

Valószínűesszámítás gyakorlat

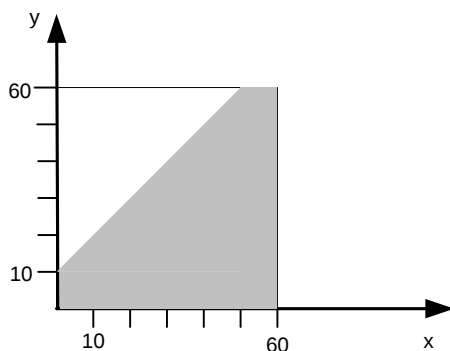
Csercsik Dávid

2017 ősz

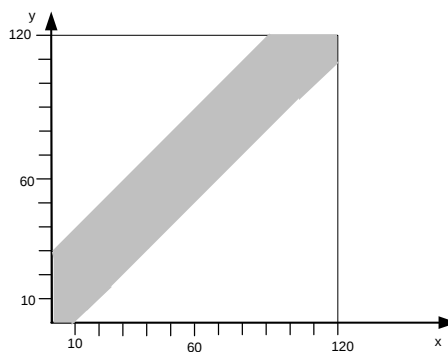
6. hét - Geometriai valószínűség és szórás

1. Karola és Lőrinc randiznak a Ferenciek terén. Mindketten véletlen időpontban érkeznek dél és 1 óra között (egyenletes eloszlással). Mi az esélye hogy Lőrincnek 10 percnél kevesebbet kell várakoznia?

Megoldás. Legyen x Lőrinc érkezése és y Karola érkezése. Geometriai valószínűségekre lehet visszavezetni a feladatot $0 \leq x \leq 60$, $0 \leq y \leq 60$. Legyen a kérdéses terület $T = \{(x, y) \in \Omega : y < x + 10\}$ Hiszen az egyenlőtlenség adja meg a fent definiált kérdéses intervallumot. Az eseményteret tekintsük egy 60 oldalhosszúságú négyzetnek: ekkor az $y = x + 10$ egyenest behúzva a kérdéses területünk az egyenes alatti terület. Ez könnyen kiszámítható, ha a fölötte levő háromszög területét kivonjuk az eredeti négyzet területéből. $T = 60^2 - \frac{50^2}{2}$. A megoldás pedig: $P = \frac{T}{60^2}$.



1. ábra. 1. feladat



2.feladat

2. Anna és Béla megbeszélik, hogy 8 és 10 óra között találkoznak. Béla fél órát hajlandó várni Annára, míg Anna csak 10 percet Bélára. Mindketten egyenletes eloszlás szerint véletlenszerűen érkeznek a helyszínre. Mi a valószínűsége, hogy találkoznak?

Megoldás. x - Anna érkezése, y - Béla érkezése. A fenti feladathoz hasonlóan kell eljárunk, csak már két egyenletet kell a kérdéses területnek kielégítenie. Béla vár 30 percet Annára: $T_B = \{(x, y) \in \Omega : y < x + 30\}$ feltéve, hogy x Béla érkezése y pedig Annáé. Anna vár 10 percet Bélára: $T_A = \{(x, y) \in \Omega : x < y + 10\}$. A kérdéses

terület a két terület metszete: $T = T_B \cap T_A = \{(x, y) \in \Omega : x - 30 < y < x + 10\}$.

Tehát a megoldás ez esetben így módosul: $P = \frac{120^2 - \frac{110^2}{2} - \frac{90^2}{2}}{120^2}$

3. Egy egységnyi hosszú szakaszon kiválasztunk taláломra 2 pontot egyenletes eloszlás szerint. Ezek három szakaszra bontják az eredeti szakaszt. Mi a valószínűsége, hogy ezekből szerkeszthető háromszög?

Megoldás.

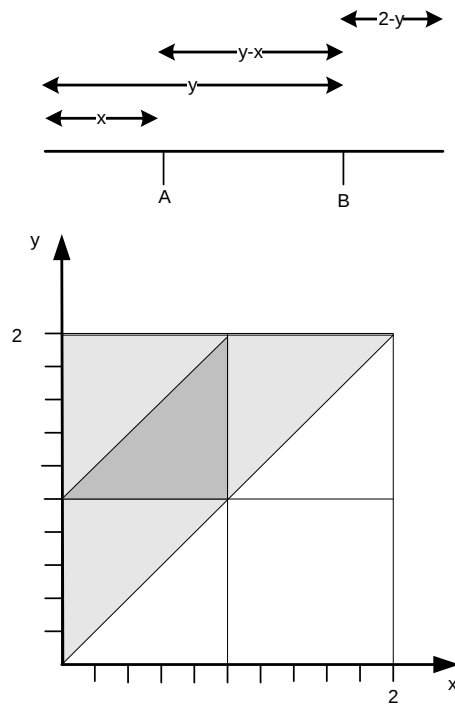
A könnyebb számolás érdekében vegyünk egy két egység hosszú szakaszt. Ezen vegyük fel A és B pontokat úgy, hogy $\overline{OA} = x < \overline{OB} = y < 2$ A háromszög-egyenlőtlenség három egyenlőtlenséget határoz meg:

$$x < y - x + 2 - y$$

$$y - x < x + 2 - y$$

$$2 - y < x + y - x$$

Ezeket leegyszerűsítve kapjuk, hogy $x < 1$, $y < x + 1$ és $1 < y$.



Így a kedvező esetnek megfelelő terület $= 1/2$, míg a teljes eseménytérnek megfelelő terület ($y > x$ miatt) $= 2$, tehát a valószínűség $= 1/4$.

4. Annak valószínűsége, hogy egy adott üzembe a szállítmány 8 és 12 között megérkezik 0.8. A szállítmány 8 óra előtt nem érkezik meg. A szállítmány 11-ig nem érkezett meg. Mennyi a valószínűsége, hogy 11 és 12 között még megérkezik? (Feltesszük, hogy a megérkezés időpontja egyenletes eloszlású egy intervallumon.)

Megoldás.

Egy egydimenziós egyenletes eloszlás valószínűségét tekintjük. Ennek eloszlásfüggvénye

$[a,b]$ intervallum esetén:

$$F(x) \stackrel{\circ}{=} \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{ha } a < x \leq b \\ 1 & \text{ha } b < x \end{cases}$$

Viszont figyeljünk oda, hogy csak 0.8 a $[8,12]$ intervallumon a valség, ezért meg kell találnunk a valódi intervallumot. Az egyenletes eloszlás miatt a valség $[8,9]$ között 0.2 ($=0.8/4$) $[8,10]$ között 0.4 etc. azaz a valódi intervallum, mely a teljes azaz 1 valséget lefedti az a $[8,13]$. Ekkor az eloszlásfv:

$$F(x) \stackrel{\circ}{=} \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq a \\ \frac{x-8}{13-8} & \text{ha } a < x \leq b \\ 1 & \text{ha } b < x \end{cases}$$

Ekkor annak a valsége, hogy 11 és 12 között érkezik meg minden más feltétel nélkül: $P(11 < \xi < 12) = F(12) - F(11) = 0.8 - 0.6 = 0.2$. Viszont azt is tudjuk, hogy 11 előtt nem érkezett meg, azaz azt a feltételes valséget keressük, melynek feltétele, hogy $\xi > 11$, aminek a fenti valséget növelnie kell. $P(\xi > 11) = 1 - P(\xi \leq 11) = 1 - F(11) = 0.4$ Tehát: $P(11 < \xi < 12 | \xi > 11) = \frac{P(11 < \xi < 12)}{P(\xi > 11)} = \frac{0.2}{0.4} = 0.5$.

5. Kockadobás: Legyen ξ a dobott érték. Mi ξ várható értéke és szórása?

Megoldás.

A várható érték: $E(\xi) = \sum_{i=1}^6 \frac{1}{6}i = \frac{7}{2} = 3.5$

ξ	$\xi - E(\xi)$	$(\xi - E(\xi))^2$
1	-2.5	6.25
2	-1.5	2.25
3	-0.5	0.25
4	0.5	0.25
5	1.5	2.25
6	2.5	6.25

A szórásnégyzet (σ^2) definíció szerint: $\sigma^2(\xi) \stackrel{\circ}{=} E((\xi - E(\xi))^2)$.
 $(\xi - E(\xi))^2$ értéke

- $\frac{1}{3}$ valószínűséggel 0.25
- $\frac{1}{3}$ valószínűséggel 2.25
- $\frac{1}{3}$ valószínűséggel 6.25

$$\rightsquigarrow \sigma^2 = \frac{1}{3}0.25 + \frac{1}{3}2.25 + \frac{1}{3}6.25 = \frac{35}{12}$$

A szórásnégyzet máshogy: $\sigma^2 = E(\xi^2) - E^2(\xi)$.

$$E(\xi^2) = \frac{1}{6}1^2 + \frac{1}{6}2^2 + \frac{1}{6}3^2 + \frac{1}{6}4^2 + \frac{1}{6}5^2 + \frac{1}{6}6^2 = \frac{91}{6}$$

$$\sigma^2 = \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{35}{12}.$$

6. 2 kockával dobunk: Legyen ξ a dobott értékek különbsége. Mi ξ várható értéke és szórása?

Megoldás. Minden lehetséges különbséget fel kell írunk és megszámlálni, hogy mennyi van belőlük pl: 0 jön ki, ha: 1-1, 2-2, 3-3, 4-4, 5-5, 6-6 azaz hat lehetséges módon. Az öt például két lehetséges módon jön ki: 1-6, 6-1 dobások esetén. Ezt az analógiát követve az alábbi értékeket kapjuk: 0-6db, 1-10db, 1-8db, 3-6db, 4-4db, 5-2db; Ezek alapján az egyes valségek (Ha ξ_i jelöli ξ lehetséges értékeit):

$$\begin{aligned} P(\xi = 0) &= \frac{6}{36} \\ P(\xi = 1) &= \frac{10}{36} \\ P(\xi = 2) &= \frac{8}{36} \\ P(\xi = 3) &= \frac{6}{36} \\ P(\xi = 4) &= \frac{4}{36} \\ P(\xi = 5) &= \frac{2}{36} \end{aligned}$$

$$E(\xi) = \sum \xi_i P(\xi = \xi_i) = \sum_{i=0}^5 i P(\xi = \xi_i)$$

$$\text{A szóráshoz pedig } E(\xi^2) = \sum_{i=0}^5 i^2 P(\xi = \xi_i). \text{ Ebből } \sigma^2 = E(\xi^2) - E^2(\xi)$$

Megjegyzés: Ha úgy gondolkodunk hogy 'nem különböztetjük meg a kockákat', és azt mondjuk hogy az összes eset = 21 (1-1 1-2 1-3 1-4 1-5 1-6 2-2 2-3 2-4 2-5 2-6 3-3 3-4 3-5 3-6 4-4 4-5 4-6 5-5 5-6 6-6) És ebből választjuk ki a kedvező eseteket egy adott különbséghez hibás következtetésre jutunk, mert az összes esetként felsorolt eseteknek nem azonos a bekövetkezési valószínűsége: Két 1-est valójában $1/36$ eséllyel dobunk, míg '1-2'-t dobhaunk 2 féleképpen is így esélye $2/36$ (1-2, 2-1).

7. A ξ valószínűségi változó lehetséges értékei és a hozzájuk tartozó valószínűségek:

érték	valség
-1	$\frac{1}{12}$
0	$\frac{5}{12}$
1	$\frac{1}{4}$
2	$\frac{1}{4}$

Határozzuk meg ξ szórását!

Megoldás.

$$E(\xi) = -1 \frac{1}{12} + 0 + \frac{1}{4} + 2 \frac{1}{4}$$

$$\text{A szórása pedig: } D(\xi) = \sqrt{\underbrace{\frac{1}{12} + 0 + \frac{1}{4} + 4 \frac{1}{4}}_{E(\xi^2)} - \underbrace{\left(-1 \frac{1}{12} + 0 + \frac{1}{4} + 2 \frac{1}{4}\right)^2}_{E^2(\xi)}}$$

8. Egy cinkelt érmével egymástól függetlenül n-szer dobunk. A fejdobás valsége 0.7 az egyes dobásoknál. Legyen ξ az a valószínűségi változó, hogy hányszor dobunk fejet. Adjuk

meg ξ eloszlását ($n = 5$, ill. általános n esetén)! Mennyi ξ várható értéke ($n=5$) és szórása?

Megoldás. Annak az eseménynek a valószínűsége, hogy k darab bekövetkezik és $5-k$ darab nem következik be a függetlenség miatt $0.7^k 0.3^{5-k}$. Illetve az $n=5$ esetén ki kell választani az öt dobásból k darabot, mely a fejdobás száma lesz ezért még meg kell szorozni a kiválasztás valószínűségével. $P(\xi = k) = \binom{5}{k} 0.7^k 0.3^{5-k}$. Általánosan pedig: $P(\xi = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ Binomiális eloszlás. $E(\xi) = np$ és $D(\xi) = \sqrt{np(1-p)}$

9. 3 piros és 5 kék golyóból visszatevés nélkül húzunk 4 darabot. Mi a húzott kékek számának szórása?

Megoldás. Korábbi gyakorlaton már találkoztunk vele. Hipergeom eloszlás

$N = 8$, $K = 5$, $n = 4$. A korábbiak alapján: $P(\xi = 1) = 0.0714$, $P(\xi = 2) = 0.4286$, $P(\xi = 3) = 0.4286$, $P(\xi = 4) = 0.0714$. A várható érték tudjuk hogy $n \frac{K}{N} = 2.5$ (ez látszik is, erre az értékre szimmetrikus az eloszlás).

Szórás:

$(\xi - E(\xi))^2$ értéke

- 0.0714 valószínűséggel $-1.5^2 = 2.25$
- 0.4286 valószínűséggel $-0.5^2 = 0.25$
- 0.4286 valószínűséggel $0.5^2 = 0.25$
- 0.0714 valószínűséggel $1.5^2 = 2.25$

Ebből

$$\sigma^2 = 2 \cdot 0.0714 \cdot 2.25 + 2 \cdot 0.4286 \cdot 0.25 = 0.5356$$

$$\text{Máshogy: } E(\xi^2) = 0.0714(1^2 + 4^2) + 0.4286(2^2 + 3^2) = 6.7856$$

$$\rightsquigarrow \sigma^2(x) = E(\xi^2) - E^2(\xi) = 6.7856 - 2.5^2 = 0.5356$$

10. Addig dobunk egy kockával, míg hatos nem lesz. Mi az eloszlás? Mi a várható érték és a szórás?

Megoldás. Ezzel a feladattal is találkoztunk már. Jelöljük most X -el a valószínűségi változót:

Geometriai eloszlás $p = \frac{1}{6}$ paraméterrel.

$E(X) = \frac{1}{p}$ (geometriai eloszlás várható értéke).

A szórásnégyzet:

$$\begin{aligned}
 \sigma^2(X) &= E(X^2) - E(X)^2 = p \sum_{k=1}^{\infty} k^2 (1-p)^{k-1} - \frac{1}{p^2} \\
 &= p \sum_{k=1}^{\infty} k(k+1)(1-p)^{k-1} - p \sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1} - \frac{1}{p^2} \\
 &= p \frac{d^2}{dp^2} \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k+1} + p \frac{d}{dp} \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^k - \frac{1}{p^2} \\
 &= p \frac{d^2}{dp^2} \left(\sum_{k=0}^{\infty} (1-p)^k \cdot (1-p)^2 \right) + p \frac{d}{dp} \left(\sum_{k=0}^{\infty} (1-p)^k \cdot (1-p) \right) - \frac{1}{p^2} \\
 &= p \frac{d^2}{dp^2} \left(\frac{1}{1-(1-p)} \cdot (1-p)^2 \right) + p \frac{d}{dp} \left(\frac{1}{1-(1-p)} \cdot (1-p) \right) - \frac{1}{p^2} \\
 &= p \frac{d^2}{dp^2} \left(\frac{(1-p)^2}{p} \right) + p \frac{d}{dp} \left(\frac{1-p}{p} \right) - \frac{1}{p^2} \\
 &= p \cdot \frac{2}{p^3} - p \cdot \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{2}{p^2} - \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p}
 \end{aligned}$$