

Valószínűesszámítás gyakorlat

Csercsik Dávid

2017 ősz

5. hét: Geometrikus, hipergeometrikus és Poisson eloszlás. Várható érték.

1. Addig dobunk egy kockával, míg 6-os nem lesz. Legyen ξ a dobásaink száma (valószínűségi változó). Mi lesz ξ eloszlása?

$P(4\text{-re kapunk először } 6\text{-ost})=?$ $P(\xi > 7)=?$ $P(\xi < 5)=?$

Megoldás. $\frac{1}{6}$ paraméterű geometriai eloszlás.

$$P(\xi = i) = \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{i-1} \frac{1}{6}$$

Az eloszlás megadása ekvivalens azzal hogy ξ minden lehetséges értékére megmondom a valószínűséget (lásd lejjebb).

- $P(\xi = 4) = \left(1 - \frac{1}{6}\right)^3 \frac{1}{6}$
- $P(\xi > 7) = 1 - \sum_{i=1}^7 P(\xi = i)$
- $P(\xi < 5) = \sum_{i=1}^4 P(\xi = i)$

2. Egy 'szabálytalan' érmével dobva 0.4 valószínűséggel fej az eredmény. Mi a valószínűsége annak hogy többször egymás után feldobva az érmét páros sorszámú (vagy 0) dobást követően (másszóval páratlanadik dobásra) lesz először fej az eredmény?

Megoldás.

Mértani sort írhatunk fel:

$$P(\xi = 2k + 1) = \sum_{k=0}^{\infty} (1 - 0.4)^{2k} \cdot 0.4 = \sum_{k=0}^{\infty} 0.36^k \cdot 0.4 = \frac{0.4}{1 - 0.36} = 0.625$$

3. Egy tálban 12 borsószem van, közülük 9 gömbölyű és 3 szögletes. Véletlenszerűen kiveszünk egyszerre hatot. Mi a valószínűsége annak hogy közülük legalább 5 gömbölyű?

Megoldás. Visszatevés nélküli mintavétel: Adott N db termék, melyből K db rendelkezik egy bizonyos tulajdonsággal (itt: gömbölyű, de lehet pl selejtes is). N darab

termékből n -et kiválasztva arra vagyunk kíváncsiak, hogy mennyi a valószínűsége, hogy pontosan k darab lesz belőle gömbölyű. Ezt hipergeometriai eloszlással számolhatjuk ki, mely úgy adódik, hogy a gömbölyűekből k darabot választunk ki, míg a nem gömbölyűből $n-k$ darabot, azaz:

$$P(\xi = k) = \frac{\binom{K}{k} \binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}} \text{ ahol } N=12, K=9, n=6, k=5. \text{ Viszont a kérdés:}$$

$$P(\xi \geq 5) = \frac{\binom{9}{5} \binom{3}{1}}{\binom{12}{6}} + \frac{\binom{9}{6} \binom{3}{0}}{\binom{12}{6}} = 0.4091 + 0.0909 = 0.5$$

4. 3 piros és 5 kék golyóból visszatevés nélkül húzunk 4 darabot. Mi az eloszlása a húzott kékek számának? Mi a húzott kékek számának várható értéke?

Megoldás. Hipergeometrikus eloszlás. Az eloszlás megadása definíció szerint azt jelenti, hogy meg kell határozni minden B Borel halmazra $P\left(\xi(B)\right)$ -t (jegyzet 1.14/es def). Ahogy órán a binomiális eloszlásánál láttuk (lásd a jegyzetet 3.1 példa), feltételezhetünk egy olyan $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ valószínűségi mezőt, ahol ξ az identitás, Ω pedig ξ lehetséges értékeit tartalmazza. A kritikus az hogy a vizsgált B Borel halmazba ξ mely lehetséges értékei esnek bele. Viszont ha megadjuk az elemi események valószínűségét, a valószínűség additivitása miatt minden lehetséges halmazra meg tudjuk határozni a kérdéses valószínűséget (csak azt kell néznünk mely értékek esnek bele, és össze kell adnunk ezek valószínűségét). Itt az elemi események:

$$\begin{aligned} P(\xi = 0) &= 0 & P(\xi = 1) &= \frac{\binom{5}{1} \binom{8-5}{4-1}}{\binom{8}{4}} & P(\xi = 2) &= \frac{\binom{5}{2} \binom{8-5}{4-2}}{\binom{8}{4}} \\ P(\xi = 3) &= \frac{\binom{5}{3} \binom{8-5}{4-3}}{\binom{8}{4}} & P(\xi = 4) &= \frac{\binom{5}{4} \binom{8-5}{4-4}}{\binom{8}{4}} \end{aligned}$$

Pl. a $\{[-0.5, 1.73] \cup [3.1, 6.5]\}$ Borel halmazba a $\xi = 0$, $\xi = 1$ és a $\xi = 4$ esik bele, ezek valószínűségét kell összeadnunk. Ezen okfejtés alapján a továbbiakban, ha eloszlást kell megadnunk, elegendő megadni az elemi események valószínűségét.

A kékek számának várható értéke: $\frac{nK}{N} = \frac{4 \cdot 5}{8}$

5. Az ősszel elültetett 6 piros és 4 sárga virágú tulipánhagymából tavasszal csak 5 bújtt elő. Mi a valószínűsége annak hogy a megmaradt 5 -ből

- (a) 3 piros és 2 sárga
- (b) mind az 5 piros
- (c) legalább 1 sárga

Adja meg a kibújt piros tulipánok számának várható értékét!

Megoldás.

- (a) Hipergeometrikus eloszlás $N = 10, n = 5, M = 6, k = 3$.

(b) Hipergeometrikus eloszlás $N = 10, n = 5, M = 6, k = 5$.

(c) $P(\text{Legalább egy sárga}) = 1 - P(\text{mind az öt piros})$.

6. Annak a valószínűsége, hogy egy évben egyetlen repülőgép sem zuhan le 10%.

(a) Mi a valószínűsége annak hogy maximum 3 repülőgép zuhan le?

(b) Átlagosan egy évben hány repülőgép zuhan le?

(c) Változatlan forgalmi viszonyokat feltételezve, mire tippel, hány repülőgép fog lezuhanni a következő évben?

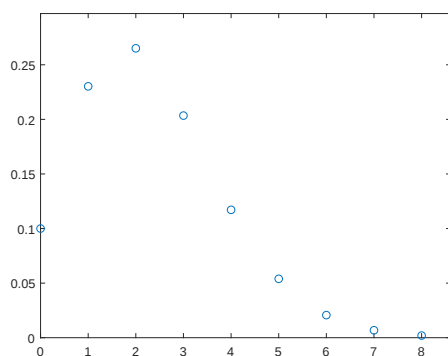
Megoldás. Végtelen kísérletszámú binomiális eloszlásnak tekinthető, azaz Poisson eloszlású. $P(\text{nem zuhan le}) = 0.1$ A paraméterét az eloszlásnak nem tudjuk, meg kell határozzuk az ismert adatból:

$P(\xi = 0) = 0.1 = \frac{\lambda^0}{0!} e^{-\lambda}$ ebből $\lambda = -\ln 0.1 = 2.3026$ a várható érték $= \lambda$.

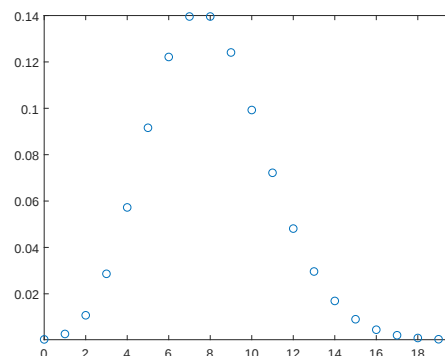
(a) Maximum 3: $P(\xi \leq 3) = \sum_{i=0}^3 P(\xi = i) = \frac{\lambda^0}{0!} e^{-\lambda} + \frac{\lambda^1}{1!} e^{-\lambda} + \frac{\lambda^2}{2!} e^{-\lambda} + \frac{\lambda^3}{3!} e^{-\lambda}$

(b) $E(\xi) = \lambda = 2.3026$

(c) Az alábbi ábra mutatja az egyes értékekhez tartozó valószínűségeket (belátható hogy $k = 8$ után monoton csökkenő)



1. ábra. $\lambda = 2.3026$,



$\lambda = 8$

Jól látható hogy 2-re érdemes tippelni, mivel ennek az esetnek a legnagyobb a valószínűsége. Ez éppen jól egybeesik a várható értékkel is - ez jellemző a Poisson eloszlásra, lásd pl a másik ábrát, ahol $\lambda = 8$ (habár itt a 7-hez is pontosan ugyanakkora valószínűség tartozik). Általános esetben viszont NEM IGAZ hogy a várható értékhez legközelebbi értékhez tartozik a legnagyobb valószínűség: Pl: $P(\xi = 0) = 0.45$, $P(\xi = 3) = 0.1$, $P(\xi = 6) = 0.45$. Ekkor $E(\xi) = 3$, de ennek az értéknek a legkisebb a bekövetkezési valószínűsége.

7. A kertünkben álló meggyfát sok kukac támadja meg, de szerencsére bő a termés: tapasztalataim szerint egy kosár meggyben $\frac{1}{e} \approx 0.37$ eséllyel egyáltalán nincs kukacos szem. A következő kérdésekhez vezessünk be egy valószínűségi változót, és indokoljuk a választott eloszlás használatát!

- (a) Mi a valószínűsége, hogy egy adott kosár meggyben pontosan két kukacos szemet fogok találni?
- (b) Mi a valószínűsége, hogy egy adott kosár meggyben legalább két kukacos szemet fogok találni?
- (c) Átlagosan hány kukacos szemet találok egy kosár meggyben? És kettőben?

Megoldás. Legyen a valószínűsítő az egy kosárban található kukacok száma. Poisson eloszlás, mert a kísérletek száma közelít a végtelenhez (nem tudni, mennyi meggy van a kosárban. Ez analóg a lezuhanó repülővel egy év alatt. A paramétere pedig kiszámolható: $P(\xi = 0) = e^{-1} = \frac{1^0}{0!}e^{-1} = e^{-1}$ tehát $\lambda = 1$.

- (a) $P(\xi = 2) = \frac{1^2}{2!}e^{-1}$
- (b) $P(\xi \geq 2) = 1 - P(\xi < 2) = 1 - \sum_{i=0}^1 P(\xi = i)$
- (c) 1 és 2 (várható érték).

8. Az egy újságíven lévő sajtóhibák száma 0.5 paraméterű Poisson eloszlású valószínűsítő. Mennyi a hibák számának várható értéke? Mi a valószínűsége, hogy egy 10 íves újságicikkben nincs hiba?

Megoldás.

- A várható értéke megegyezik a paraméterrel azaz 0.5.
- 10 ív várható értéke 5 azaz $\lambda = 5$ $P(\xi = 0) = \frac{5^0}{0!}e^{-5} = e^{-5}$

9. Mi az ötös lottón a várható nyereményem (5-találat 3 milliárd, 4-es 1 millió, 3-as 10000, 2-es 1000 Ft-ot ér), ha egy szelvény ára 225 Ft, és egy szelvénnel játszom?

Megoldás. Ebben az esetben a szokásos összegzést kell használnunk, de figyeljünk, hogy az egyes esetek értéke úgy számolható, mint az esethez tartozó nyeremény és a lottószelvény árának különbsége, így a nulla találat értéke negatív, azaz:

$$E(\xi) = \sum_{i=0}^5 P(\xi = i)(\text{nyeremény}_i - \text{lottoár})$$