = 0.6826 \end{aligned}$$

- (e) $P(\xi < x) = 0.7, x = ?$

$$0.7 = \Phi\left(\frac{x - 22.1}{1.5}\right) \quad 0.7 \approx 0.6985 = \Phi(0.52) \quad \rightsquigarrow \frac{x - 22.1}{1.5} \approx 0.52 \quad \rightsquigarrow x \approx 22.88$$

- (f) $P(\xi < x) = 0.4, x = ?$

$$\begin{aligned} 0.4 &= \Phi\left(\frac{x - 22.1}{1.5}\right) \quad 0.4 \approx 0.5987 = \Phi(0.25) \\ &\rightsquigarrow \Phi(-0.25) = 1 - \Phi(0.25) \approx 0.4 \quad \rightsquigarrow \frac{x - 22.1}{1.5} = -0.25 \rightsquigarrow x \approx 21.73 \end{aligned}$$

5. Egy populációban a férfiak testmagassága normális eloszlású, átlaga 180 cm, szórása 20 cm. Mi annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott férfi

- (a) 160 cm-nél alacsonyabb
- (b) 190 cm-nél magasabb
- (c) magassága 160 és 190 cm közé esik
- (d) Ugyanebben a populációban mely testmagasság-érték alatti a férfiak 10%-a?
- (e) Ugyanebben a populációban mely testmagasság-érték fölötti a férfiak 20%-a?

Megoldás $E(\xi) = m = 180 \quad \sigma = 20$

- (a) $P(\xi < 160) = F(160) = \Phi\left(\frac{160-180}{20}\right) = 1 - \Phi(1) = 1 - 0.8413 = 0.1587$
- (b) $P(\xi < 190) = 1 - F(190) = 1 - \Phi\left(\frac{190-180}{20}\right) = 1 - \Phi(0.5) = 1 - 0.6915 = 0.3085$
- (c) $P(160 < \xi < 190) = F(190) - F(160) = 0.6915 - 0.1587 = 0.5328$
- (d) $P(\xi < x) = 0.1 = \Phi\left(\frac{x-180}{20}\right), x = ?$

$$\begin{aligned} 0.9 &\approx 0.8997 = \Phi(1.28) \Rightarrow 0.1 \approx 1 - \Phi(1.28) = \Phi(-1.28) \\ \rightsquigarrow \frac{x-180}{20} &= -1.28 \rightsquigarrow x \approx 154.4 \end{aligned}$$

$$(e) \quad 0.2 = P(\xi > y) = 1 - P(\xi < y) \Rightarrow 0.8 = P(\xi < y) = \Phi\left(\frac{y-180}{20}\right)$$

$$0.8 \approx 0.7995 = \Phi(0.84) \rightsquigarrow \frac{y-180}{20} = 0.84 \rightsquigarrow y \approx 196.8$$