

Valószínűségszámítás gyakorlat

Csercsik Dávid

2017 ősz

3. hét: Feltételes valószínűség és függetlenség, eloszlásfüggvény MO

1. Az alábbi kontingenciatáblázat a tüdőrák és a dohányzás, mint rizikófaktor kapcsolatát leíró vizsgálat adatait tartalmazza. Tekintse a feladatban szereplő események valószínűségének a relatív gyakoriságukat!

	D	$\overline{D}$
T	483	76
$\overline{T}$	982	1412

D : dohányos, T : Tüdőrákos

- (a) Számolja ki annak valószínűségét, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott személy tüdőrákban szenved feltéve, hogy dohányos, ill. azt feltételezve, hogy nem dohányzik.
- (b) Határozza meg a dohányzás relatív kockázatát, vagyis a $\frac{P(\text{tüdőrákos} \mid \text{dohányzik})}{P(\text{tüdőrákos} \mid \text{nem dohányzik})}$ hányadost!

Megoldás. T :tüdőrákos, D :dohányzik

$$(a) \quad P(T|D) = \frac{P(T \cap D)}{P(D)} = \frac{483}{483+982}$$
$$P(T|\overline{D}) = \frac{P(T \cap \overline{D})}{P(\overline{D})} = \frac{76}{76+1412}.$$

$$(b) \quad \frac{P(T|D)}{P(T|\overline{D})}$$

2. A kockadobásnál legyen E : 6-ost dobunk; F : páros számot dobunk. Független-e ez a két esemény?

Megoldás. $P(E) = \frac{1}{6}$ és $P(F) = \frac{1}{2}$ a EF legyen a hatost dobunk, ami egyben páros is. $P(E \cap F) = \frac{1}{6}$ de $P(E \cap F) \neq P(E)P(F)$ ezért nem függetlenek.

Másképp: az eredmény abból is látszik, hogy a $P(E|F) = \frac{1}{3} \neq P(E) = \frac{1}{6}$.

Harmadik módon: $P(F|E) = 1 \neq P(F) = \frac{1}{2}$

3. Egy érmét egymás után kétszer feldobunk. Legyen E : a két dobás eredménye ugyanaz; F : először írást dobunk. Független-e a két esemény?

Megoldás. Legyen az eseménytér $\Omega = \{ff, fi, if, ii\}$ ekkor $P(E) = \frac{1}{2}$ és $P(F) = \frac{1}{2}$; a $P(E \cap F) = \frac{1}{4} = P(E)P(F) \rightsquigarrow$ Független a két esemény. Másképp $P(E|F) = \frac{1}{2} = P(E)$.

4. Egy alkalmassági vizsgálat adatai szerint a vizsgált személyeken 0.05 valószínűséggel mozgásszervi és 0.03 valószínűséggel érzékszervi rendellenesség figyelhető meg. Az együttes előfordulás valószínűsége 0.01.

- (a) Független-e a két rendellenesség előfordulása? Mekkora lenne az együttes előfordulás valószínűsége, ha a két rendellenesség előfordulása független volna?
- (b) Mi a valószínűsége annak, hogy egy találmásra kiválasztott személyen egyik rendellenesség sem figyelhető meg?
- (c) Mekkora valószínűséggel találunk érzékszervi rendellenességet a mozgásszervi rendellenességgel élő egyéneknél? Fordítva, mekkora valószínűséggel található mozgásszervi rendellenesség az érzékszervi rendellenességben szenvedő egyéneknél?

Megoldás. M:mozgásszervi, E:érzékszervi

- (a) Nem független, mert $P(M \cap E) = 0.01$, ha függetlenek lennének, akkor $P(M \cap E) = P(M)P(E) = 0.05 \cdot 0.03 = 0.0015$ lenne.
- (b) Halmazalgebrai megfontolással könnyen megoldható, ha tekintünk 100 embert. Ekkor $|M| = 5$; $|E| = 3$ A két halmaz metszetéről tudjuk, hogy elemszáma $=1$, így az úniójuk elemszáma $5 + 3 - 1 = 7$ ebből adódóan a maradék 93. Azaz $P(\overline{M \cap E}) = 0.93$.

Másképp megfogalmazva: $P(M \cup E)$: legalább az egyik betegsége van. Ekkor $P(\overline{M \cup E}) = P(\overline{M} \cap \overline{E}) = 1 - P(M \cup E) = 1 - (P(M) + P(E) - P(M \cap E)) = 1 - (0.05 + 0.03 - 0.01) = 1 - 0.07 = 0.93$.

(c) $P(E|M) = \frac{P(EM)}{P(M)} = \frac{0.01}{0.05} = 0.2$ és $P(M|E) = \frac{P(M \cap E)}{P(E)} = \frac{0.01}{0.03} = \frac{1}{3}$.

5. Egy munkahelyen dolgozó nők száma az ott dolgozó férfiakénak a kétszerese. A nők negyede, a férfiak fele szemüveges. Mi a valószínűsége annak, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott dolgozó szemüveges?

Megoldás. SZ:szemüveges, N:nő, F:férfi A teljes valószínűség tételét alkalmazva:

$$P(SZ) = P(SZ|N)P(N) + P(SZ|F)P(F).$$

A feladat kontingenciatáblázattal is megoldható, hint: férfiak száma n , nők száma $2n$.

6. Üzletemberek egy csoportjában az emberek 40%-a tartozik az A párthoz, 60%-a tartozik a B párthoz. Ha az A pártban az emberek 30%-a, míg a B pártban az emberek 50%-a dohányzik, akkor mi a valószínűsége annak, hogy egy dohányos ember a B pártba tartozik?

Megoldás. D:dohányzik, B: B párthoz tartozik, A: A párthoz tartozik A Bayes-tételt és a teljes valószínűség tételét alkalmazva:

$$P(B|D) = \frac{P(D|B)P(B)}{P(D)}$$

$$= \frac{P(D|B)P(B)}{P(D|B)P(B) + P(D|A)P(A)} = \frac{0.5 \cdot 0.6}{0.5 \cdot 0.6 + 0.3 \cdot 0.4}.$$

7. (Monty Hall probléma) Tekintsük a következő ismert televíziós játékot: egy színpadon van három függöny. Az egyik függöny mögött egy csodálatos autó van, amit szeretnénk megnyerni, a másik kettő mögött egy-egy fekete macska. Rámutatunk az egyik függönyre, majd műsorvezető, aki tudja, hogy melyik függöny mögött mi van, a másik két függöny közül elhúzza egy olyat, amelyik mögött macska van. Ezek után ismét dönthetünk: vagy választjuk az eredetileg kiszemelt függönyt, vagy váltunk, és a még meg nem mutatott függönyt választjuk. Mi a jó stratégia? Mekkora valószínűséggel tudjuk megnyerni az autót?

Megoldás.

$$\begin{aligned} B_1 &\stackrel{\circ}{=} \{\text{elsőre macskát választottunk}\} \\ B_2 &\stackrel{\circ}{=} \{\text{elsőre autót választottunk}\} \\ A &\stackrel{\circ}{=} \{\text{Nyerünk ha váltunk}\} \end{aligned}$$

Ahol B_1 és B_2 teljes eseményrendszert alkot. A Teljes valószínűség tételével:

$$P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) = 1 \cdot \frac{2}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \quad P(\bar{A}) = 1 - \frac{2}{3}$$

8. Egy gép átlagban munkaidejének $\frac{1}{3}$ -ában A jelű, $\frac{1}{6}$ -ában B jelű, a maradék idejében C jelű alkatrészen dolgozik. Az A jelű alkatrész kidolgozása közben az erre fordított idő 10%-ában áll a gép. A B jelű alkatrész kidolgozása közben végig dolgozik, a C jelű kidolgozásakor a munkaidő 25%-ban áll. Mennyi a valószínűsége, hogy egy találmányra kiválasztott időpontban áll a gép. Feltéve, hogy a gép dolgozik, mi a valószínűsége, hogy éppen A alkatrészen dolgozik?

Megoldás. Vezessük be az alábbi jelöléseket: $B_1 = A$ -n dolgozik, $B_2 = B$ -n dolgozik, $B_3 = C$ -n dolgozik, $A =$ a gép éppen dolgozik azaz nem áll. Ekkor az alábbiakat tudjuk az adatokból: $P(B_1) = \frac{1}{3}$ $P(A|B_1) = 0.9$ $P(\bar{A}|B_1) = 0.1$

$$P(B_2) = \frac{1}{6} \quad P(A|B_2) = 1 \quad P(\bar{A}|B_2) = 0$$

$P(B_3) = \frac{1}{2}$ $P(A|B_3) = 0.75$ $P(\bar{A}|B_3) = 0.25$ Ahhoz, hogy kiszámoljuk, hogy áll-e a gép, tekintsük azt, hogy nem áll a gép és vonjuk ki egyből. Teljes valószínűség tételét alkalmazva: $P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + P(A|B_3)P(B_3)$ ekkor $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ A második kérdésre pedig a feltételes valószínűség definíciójából kiindulva: $P(B_1 \cap A) = P(A|B_1) \cdot P(B_1)$ ezt pedig behelyettesíthetjük a kérdéses képletbe: $P(B_1|A) = \frac{P(B_1 \cap A)}{P(A)}$.

9. Legyen $\Omega = \{\text{dog}, \text{cat}, \text{rabbit}\}$, $\mathfrak{F} = 2^\Omega$,

$$\begin{aligned} P(\{\text{dog}\}) &= 1/8 & P(\{\text{cat}\}) &= 5/8 & P(\{\text{rabbit}\}) &= 2/8 \\ \rightsquigarrow P(\{\text{dog}, \text{cat}\}) &= 6/8 & P(\{\text{dog}, \text{rabbit}\}) &= 3/8 & P(\{\text{cat}, \text{rabbit}\}) &= 7/8 \end{aligned}$$

Mi lesz az F_ξ eloszlásfüggvény ha

- (a) $\xi(\{\text{dog}\}) = 2$, $\xi(\{\text{cat}\}) = 3$, $\xi(\{\text{rabbit}\}) = 1$
- (b) $\xi(\{\text{dog}\}) = 3$, $\xi(\{\text{cat}\}) = 1$, $\xi(\{\text{rabbit}\}) = 2$
- (c) $\xi(\{\text{dog}\}) = -2$, $\xi(\{\text{cat}\}) = -2$, $\xi(\{\text{rabbit}\}) = 3$

?

Megoldás. (a) Az eloszlásfüggvény definícióját alkalmazzuk:

- Ha $x \leq 1$ akkor a $]-\infty, x[$ intervallum ősképe meghatározandó, és ennek a valószínűségét venni. Az ősképe ezesetben $\emptyset$. $P(\emptyset) = 0$.
- Ha $1 < x \leq 2$ akkor az ősképe $\{\text{rabbit}\}$. $P(\{\text{rabbit}\}) = 2/8$.
- Ha $2 < x \leq 3$ akkor az ősképe $\{\text{dog}, \text{rabbit}\}$. $P(\{\text{dog}, \text{rabbit}\}) = 3/8$.
- Ha $3 < x$ akkor az ősképe Ω . $P(\Omega) = 1$.

Az alábbi ábrán $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $A = \{\text{rabbit}\}$, $B = \{\text{dog}, \text{rabbit}\}$

