

Valószínűségszámítás gyakorlat

Csercsik Dávid

2017 őszi

4. hét: Bayes tétel, Lépcsős függvény integrálja, binomiális eloszlás. Valószínűség a genetikában. MO

1. Egy városban ugyanannyi férfi lakik, mint nő. 100 férfi közül átlagosan 5, 10.000 nő közül átlagosan 25 színtévesztő. A színtévesztő lakosok közül taláalomra kiválasztunk egyet. Mennyi a valószínűsége, hogy a kiválasztott személy férfi?

Megoldás. Legyen F : férfi; $N = \overline{F}$ nő; SZ :színtévesztő;

Az adatok: $P(SZ|F) = \frac{5}{100}$ és $P(SZ|N) = \frac{25}{10000}$ valamint $P(F) = P(N) = 0.5$. Bayes és a teljes valószínűség tétele alapján: $P(F|SZ) = \frac{P(SZ|F)P(F)}{P(SZ|F)P(F) + P(SZ|N)P(N)}$ Megoldható kontingenciátáblázattal is, hint: számoljunk 10000 lakossal.

2. 80 beteg egy gyógyszerkísérletben vett részt. Közülük 50-en a kísérleti gyógyszert, 30-an placebót kaptak. A kezelés során 30 kísérleti gyógyszerrel kezelt és 5 placebóval kezelt beteg állapota javult. Ha egy véletlenszerűen kiválasztott beteg állapota nem javult a kezelés során, akkor mi a valószínűsége annak, hogy hatóanyag nélküli készítményt kapott?

Megoldás. J : javult; K : kísérleti gyógyszer.

Adatok: $P(J|K) = \frac{30}{50}$ és $P(J|\overline{K}) = \frac{5}{30}$; $P(K) = \frac{50}{80}$

Ezekből: $P(\overline{J}|K) = \frac{20}{50}$ és $P(\overline{J}|\overline{K}) = \frac{25}{30}$

Megoldás: $P(\overline{K}|\overline{J}) = \frac{P(\overline{J}|\overline{K})P(\overline{K})}{P(\overline{J}|\overline{K})P(\overline{K}) + P(\overline{J}|K)P(K)}$.

3. A tüdőszűrő-vizsgálat az esetek 90%-ában kimutatja a TBC fertőzést, 1%-ban hamisan jelez fertőzöttséget. A Népeességben a fertőzöttek aránya $5 \cdot 10^{-4}$.
 - (a) Mi a valószínűsége annak, hogy a vizsgálat eredménye pozitív, ha a vizsgált személy beteg (szenzitivitás).
 - (b) Mi a valószínűsége annak, hogy a vizsgálat eredménye negatív, ha a vizsgált személy egészséges (specifitás).
 - (c) Mi a valószínűsége annak, hogy a pozitív vizsgálati eredmény betegséget jelez?
 - (d) Ha n (lásd az előző feladat eredményét) pozitív vizsgálati eredményű személy közül csak 1 beteg, hogyan lehetne ezt az arányt javítani?

Megoldás. B: beteg; +: pozitív (-: $\bar{+}$, negatív);

(a) $P(+|B) = 0.9$

(b) $P(-|\bar{B}) = 1 - P(+|\bar{B}) = 0.99$

(c) $P(B|+) = \frac{P(+|B)P(B)}{P(+|B)P(B)+P(+|\bar{B})P(\bar{B})}$

(d) 1 millió lakossal számolva (kontingenciatáblázat) 500 beteg lakos van, ebből 450-nél pozitív a vizsgálat ($=0.9 \cdot 500$). 999500 egészséges emberből 9995 embernél mutat ki pozitívat a vizsgálat (1%). Azaz 10445 pozitív vizsgálat van. A pozitívak között a betegek aránya $\frac{450}{10445} \approx 0.043$. Ha a szenzitivitást maximumra emeljük: $\frac{500}{10445} \approx 0.048$. Az arányt a specifitás növelésével emelhetjük jelentősebben.

4. Legyen $\Omega = \{\langle \text{🐱}, \text{🐱} \rangle, \langle \text{🐱}, \text{🐰} \rangle, \langle \text{🐱}, \text{🐼} \rangle, \langle \text{🐼}, \text{🐼} \rangle\}$, $\mathfrak{F} = 2^\Omega$, és $f = 2\chi_{\{\langle \text{🐱}, \text{🐱} \rangle\}} + 4\chi_{\{\langle \text{🐱}, \text{🐰} \rangle\}} + 1\chi_{\{\langle \text{🐼}, \text{🐼} \rangle\}}$
Számoljuk ki

$$\int_{\Omega} f dP$$

-t ha $P =$

- A számlálómérték
- A $\langle \text{🐱}, \text{🐰} \rangle$ -ra koncentrált Dirac mérték
- A $\langle \text{🐱}, \text{🐼} \rangle$ -ra koncentrált Dirac mérték

Megoldás.

- $\int_{\Omega} f dP = 2 \cdot 2 + 4 \cdot 1 + 1 \cdot 1$
- $\int_{\Omega} f dP = 0 + 4 \cdot 1 + 0$
- $\int_{\Omega} f dP = 2 \cdot 1 + 0 + 0$

5. Egy szabályos dobókockával egymás után nyolcszor dobunk. Mi a valószínűsége annak hogy

- egyszer sem
- pontosan egyszer
- pontosan kétszer
- $\vdots$
- mind a 8-szor

6-os az eredmény?

Megoldás. Az eloszlás $(8, \frac{1}{6})$ paraméterű binomiális eloszlású, hiszen egy adott kísérletsorozatban egy adott esemény bekövetkeztének mennyiségére vagyunk kíváncsiak. Ebből adódóan:

- $P(\xi = 0) = \binom{8}{0}(\frac{1}{6})^0(1 - \frac{1}{6})^8$

- $P(\xi = 1) = \binom{8}{1}(\frac{1}{6})^1(1 - \frac{1}{6})^7$
- $P(\xi = 2) = \binom{8}{2}(\frac{1}{6})^2(1 - \frac{1}{6})^6$
- $\vdots$
- $P(\xi = 8) = \binom{8}{8}(\frac{1}{6})^8(1 - \frac{1}{6})^0$

6. 100 emberből átlag 80-nak van bankkártyája. Ha 10-en állnak sorba, mi a valószínűsége, hogy pontosan 7 embernek lesz bankkártyája? Mi a valószínűsége, hogy van olyan ember, akinek van bankkártyája?

Megoldás.

- $P(\xi = 7) = \binom{10}{7}(\frac{80}{100})^7(1 - \frac{80}{100})^3$
- $P(\text{min 1-nek van}) = P(\xi \geq 1) = \sum_{i=1}^{10} P(\xi = i)$ illetve $1 - P(\xi = 0)$

7. Valószínűség a genetikában