

Valószínűségszámítás gyakorlat

Csercsik Dávid

2017 ősz

7. hét - Eloszlásfüggvények - folytonos eset, sűrűségfüggvények és exponenciális eloszlás

1. Az alábbi függvények közül melyik eloszlásfüggvénye egy folytonos valószínűségi változónak? Az eloszlásfüggvények esetén adja meg a sűrűségfüggvényt, valamint a $P(0 < \xi < 1)$ valószínűséget!

(a)

$$F(x) \stackrel{\circ}{=} \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq 0 \\ \cos(x) & \text{ha } 0 < x \leq \frac{\pi}{2} \\ 1 & \text{ha } \frac{\pi}{2} < x \end{cases}$$

(b)

$$F(x) \stackrel{\circ}{=} \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq 0 \\ \sin(x) & \text{ha } 0 < x \leq \frac{\pi}{2} \\ 1 & \text{ha } \frac{\pi}{2} < x \end{cases}$$

(c)

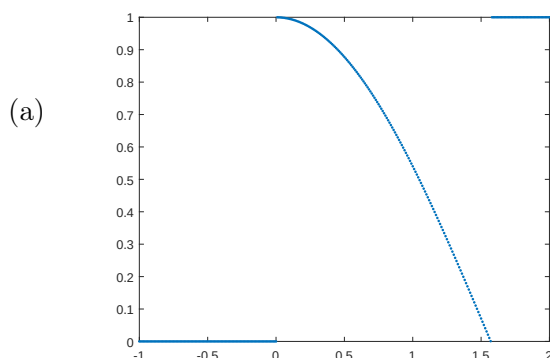
$$F(x) \stackrel{\circ}{=} \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq 0 \\ x^2 & \text{ha } 0 < x \leq 1 \\ 1 & \text{ha } 1 < x \end{cases}$$

(d)

$$F(x) \stackrel{\circ}{=} \begin{cases} \frac{x}{x+1} & \text{ha } x > 0 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

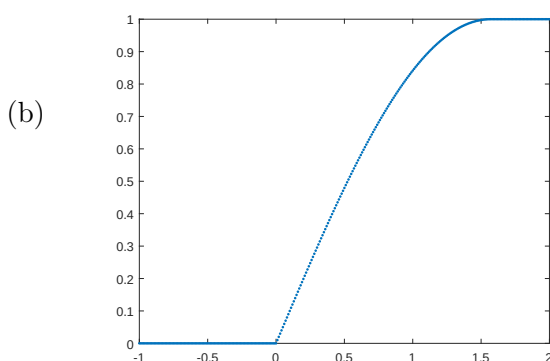
Megoldás. Az eloszlásfv 4 tulajdonságát kell leellenőriznünk.

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$
- Monoton nő
- Balról folytonos



$$F(x) \stackrel{\circ}{=} \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq 0 \\ \cos(x) & \text{ha } 0 < x \leq \frac{\pi}{2} \\ 1 & \text{ha } \frac{\pi}{2} < x \end{cases}$$

Nem monoton nő $\rightsquigarrow$ nem eloszlásfv.



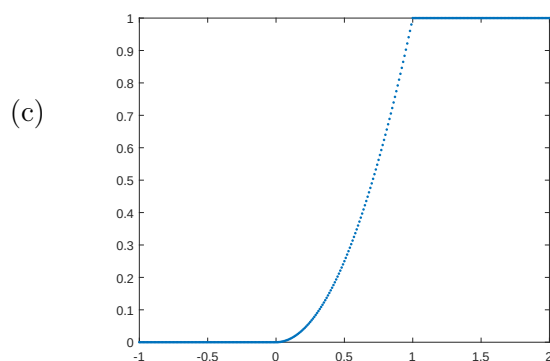
$$F(x) \stackrel{\circ}{=} \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq 0 \\ \sin(x) & \text{ha } 0 < x \leq \frac{\pi}{2} \\ 1 & \text{ha } \frac{\pi}{2} < x \end{cases}$$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$,
monoton nő, balról folytonos $\rightsquigarrow$ eloszlásfv.

A sűrűségfv az eloszlásfv deriváltja. Így:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq 0 \\ \cos(x) & \text{ha } 0 < x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{ha } \frac{\pi}{2} < x \end{cases}$$

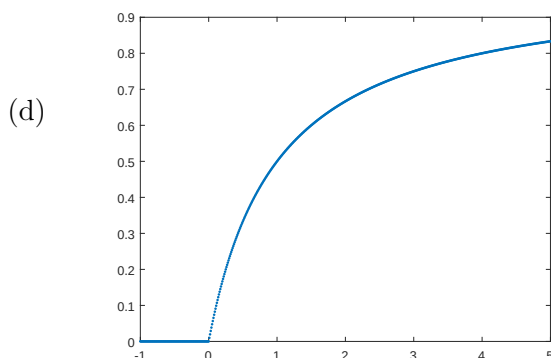
Valamint: $P(0 < x < 1) = \int_0^1 f(x)dx = F(1) - F(0) = \sin(1) = 0.8415$.



$$F(x) \stackrel{\circ}{=} \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq 0 \\ x^2 & \text{ha } 0 < x \leq 1 \\ 1 & \text{ha } 1 < x \end{cases}$$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$,
monoton nő, balról folytonos $\rightsquigarrow$ eloszlásfv.

Sűrűségfve: $f(x) = 2x$ $[0, 1]$ -en (egyébként 0). Valamint: $P(0 < x < 1) = \int_0^1 f(x)dx = F(1) - F(0) = 1$.



$$F(x) \doteq \begin{cases} \frac{x}{x+1} & \text{ha } x > 0 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$,
monoton nő, balról folytonos $\rightsquigarrow$ eloszlásfv.

(a monoton növekvést a fv deriváltja alapján is lehet ellenőrizni)

Sűrűségfve: $f(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$ ha $x > 0$ egyébként 0.

Valamint: $P(0 < x < 1) = \int_0^1 f(x)dx = F(1) - F(0) = \frac{1}{2}$.

2. Az alábbi függvények közül melyik sűrűségfüggvénye egy folytonos valószínűségi változónak? A sűrűségfüggvények esetében adja meg a hozzájuk tartozó eloszlásfüggvényt is!

(a)

$$f(x) \doteq \begin{cases} \sin(x) & \text{ha } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

(b)

$$f(x) \doteq \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{ha } 1 < x \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

(c)

$$f(x) \doteq \begin{cases} \sin(x) & \text{ha } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

(d)

$$f(x) \doteq \begin{cases} \cos(x) & \text{ha } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

Megoldás.

(a)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin(x)dx = -\cos(x)|_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} = 1$$

Emiatt lehetne sűrűségfv, de nem pozitív mindenütt ($[-\pi/2 - 0[$ -n negatív) $\rightsquigarrow$ Nem sűrűségfv.

(b)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^{\infty} = 0 + 1 = 1$$

és nemnegatív $\rightsquigarrow$ sűrűségfv.

Eloszlásfüggvénye:

$$F(x) = \begin{cases} \int_1^x \frac{1}{x^2}dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^x = 1 - \frac{1}{x} & \text{ha } x > 1 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

(c)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)dx = [-\cos(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0 + 1 = 1$$

és nem negatív $\rightarrow$ sűrűségfv. Eloszlásfüggvénye:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq 0 \\ 1 - \cos(x) & \text{ha } 0 < x \leq \frac{\pi}{2} \\ 1 & \text{ha } \frac{\pi}{2} < x \end{cases}$$

(d)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)dx = [\sin(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

és nem negatív $\rightarrow$ sűrűségfv. Eloszlásfüggvénye:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq 0 \\ \sin(x) & \text{ha } 0 < x \leq \frac{\pi}{2} \\ 1 & \text{ha } \frac{\pi}{2} < x \end{cases}$$

3. Egy baleseti sebészeten a betegek érkezése között eltelt idő exponenciális eloszlású, átlaga 40 perc. Mi a valószínűsége annak, hogy egy beteg érkezése után

- (a) negyed órán belül érkezik a következő beteg?
- (b) legalább fél óráig nem jön újabb beteg?
- (c) mennyi időn belül érkezik a betegek korán érkező fele?

Megoldás. A várható érték 40 perc, akkor az eloszlás paramétere $\alpha = \frac{1}{40}$ (mert exp. eo esetén $E(\xi) = \frac{1}{\alpha}$). Tudjuk hogy $F_{\xi}(x) = 1 - e^{-\alpha x}$

- (a) $P(\xi < 15) = F(15) = 1 - e^{-\frac{1}{40}15}$
- (b) $P(\xi > 30) = 1 - F(30) = 1 - 1 + e^{-\frac{1}{40}30}$
- (c) $P(\xi < x) = 0.5 = F(x) = 1 - e^{-\frac{1}{40}x}$ azaz $x = -40 \ln(0.5)$

4. Egy korallfaj polipjainak életideje exponenciális eloszlású, átlagos életidejük 3 év.

- (a) Az egyedek hány százaléka él legfeljebb 3 évig?
- (b) Az egyedek hány százaléka ér meg 3 évet?
- (c) Az egyedek hány százaléka ér meg 4 évet?
- (d) 0 éves egyedekből kiindulva várhatóan hány év múlva lesz még életben éppen az egyedek harmada?
- (e) 0 éves egyedekből kiindulva várhatóan hány év alatt pusztul el éppen az egyedek 80%-a?

Megoldás. A várható érték 3 év, akkor az eloszlás paramétere $\alpha = \frac{1}{3}$.

- (a) $P(\xi < 3) = F(3) = 1 - e^{-\frac{1}{3}3} = 1 - e^{-1} = 0.632 \Rightarrow 63.2\%$
- (b) $P(\xi > 3) = 1 - F(3) = 1 - 1 + e^{-\frac{1}{3}3} = e^{-1} \Rightarrow 36.8\%$

- (c) $P(\xi > 4) = 1 - F(4) = 1 - 1 + e^{-\frac{1}{3}4} \Rightarrow 26.4\%$
- (d) $P(\xi > x) = \frac{1}{3} \rightsquigarrow P(\xi < x) = 1 - P(\xi > x) = \frac{2}{3}$ másrészt tudjuk hogy
 $P(\xi < x) = 1 - e^{-\frac{1}{3}x} \rightsquigarrow 1 - e^{-\frac{1}{3}x} = \frac{2}{3} \rightsquigarrow e^{-\frac{x}{3}} = \frac{1}{3} \rightsquigarrow x = -3\ln\frac{1}{3} = 3.296$
- (e) $P(\xi < x) = 0.8 = 1 - e^{-\frac{1}{3}x}$ azaz $x = -3\ln(0.2)$

5. Egy alkatrész élettartama (években) 0.2 paraméterű exponenciális eloszlású.

- (a) Mi a valószínűsége, hogy az élettartam meghaladja a 3 évet?
- (b) Feltéve, hogy már 5 éve működik, mi a valószínűsége, hogy további 3 évig még használható lesz?

Megoldás.

- (a) $P(\xi > 3) = 1 - (1 - e^{-0.2 \cdot 3}) = 0.5488$
- (b) Az örökifjú tulajdonság miatt $= P(\xi > 3)$. Ellenőrzés:

$$\begin{aligned} P(\xi > 8 | \xi > 5) &= \frac{P(\xi > 8)}{P(\xi > 5)} = \frac{1 - P(\xi < 8)}{1 - P(\xi < 5)} \\ &= \frac{1 - F(8)}{1 - F(5)} = \frac{1 - (1 - e^{-0.2 \cdot 8})}{1 - (1 - e^{-0.2 \cdot 5})} = 0.5488 \end{aligned}$$

6. Egy bizonyos fajta villanykörte élettartama exponenciális eloszlású. A tapasztalatok azt mutatják, hogy 25%-uk éli túl a 4 évet. Hány százalékuk éli túl a 8 évet?

Megoldás. Keressük a paramétert. $P(\xi > 4) = 1 - (1 - e^{-\alpha 4}) = 0.25$

Azaz $\alpha = \frac{\ln(0.25)}{-4} = 0.3466 \approx 0.35$ Ebből $F(x)$ meghatározható. A kérdéses mennyiség:
 $1 - F(8) = 1 - (1 - e^{-0.35 \cdot 8}) = 0.0608 \Rightarrow 6\%$

7. Telefonálni szeretnék, de az előttem lévő két telefonfülke mindegyike foglalt. Az egyikben egy nő beszél 10 perc várhatóértékű exponenciális eloszlással, míg a másikban egy férfi beszél 5 perc várhatóértékű exponenciális eloszlással. Adjuk meg a várakozási időm eloszlását.

Megoldás. Legyen a nő beszélgetésének hossza ξ_1 , a férfié ξ_2 .

ξ_1 -re: $\frac{1}{\alpha_1} = 10$, ξ_2 -re: $\frac{1}{\alpha_2} = 5$. Nevezzük ξ_3 -nak az én várakozási időmet. Akkor kell x percnél többet várnom ($\xi_3 > x$) ha $\xi_1 > x$ és $\xi_2 > x$. Tegyük fel hogy ξ_1 és ξ_2 függetlenek (pl nem egymással beszélnek a 2 telefonfülkéből). Ekkor a metszet valószínűsége szorzattal számolható:

$$\begin{aligned} P(\xi_3 > x) &= P(\xi_1 > x, \xi_2 > x) = P(\xi_1 > x)P(\xi_2 > x) = (1 - F_1(x))(1 - F_2(x)) = \\ &= e^{-\frac{1}{10}x} e^{-\frac{1}{5}x} = e^{-\frac{3}{10}x} \end{aligned}$$

Tehát a várakozási időm eloszlása (az eloszlásfüggvény):

$$P(\xi_3 < x) = 1 - e^{-\frac{3}{10}x}$$

ami jól láthatóan szintén exponenciális eloszlású.